СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калашникова Т.В., Извеков Н.Ю. Интеграция метода ориентации на спрос в систему ценообразования сети розничной торговли // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 6. – С. 9–13.
2. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.
3. Натан А.А. Стохастический модельный анализ простых коммерческих операций. – М.: МЗ Пресс, 2005. – 120 с.
4. Натан А.А. Стохастические модели в микроэкономике. – М.: МФТИ, 2001. – 172 с.
5. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
6. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
7. Морозова А.С., Моисеева С.П., Одинцов К.М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи: Матер. XI Всеросс. научно-практ. конф. Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – С. 37–39.
8. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 49–52.
9. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
10. Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2005. – № 287. – С. 46–51.
11. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 173–175.
12. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Распределение вероятностей двумерного потока обращений в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с повторным обращением // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2006. – № 16. – С. 125–128.
13. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование систем параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С. 49–55.
14. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. – М.: Изд-во «Наука», 1969. – 512 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 662 с.
16. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.

Поступила 23.04.2013 г.

УДК 519.865

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ КАПИТАЛА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, А.В. Цитко

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Получены дифференциальные уравнения, определяющие изменение во времени среднего значения и дисперсии капитала, а также точные формулы для среднего значения и дисперсии капитала.

Ключевые слова:
Финансовый рынок, капитал, портфель, ценные бумаги.
Key words:
Financial market, capital, portfolio, securities.

1. Постановка задачи

В [1] решена задача формирования портфеля ценных бумаг на основе динамического программирования, допускающая точное решение. Данная работа посвящена теоретическому исследованию свойств капитала портфеля при использовании оптимального управления, полученного в [1]. Система обозначений та же, что и в [1].

2. Основные результаты

Утверждение.

При оптимальном управлении капитал $X(t)$ определяется уравнением

$$dX(t) = \frac{1}{\sigma^2 b_2(t)}\begin{bmatrix} -(a-r)^2 b_1(t) + \\ +(r\sigma^2 - (a-r)^2) b_2(t) X(t) \end{bmatrix} dt - \\ - \frac{(a-r)}{\sigma b_2(t)}[b_1(t) + b_2(t)X(t)]dW(t), \quad (1)$$

где

$$b_1(t) = [b_1^1 e^{(\mu-\beta)t} - b_1^2]e^{\beta t}, \quad (2)$$

$$b_2(t) = b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} - r,$$

$$b_1^1 = \frac{2X_0}{\mu-\beta},\ b_1^2 = 2X_0\left(1+\frac{1}{\mu-\beta}\right)e^{(\mu-\beta)t_1}, \qquad (4)$$

$$b_2^1 = 2\left(1+\frac{1}{r-\beta}\right)e^{(r-\beta)t_1},\ b_2^2 = \frac{2}{r-\beta}. \qquad (5)$$

Доказательство:

Уравнение (1) получается в результате подстановки уравнения (7) из [1] в (54) из [1].

Теорема 1.

Среднее значение капитала $\bar{X}(t)=\mathbf{M}\{X(t)\}$ определяется уравнением

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \left[r-\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\right]\bar{X}(t) - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1(t)}{b_2(t)}, \qquad (6)$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определены в (2), (3), решение, которого имеет вид

$$\bar{X}(t) = m(t)\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right| +$$

$$+\left[\bar{X}_0 - m(t)e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+1}{\sqrt{\Delta}-1}\right|\right]e^{-\beta t}, \qquad (7)$$

где

$$m(t) =$$

$$= \frac{\bar{X}_0(r^2-\beta^2)[2\beta-(\mu-\beta+1)(\mu+\beta)e^{(\mu-\beta)t_1}]}{4(\mu^2-\beta^2)\sqrt{r-\beta+1}}\times$$

$$\times e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}e^{-\beta t},$$

$$\Delta = b_2^2/b_2^1. \qquad (8)$$

Доказательство:

Пусть процесс $X(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = f(t,X(t))dt + \Phi(t,X(t))dW(t), \qquad (9)$$

