УДК 519.6

МУЛЬТИВЕЙВЛЕТ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Б.М. Шумилов, Э.А. Эшаров, А.Ж. Кудуев, У.С. Ыманов

Томский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: sbm@tsuab.ru; elzare@mail.ru
Ошский государственный университет, Кыргызская Республика
E-mail: altun_12@rambler.ru; ymanv8106@rambler.ru

Предложены два новых типа мультивейвлетов на основе эрмитовых сплайнов 5-й степени. Получен алгоритм вейвлет-разложения. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова:
Эрмитовы сплайны, вейвлеты, разложение.
Key words:
Hermitian splines, wavelets, decomposition.

Вейвлетом называется маленькая, т. е. короткая или быстро затухающая волна, множество сжатий и смещений которой порождает некоторое пространство ограниченных функций на всей числовой оси [1–4]. Если таких волн несколько, то возникают мультивейвлеты [5, 6].

В данной статье мы построим базисные мультивейвлеты на основе эрмитовых сплайнов пятой степени. При этом, наряду с классическим, рассмотрим неизвестный ранее тип «ленивых» мультивейвлетов и обоснуем новый подход к вычислению вейвлет-преобразования на основе конечных неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам.

Основой для построения вейвлет-преобразования является набор вложенных пространств $\ldots V_{L-1}\subset V_L\subset V_{L+1}\ldots$. В данном случае пространство V_L является пространством сплайнов степени 5 гладкости C^2 на отрезке $[a,b]$ с равномерной сеткой узлов Δ^L: $u_i=a+(b-a)\,i/2^L$, $i=0,1,\ldots,2^L$, $L\geq 0$, и базисными функциями $N^L_{i,k}(v)=\varphi_k(v-i)$, $k=0,1,2\,\forall i$, где $v=2^L(u-a)/(b-a)+1$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами трех функций вида [7]:

$$\begin{bmatrix}\varphi_0(t)\\ \varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\begin{bmatrix}t^3(6t^2-15t+10)\\ -t^3(3t^2-7t+4)\\ \dfrac{t^3}{2}(t^2-2t+1)\end{bmatrix},0\leq t\leq 1;\\ \begin{bmatrix}(2-t)^3(6t^2-9t+4)\\ (2-t)^3(3t^2-5t+2)\\ \dfrac{(2-t)^3}{2}(t^2-2t+1)\end{bmatrix},1\leq t\leq 2\end{array}\right\},$$

$$\varphi_k(t)=0,\ k=0,1,2,\ t\notin[0,2].$$

На любой сетке Δ^L, $L\geq 0$, интерполяционный эрмитов сплайн 5-й степени может быть представлен как

$$S^L(u)=\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=0}^{2^L}C_i^{L,k}N^L_{i,k}(u),\quad a\leq u\leq b, \tag{1}$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k=0,1,2$, являются значениями и, соответственно, первыми и вторыми производными аппроксимируемой функции в узлах.

Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений и локальных уточняющих подробностей. При этом «более грубый» уровень представления функции в V_{L-1} получается из «более подробного» уровня представления функции в V_L посредством прореживания (удаления каждого второго, как правило, отсчета). Здесь необходимо лишь, чтобы каждая базисная функция в V_{L-1} могла быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L. В частности, двухмасштабное соотношение для эрмитовых сплайнов 5-й степени можно записать в виде следующей векторной формулы [5]:

$$\begin{bmatrix}\varphi_0(t)\\ \varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{2}H_k\begin{bmatrix}\varphi_0(2t-k)\\ \varphi_1(2t-k)\\ \varphi_2(2t-k)\end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$H_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{15}{16} & 0\\ -\frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{16}\end{bmatrix},\ H_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$H_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{15}{16} & 0\\ \frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & -\frac{3}{8}\\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{16}\end{bmatrix}.$$

В этом случае базисными функциями для V_{L-1} будут функции $N^{L-1}_{i,k}$, с носителями в два раза большими по ширине и центрами в четных целых числах. Следующим этапом является определение пространства уточняющих подробностей W_{L-1}. В отличие от классического определения вейвлетов, мы не требуем, чтобы базисные функции из W_{L-1} были ортогональны базисным функциям в V_{L-1}. Вместо этого просто потребуем, чтобы пространство W_{L-1} являлось дополнением V_{L-1} до V_L. Следовательно, любая функция в V_L может быть записана в виде суммы некоторой функции в V_{L-1} и некоторой функции в W_{L-1}. Очень простой способ получения базисных функций в W_{L-1} заключается в использовании функций $N_{i,k}^L$ в V_L с центрами в нечетных целых числах [3].

