УДК 519. 644

## О НЕКОТОРЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ

Э.А. Шамсиев

Ташкентский государственный технический университет
E-mail: shamciev_tstu@mail.ru

*Построены кубатурные формулы (4р–1)-й и (4р+1)-й степени точности для вычисления интегралов по поверхности сферы четырехмерного пространства. Показано, что в полученных формулах достигнута максимально возможная алгебраическая степень точности. Также построены кубатурные формулы 4-й и 6-й степени точности.*

1. Рассмотрим в четырехмерном евклидовом пространстве $R^4$ группу $G_m$, полученную прямым произведением группы всех ортогональных преобразований правильного $m$-угольника на себя.

Известно [1], что кольцо инвариантных форм группы $G_m$ порождается базисными инвариантными формами

$$x_1^2+x_2^2,\ \Pi_m(x_1,x_2),\ x_3^2+x_4^2,\ \Pi_m(x_3,x_4),$$

где $\Pi_m$ – базисная инвариантная форма степени $m$ группы преобразований правильного $m$-угольника.

Определим условия, при выполнении которых для сферы $S_3=\{x\in R^4|\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$ существует кубатурная формула $(2m-1)$-й степени точности, инвариантная относительно группы $G_m$ [2. С. 130] вида

$$\int_{S_3} f(x)ds \cong \frac{\pi^2}{m^2}\sum_{n=0}^{1}\sum_{k=1}^{N}D_k\sum_{i,j=1}^{m} f(\sqrt{1-t_k}\times$$
$$\times\cos\frac{(2i-n)\pi}{m},\sqrt{1-t_k}\sin\frac{(2i-n)\pi}{m},$$
$$\sqrt{t_k}\cos\frac{(2j-n)\pi}{m},\sqrt{t_k}\sin\frac{(2j-n)\pi}{m}), \qquad (1)$$

где $D_k$ и $t_k$ определялись бы как параметры квадратурной формулы Гаусса или Гаусса-Маркова для отрезка [0,1] с постоянным весом

$$\int_0^1\varphi(t)dt\cong\sum_{k=1}^{N}D_k\varphi(t_k). \qquad (2)$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $m=2p$. Кубатурная формула (1) имеет алгебраическую степень точности $4p-1$, если (2) является квадратурной формулой Гаусса с $N=p$ узлами.

Теорема 2. Пусть $m=2p$. Кубатурная формула (1) имеет алгебраическую степень точности $4p-1$, если (2) является квадратурной формулой Гаусса-Маркова с $N=p+1$ узлом при $t_1=0$ и $t_{p+1}=1$.

Теорема 3. Пусть $m=2p+1$. Кубатурная формула (1) имеет алгебраическую степень точности $4p+1$, если (2) является квадратурной формулой Гаусса-Маркова с $N=p+1$ узлом при $t_1=0$ или $t_{p+1}=1$.

Доказательство. На поверхности сферы $S_3$ один из базисных инвариантных форм второй степени линейно выражается через второй, например: $x_1^2+x_2^2=1-(x_3^2+x_4^2)$.

Поэтому на $S_3$ линейно независимыми многочленами степени не выше $2m-1$, инвариантными относительно группы $G_m$, являются:

$$\Pi_m(x_1,x_2),\ \Pi_m(x_3,x_4),\ \Pi_m(x_1,x_2)(x_3^2+x_4^2)^l,$$
$$\Pi_m(x_3,x_4)(x_3^2+x_4^2)^l,\ (x_3^2+x_4^2)^q,\ l=0,1,2,...,\left[\frac{m-1}{2}\right],$$
$$q=0,1,2,...,m-1,\quad \text{где } \left[\frac{m-1}{2}\right] - \text{целая часть } \frac{m-1}{2}.$$

Подставляя в кубатурную формулу (1) вместо $f(x)$ многочлен $(x_3^2+x_4^2)^q$, при выполнении условий теорем 1–3, получаем точные равенства

$$\frac{2\pi^2}{q+1}=\frac{2\pi^2}{q+1}.$$

С другой стороны, подставляя в кубатурной формуле (1) вместо $f(x)$ многочлен $\Pi_m(x_3,x_4)$, получаем

$$\frac{2\pi}{m+2}\int_0^{2\pi}\Pi_m(\cos\varphi_3,\sin\varphi_3)d\varphi_3\cong\frac{2\pi^2}{m(m+2)}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{m}\left[\Pi_m\left(\cos\frac{2\pi j}{m},\sin\frac{2\pi j}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+\Pi_m(\cos\frac{(2j-1)\pi}{m},\sin\frac{(2j-1)\pi}{m})\right]. \qquad (3)$$

Сократив на $\frac{2\pi}{m+2}$, заметим, что (3) является формулой прямоугольников с числом узлов, равным $2m$, которая точна для всех многочленов степени не выше $2m$–1 и, следовательно, для многочлена $\Pi_m(x_3,x_4)$ тоже.

К аналогичному заключению придем, если в кубатурной формуле (1) вместо $f(x)$ подставим многочлены

$$\Pi_m(x_1,x_2),\ \Pi_m(x_1,x_2)(x_3^2+x_4^2)^l,\ \Pi_m(x_3,x_4)(x_3^2+x_4^2)^l.$$

$$l=0,1,2,...,\left[\frac{m-1}{2}\right].$$

Так как кубатурная формула (1) инвариантна относительно группы $G_m$ и точна для всех инвариантных многочленов степени не выше $2m$–1, то согласно теореме С.Л. Соболева, она имеет алгебраическую степень точности, равную $2m$–1. Теоремы доказаны.