где $W(t)$ – винеровский процесс. В нашем случае, как это следует из (7) в [1]

$$f(t,X(t)) = [r+(a-r)u(t)]X(t),$$

$$\Phi(t,X(t)) = \sigma u(t)X(t).$$

Проинтегрируем уравнение (9)

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(\tau,X(\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^t \Phi(\tau,X(\tau))W(\tau)d\tau. \qquad (10)$$

Математическое ожидание от (10) имеет вид

$$\bar{X}(t) = \mathbf{M}\{X(t)\} = \bar{X}_0 + \int_0^t \mathbf{M}\{f(\tau,X(\tau))\}d\tau +$$

$$+\mathbf{M}\{\int_0^t \Phi(\tau,X(\tau))W(\tau)d\tau\}.$$

Так как математическое ожидание от стохастического интеграла равно нулю [2], то есть $\mathbf{M}\{\int_0^t\Phi(\tau,X(\tau))W(\tau)d\tau\}=0$, тогда

$$\bar{X}(t) = \bar{X}_0 + \int_0^t \mathbf{M}\{f(\tau,X(\tau))\}d\tau. \qquad (11)$$

По теореме из [1] оптимальное управление определяется формулой

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{(a-r)[b_1(t)+b_2(t)X(t)]}{\sigma^2 b_2(t)X(t)}. \qquad (12)$$

С учетом (12)

$$\mathbf{M}\{f(\tau,X(\tau))\} =$$

$$= \mathbf{M}\left\{\left[\begin{matrix} r+(a-r)\times \\ \times\left(-\dfrac{(a-r)[b_1(t)+b_2(t)X(t)]}{\sigma^2 b_2(t)X(t)}\right)\end{matrix}\right]X(t)\right\} =$$

$$= r\bar{X}(t) - \frac{(a-r)^2 b_1(t)}{\sigma^2 b_2(t)} - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\bar{X}(t). \qquad (13)$$

Подстановка (13) в (11) дает

$$\bar{X}(t) = \bar{X}_0 + \int_0^t \left(\begin{matrix} r\bar{X}(t) - \dfrac{(a-r)^2 b_1(t)}{\sigma^2 b_2(t)} - \\ -\dfrac{(a-r)^2}{\sigma^2}\bar{X}(t)\end{matrix}\right)d\tau. \qquad (14)$$

Дифференцирование (14) приводит к (6).

Уравнение (6) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \left[r-\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\right]\bar{X}(t)$$

имеет вид

$$\bar{X}(t) = Ce^{\left[r-\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\right]t}.$$

Поскольку $\dfrac{(a-r)^2}{\sigma^2} = \beta + r$, то $\bar{X}(t)=Ce^{-\beta t}$.

Найдем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, для этого полагаем $C=C(t)$, тогда

$$\bar{X}(t) = C(t)e^{-\beta t}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (6) получаем

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-\beta t} - \beta C(t)e^{-\beta t} =$$

$$= \left[r-\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\right]C(t)e^{-\beta t} - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1(t)}{b_2(t)},$$

тогда

$$C(t) = -(\beta+r)\int\frac{b_1(t)}{b_2(t)}e^{\beta t}dt. \qquad (16)$$

Введем обозначение $Q = \int\dfrac{b_1(t)}{b_2(t)}e^{\beta t}dt$, тогда с учетом (4), (5), (8) получаем

$$Q = \int\frac{b_1^1e^{\mu t}-b_1^2e^{\beta t}}{b_2^1e^{-(r-\beta)t}-b_2^2}e^{\beta t}dt =$$

$$= \frac{1}{b_2^1}\left[\int\frac{b_1^1e^{(\mu+\beta)t}}{e^{-(r-\beta)t}-\Delta}dt - \int\frac{b_1^2e^{2\beta t}}{e^{-(r-\beta)t}-\Delta}dt\right]. \qquad (17)$$

Пусть

$$Q_1 = \int \frac{e^{(\mu+\beta)t}}{e^{-(r-\beta)t} - \Delta} dt, \; Q_2 = \int \frac{e^{2\beta t}}{e^{-(r-\beta)t} - \Delta} dt,$$

$$\lambda_1 = \mu + \beta, \; \lambda_2 = -(r-\beta), \; \lambda_3 = 2\beta.$$

Тогда

$$Q_1 = \int \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_2 t} - \Delta} dt, \qquad (18)$$

$$Q_2 = \int \frac{e^{\lambda_3 t}}{e^{\lambda_2 t} - \Delta} dt. \qquad (19)$$

Делая замену переменных $e^{\lambda_1}t{=}z$, $dz{=}\lambda_1 e^{\lambda_1}dt$, $e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ в (18), получаем

$$Q_1 = \frac{1}{\lambda_1} \int \frac{dz}{z^{\lambda_2/\lambda_1} - \Delta} =$$

$$= -\frac{\sqrt{r-\beta+1}}{2(\mu+\beta)} e^{\frac{(r-\beta)}{2}t_1} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}} \right| + C_1. \qquad (20)$$

Делая замену переменных $e^{\lambda_3}t{=}z$, $dz{=}\lambda_3 e^{\lambda_3}dt$, $e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_3 t \frac{\lambda_2}{\lambda_3}}$ в (19), получаем

$$Q_2 = \frac{1}{\lambda_3} \int \frac{dz}{z^{\lambda_2/\lambda_3} - \Delta} =$$

$$= -\frac{\sqrt{r-\beta+1}}{4\beta} e^{\frac{(r-\beta)}{2}t_3} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}} \right| + C_2. \qquad (21)$$

Подстановка (20), (21) в (17) дает

$$Q = \frac{b_1^1}{b_2^1} Q_1 - \frac{b_1^2}{b_2^1} Q_2 =$$

$$= -\frac{\overline{X}_0 (r-\beta)[2\beta - (\mu-\beta+1)(\mu+\beta)e^{(\mu-\beta)t_1}]}{4\beta(\mu^2-\beta^2)\sqrt{r-\beta+1}} \times$$

$$\times e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}} \right| + C. \qquad (22)$$

Затем подставляя (22) в (16) получаем

$$C(t) =$$

$$= \frac{\overline{X}_0 (r^2-\beta^2)[2\beta - (\mu-\beta+1)(\mu+\beta)e^{(\mu-\beta)t_1}]}{4\beta(\mu^2-\beta^2)\sqrt{r-\beta+1}} \times$$

$$\times e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}} \right| + C. \qquad (23)$$

Подстановка (23) в (15) дает

$$\overline{X}(t) = Ce^{-\beta t} +$$

$$+ \frac{\overline{X}_0 (r^2-\beta^2)[2\beta - (\mu-\beta+1)(\mu+\beta)e^{(\mu-\beta)t_1}]}{4\beta(\mu^2-\beta^2)\sqrt{r-\beta+1}} \times$$

$$\times e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1} e^{-\beta t} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}} \right|. \qquad (24)$$

Используя начальное условие для капитала $X(t_0){=}X_0$, $t_0{=}0$, найдем константу C

$$C = \overline{X_0} +$$

$$+ \frac{\overline{X}_0 (r^2-\beta^2)[2\beta - (\mu-\beta+1)(\mu+\beta)e^{(\mu-\beta)t_1}]}{4\beta(\mu^2-\beta^2)\sqrt{r-\beta+1}} \times$$

$$\times e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta}+1}{\sqrt{\Delta}-1} \right|. \qquad (25)$$

Подставляя (25) в (24) получаем (7).

Теорема 2.