Пусть $p$=1 и $m$=2 кубатурная формула (1) имеет третью степень точности и содержит 8 узлов, что совпадает с нижней границей для числа узлов [2. С. 203] (Теорема 1).

Пусть $p$=1 и $m$=3. Тогда кубатурная формула (1) имеет пятую степень точности и содержит 24 узла, что на 4 единицы превышает соответствующую нижнюю границу (Теорема 3).

Пусть $p$=2 и $m$=4. Тогда кубатурная формула (1) имеет алгебраическую степень точности, равную 7 и содержит 48 узлов, что на восемь единиц превышает соответствующую нижнюю границу (Теорема 2).

В общем случае построенные кубатурные формулы при более простой конструкции содержат в два раза меньше узлов, чем формулы аналогичной степени точности, получаемые методом повторного применения квадратурных формул.

Теорема 4. Не существует кубатурной формулы вида (1), алгебраическая степень точности которой была бы выше, чем $2m$–1.

Доказательство. Плоскости отражения группы $G_m$ задаются уравнениями [3]

$$\eta_k=x_1\sin\frac{k\pi}{m}-x_2\cos\frac{k\pi}{m}=0,$$

$$\eta_{m+k}=x_3\sin\frac{k\pi}{m}-x_4\cos\frac{k\pi}{m}=0,\ \ k=0,\,1,\,2,...,m-1.$$

Перемножая левые части первых $m$ уравнений и возводя в квадрат полученное выражение, получаем многочлен $P^2(x_1, x_2)$ степени $2m$. Этот многочлен неотрицателен $S_3$ и поэтому, интеграл от него по этой области положителен. С другой стороны, подставляя $P^2(x_1, x_2)$ в кубатурную формулу (1), получаем нулевое значение, так как узлами кубатурной формулы служат вершины и середины правильного $m$-угольника, лежащие на осях симметрии. Отсюда следует, сколь бы мы увеличивали число точек в формуле (1), она не будет давать точное значение многочлена $P^2(x_1, x_2)$.

Теорема доказана.

2. Можно построить и другие кубатурные формулы, инвариантные относительно группы $G_m$. Построим кубатурную формулу 4-й степени точности для $S_3$.

Линейно независимые инвариантные многочлены группы $G_3$ до 4-й степени таковы:

$$1,\ x_1^3-3x_1\ x_2^2,\ x_3^3-3x_3\ x_4^2,\ x_3^2+x_4^2,\ (x_3^2+x_4^2)^2. \qquad (4)$$

Кубатурную формулу 4-й степени точности будем искать в виде

$$\int_{S_3} f(x)ds \cong A_1\sum_{i=1}^{3} f(a^{(i)})+$$

$$+A_2\sum_{i=1}^{3} f(-a^{(i)})+B\sum_{i=1}^{3} f(b^{(i)})+C\sum_{j=1}^{9} f(c^{(j)}), \qquad (5)$$

где $a^{(1)}$=(1, 0, 0, 0), $b^{(1)}$=(0, 0, 1, 0), $c^{(1)}=(\sqrt{1-p^2}, 0, p, 0)$. Требуя, чтобы кубатурная формула (5) была точна для многочленов (4), получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3A_1+3A_2+3B+9C=2\pi^2 \\ 3A_1-3A_2+9\sqrt{1-p^2}(1-4p^2)C=0 \\ 3B+9p^3C=0 \\ 3B+9p^2C=\pi^2 \\ 3B+9p^4C=\dfrac{\pi^2}{2} \end{cases}.$$

Решая систему, находим

$$A_1=A_2=-\frac{\pi^2}{6},\ B=\frac{\pi^2}{9},\ C=\frac{8}{27}\pi^2,\ p=-\frac{1}{2}.$$

Следующая кубатурная формула 6-й степени точности инвариантна относительно группы $G_5$:

$$\int_{S_3} f(x)ds \cong \frac{(11\sqrt{6}-12)\pi^2}{60}\sum_{i=1}^{5} f(a^{(i)})-$$

$$-\frac{11\sqrt{6}\pi^2}{60}\sum_{i=1}^{5} f(-a^{(i)})+\frac{(9-\sqrt{3})\pi^2}{120}\sum_{i=1}^{5} f(b^{(i)})+$$

$$+\frac{(9+\sqrt{3})\pi^2}{120}\sum_{i=1}^{5} f(-b^{(i)})+\frac{9\pi^2}{100}\sum_{j=1}^{25} f(c^{(j)}).$$

Здесь $a^{(1)}$=(1,0,0,0), $b^{(1)}$=(0,0,1,0), $c^{(1)}=(\sqrt{\frac{2}{3}},0,\sqrt{\frac{1}{3}},0)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Носков М.В. Кубатурные формулы для приближенного интегрирования периодических функций / В кн.: Кубатурные формулы и функциональные уравнения. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – С. 15–24 (Методы вычислений. – Вып. 14).
2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
3. Игнатенко В.Ф. О плоских алгебраических кривых с осями симметрии // Укр. геометр. сборник. – 1978. – Вып. 21. – С. 31–33.