Математическое ожидание $\bar{X}^2(t){=}\mathbf{M}\{X^2(t)\}$ определяется уравнением

$$\frac{d\overline{X^2}(t)}{dt} = \left[2r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\right]\overline{X^2}(t) + \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1^2(t)}{b_2^2(t)}, \qquad (26)$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определены в (2), (3), а решение имеет вид

$$\overline{X^2}(t) = \bar{X}_0^2 e^{(r-\beta)t}. \qquad (27)$$

Доказательство:

Рассмотрим процесс $\varphi(X(t)){=}X^2(t)$. Тогда по формуле Ито [2]

$$d\varphi(X(t)) =$$

$$= \frac{\partial\varphi(X(t))}{\partial X(t)} dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(X(t))}{\partial X^2(t)}\Phi(t)dt, \qquad (28)$$

где с учетом (1)

$$\Phi(t) = u^2(t)\sigma^2 X^2(t) =$$

$$= \frac{(a-r)^2[b_1(t)+b_2(t)X(t)]^2}{\sigma^2 b_2^2(t)}, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial\varphi(X(t))}{\partial X(t)} = 2X(t), \; \frac{\partial^2\varphi(X(t))}{\partial X^2(t)} = 2. \qquad (30)$$

Подстановка (29), (30) с учетом Утверждения в уравнение (28) для процесса $\varphi(X(t)){=}X^2(t)$ дает, что

$$dX^2(t) = 2X(t)dX(t) + \Phi(t)dt =$$

$$= 2\left[\left(r - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\right)X^2(t) - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1(t)}{b_2(t)}X(t)\right]dt -$$

$$-2\frac{(a-r)[b_1(t)-b_2(t)X(t)]}{\sigma b_2(t)}X(t)dW(t) +$$

$$+\frac{(a-r)^2[b_1(t)-b_2(t)X(t)]^2}{\sigma^2 b_2^2(t)}dt.$$

После преобразований последнего выражения получаем

$$dX^2(t) = 2rX^2(t)dt - \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1^2(t)}{b_2^2(t)}dt -$$

$$-2\frac{(a-r)[b_1(t)-b_2(t)X(t)]}{\sigma b_2(t)}X(t)dW(t) +$$

$$+\frac{(a-r)^2[b_1(t)-b_2(t)X(t)]^2}{\sigma^2 b_2^2(t)}dt.$$

Тогда аналогично (6) получаем уравнение (26). Найдем решение уравнения (26). Уравнение вида

$$\frac{dy(t)}{dt}=-p(t)y(t)+q(t)$$

является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, общее решение которого имеет вид [3]

$$y(t)=\exp\{-\int_0^t p(\xi)d\xi\}\times$$

$$\times[\int_0^t q(\xi)\exp\{\int_0^\xi p(s)ds\}d\xi+C]. \qquad (31)$$

где константу интегрирования находим из начального условия $y(0)=y_0$. Применим формулу (31) к уравнению (26)

$$\overline{X^2}(t)=\exp\{-\int_0^t(\beta-r)d\xi\}\times$$

$$\times\left[\int_0^t(\beta+r)\frac{b_1^2(\xi)}{b_2^2(\xi)}\exp\{\int_0^\xi(\beta-r)ds\}d\xi+C\right]=$$

$$=Ce^{-(\beta-r)t}+(\beta+r)e^{(\beta-r)t}\int_0^t\frac{b_1^2(\xi)}{b_2^2(\xi)}e^{(\beta-r)\xi}d\xi. \qquad (32)$$

Введем обозначение $\theta=\int_0^t\frac{b_1^2(\xi)}{b_2^2(\xi)}e^{(\beta-r)\xi}d\xi$.

Использование формул (2),(3) для $b_1(t)$ и $b_2(t)$ дает, что

$$\theta=\int_0^t\frac{(b_1^1)^2e^{2\mu\xi}e^{-(r-\beta)\xi}}{(b_2^1e^{(\beta-r)\xi}-b_2^2(\xi))}d\xi-$$

$$-2b_1^1b_1^2\int_0^t\frac{e^{(\mu+\beta)\xi}e^{-(r-\beta)\xi}}{(b_2^1e^{(\beta-r)\xi}-b_2^2(\xi))}d\xi+$$

$$+\int_0^t\frac{(b_1^2)^2e^{2\beta\xi}e^{-(r-\beta)\xi}}{(b_2^1e^{(\beta-r)\xi}-b_2^2(\xi))}d\xi. \qquad (33)$$

Пусть

$$\theta_1=\frac{(b_1^1)^2}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{e^{(2\mu-r+\beta)\xi}}{(e^{(\beta-r)\xi}-\Delta)^2}d\xi,$$

$$\theta_2=\frac{1}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{e^{(\mu-r+2\beta)\xi}}{(e^{(\beta-r)\xi}-\Delta)^2}d\xi,$$

$$\theta_3=\frac{(b_1^2)^2}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{e^{(3\beta-r)\xi}}{(e^{(\beta-r)\xi}-\Delta)^2}d\xi,$$

где Δ определена в (8).

Нахождение θ_1.

Сделаем замену переменных $\gamma_1=r-\beta-2\mu$, $\gamma_2=\beta-r$. Тогда

$$\theta_1=\frac{(b_1^1)^2}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{e^{-\gamma_1\xi}}{(e^{\gamma_2\xi}-\Delta)^2}d\xi=\frac{(b_1^1)^2}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{\xi^{\alpha-1}e^{-\gamma\xi}}{(e^{\gamma\xi}+(-\Delta))^2}d\xi,$$

где $\alpha=1$.

Воспользуемся формулой

$$\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}e^{-\rho x}}{(e^{qx}+z)}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{(n-1)!}\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)^{n-1}(-z)^k}{(\rho+qk+qn)^\alpha},$$

приведенной в [4], где $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функция, которая имеет вид $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$. В нашем случае $\alpha=1$, $n=2$. Пусть $t\to\infty$, тогда

$$\theta_1=\frac{(b_1^1)^2}{(b_2^1)^2}\int_0^\infty\frac{\xi^{\alpha-1}e^{-\gamma_1\xi}}{(e^{\gamma_2\xi}+(-\Delta))^2}d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(1)}{1!}\frac{(b_1^1)^2}{(b_2^1)^2}\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(\gamma_1+\gamma_2k+2\gamma_2)}=$$

$$=\frac{\overline{X}_0^2(r-\beta)^2e^{-2(r-\beta)t_1}}{(\mu-\beta)^2(r-\beta+1)^2}\times$$

$$\times\Gamma(1)\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(\beta-r-2\mu)+(\beta-r)k}. \qquad (34)$$

Нахождение θ_2.

Сделаем замену переменных $\gamma_1=r-2\beta-\mu$, $\gamma_2=\beta-r$, $\alpha=1$, $n=2$. Тогда

$$\theta_2=\frac{1}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{\xi^{\alpha-1}e^{-\gamma_1\xi}}{(e^{\gamma_2\xi}-\Delta)^2}d\xi=$$

$$=\frac{(r-\beta)^2e^{-2(r-\beta)t_1}}{4(r-\beta+1)^2}\Gamma(1)\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(-r-\mu)+(\beta-r)k}. \qquad (35)$$

Нахождение θ_3.

Сделаем замену переменных $\gamma_1=r-3\beta$, $\gamma_2=\beta-r$, $\alpha=1$, $n=2$. Тогда

$$\theta_3=\frac{(b_1^2)^2}{(b_2^1)^2}\int_0^t\frac{\xi^{\alpha-1}e^{\gamma_1\xi}}{(e^{\gamma_2\xi}-\Delta)^2}d\xi=$$

$$=\frac{\overline{X}_0^2(\mu-\beta+1)^2(r-\beta)^2e^{2(\mu-r)t_1}}{(\mu-\beta)^2(r-\beta+1)^2}\times$$

$$\times\Gamma(1)\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(\beta-r)+(\beta-r)k}. \qquad (36)$$

Подставляя (34), (35), (36) в (33), а затем в (32) получаем

$$\overline{X^2}(t)=Ce^{(r-\beta)t}+(\beta+r)e^{(\beta-r)t}=$$

$$=\frac{\overline{X}_0^2(r-\beta)^2}{(\mu-\beta)^2(r-\beta+1)^2}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l}e^{-2(r-\beta)t_1}\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(\beta-r-2\mu)+(\beta-r)k}-\\-2(\mu-\beta+1)e^{2(\mu-\beta+1)t_1}\times\\\times\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(-r-\beta)+(\beta-r)k}+\\+(\mu-\beta+1)^2e^{2(\mu-r)t_1}\sum_{k=0}^\infty\frac{(k+1)\Delta^k}{(\beta-r)+(\beta-r)k}\end{array}\right]. \qquad (37)$$

Используя начальное условие для капитала $\overline{X}(t_0)=\overline{X}_0$, $t_0=0$, найдем константу C

$$C=\bar{X}_0^2-(\beta+r)\frac{\bar{X}_0^2(r-\beta)^2}{(\mu-\beta)^2(r-\beta+1)^2}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} e^{-2(r-\beta)t_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\Delta^k}{(\beta-r-2\mu)+()\beta-rk}- \\ -2(\mu-\beta+1)e^{2(\mu-\beta+1)t_1}\times \\ \times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\Delta^k}{(-r-\beta)+(\beta-r)k}+ \\ (\mu-\beta+1)^2e^{2(\mu-r)t_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\Delta^k}{(\beta-r)+(\beta-r)k} \end{array}\right]. \qquad (38)$$

В результате подстановки (38) в (37) получаем (27).

Теорема 3.

Пусть

$$D(t)=\mathbf{M}\{[X(t)-\overline{X}(t)]^2\}=$$

$$=\mathbf{M}\{X^2(t)\}-(\bar{X}(t))^2=\overline{X^2}(t)-(\bar{X}(t))^2 \qquad (39)$$

есть дисперсия капитала. Тогда

$$\frac{dD(t)}{dt}=\frac{2[r\sigma^2-(a-r)^2]}{\sigma^2}D(t)+$$

$$+\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\left[\overline{X^2}(t)+2\frac{b_1(t)}{b_2(t)}\overline{X}(t)+\frac{b_1^2(t)}{b_2^2(t)}\right]. \qquad (40)$$

Доказательство:

Получим уравнение для $(X–(t))^2$. Так как

$$\frac{d(\bar{X}(t))^2}{dt}=2\overline{X}(t)\frac{d\bar{X}(t)}{dt},$$

то с использованием (6) получим

$$\frac{d(\bar{X}(t))^2}{dt}=$$

$$=2\frac{[r\sigma^2-(a-r)^2]}{\sigma^2}\overline{X}^2(t)-\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1(t)}{b_2(t)}\overline{X}(t). \qquad (41)$$

С учетом (39) получаем

$$\frac{dD(t)}{dt}=\frac{d\overline{X^2}(t)}{dt}-\frac{d(\bar{X}(t))^2}{dt}. \qquad (42)$$

Подстановка (26), (41) в (42) приводит к (40).

Теорема 4.

Дисперсия капитала определяется формулой

$$D(t)=\bar{X}_0^2e^{(r-\beta)t}-\bar{X}_0^2-$$

$$-\chi\left[\begin{array}{l}\bar{X}_0+\frac{\chi}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+1}{\sqrt{\Delta}-1}\right|+ \\ +2\chi\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right|\end{array}\right]\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+1}{\sqrt{\Delta}-1}\right|-$$

$$-\chi\left[2\bar{X}_0+\chi\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right|\right]\ln\left|\frac{\sqrt{\Delta}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{\Delta}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right|, \qquad (43)$$

где

$$\chi=\frac{\overline{X}_0(r^2-\beta^2)\left[\begin{array}{l}(\mu-\beta+1)\times \\ \times(\mu+\beta)e^{(\mu-\beta)t_1}-2\beta\end{array}\right]}{4(\mu^2-\beta^2)\sqrt{r-\beta+1}}e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}e^{-\beta t}.$$

Доказательство:

В результате подстановки (7) и (27) в (39) и последовательных преобразований получаем (43).

Заключение

Совместно с [1] проведено полное теоретическое исследование одной задачи формирования портфеля капитала как задачи оптимального управления стохастической системой с интегральным критерием качества.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.B37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Цитко А.В. Применение математического метода динамического программирования к решению одной задачи управления портфелем ценных бумаг // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 3. – С. 10–14.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
3. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 254 с.
4. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука. Физматлит, 1981. – 797 с.

Поступила 6.05.2013 г.