Для облегчения выполнения дальнейших действий удобно записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки $\varphi^L=[N_{0,0}^L,N_{0,1}^L,N_{0,2}^L,N_{1,0}^L,N_{1,1}^L,...,N_{2^L,2}^L]$ и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора $C^L=[C_0^{L,0},C_0^{L,1},C_0^{L,2},C_1^{L,0},C_1^{L,1},...,C_{2^L}^{L,2}]^T$. Тогда уравнение (1) переписывается как $S^L(u)=\varphi^L(u)C^L$. Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции как $M_{i,k}^{L-1}=\varphi_k(v-2i+1)$, $k=0,1,2$, $i=1,2,...,2^{L-1}$, и запишем их в виде матрицы-строки $\psi^L=[M_{1,0}^L,M_{1,1}^L,M_{1,2}^L,...,M_{2^L,2}^L]$. Соответствующие коэффициенты вейвлет-разложения на уровне разрешения L будем собирать в вектор $D^L=[D_1^{L,0},D_1^{L,1},D_1^{L,2},...,D_{2^L}^{L,2}]^T$.

Тогда для уровня разрешения $L-1$ можно записать функции φ^{L-1} и ψ^{L-1} в виде линейных комбинаций функций φ^L, $\varphi^{L-1}=\varphi^L P^L$ и $\psi^{L-1}=\varphi^L Q^L$, где блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов соотношений (2), так как каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям интервала из двух, троек узких базисных функций, тогда как все элементы столбцов матрицы Q^L – нули, за исключением единственной единицы, так как каждый ленивый вейвлет – это одна узкая базисная функция.

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\varphi^L C^L=\varphi^{L-1}C^{L-1}+\psi^{L-1}D^{L-1}=\varphi^L P^L C^{L-1}+\varphi^L Q^L D^{L-1}.$$

Таким образом, процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как $C^L=P^L C^{L-1}+Q^L D^{L-1}$ или, используя обозначения для блочных матриц,

$$C^L=[P^L\,|\,Q^L]\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right]. \qquad (3)$$

Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (3). Для данного случая блоки матрицы $[A^L|B^L]$, обратной по отношению к $[P^L|Q^L]$, являются разреженными. Поэтому процесс создания версии с низшим разрешением, C^{L-1}, характеризуемой меньшим количеством коэффициентов, можно выразить в явном виде с помощью матричного равенства $C^{L-1}=A^L C^L$. При этом потерянные детали собираются в другой вектор D^{L-1}, определяемый выражением $D^{L-1}=B^L C^L$.

При выполнении анализа заданной функции в соответствии с полученным выше результатом грубое приближение получается из более точного путем исключения узлов, соответствующих нечетным числам. Следовательно, самое грубое приближение зависит только от нескольких начальных значений, и оно может оказаться очень плохим приближением исходной функции. Чтобы улучшить усредняющие свойства представленного метода анализа данных, мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов для W_{L-1} функции $N_{i,k}^L$ в V_L с центрами в четных целых числах. Поскольку W_{L-1} должно являться дополнением V_{L-1} в V_L, размерности этих пространств должны удовлетворять соотношению $\mathrm{Dim}(V_L)=\mathrm{Dim}(V_{L-1})+\mathrm{Dim}(W_{L-1})$. Для выполнения этого условия мы предлагаем из исходных координат вычитать уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю вершины при дополнительном условии, что вторая производная в последней точке обращается в нуль.

Будем обозначать базисные сплайн-функции и коэффициенты эрмитового сплайна 5-й степени с отсутствующими элементами по концам отрезка аппроксимации как φ_0^L и C_0^L. Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции как $M_{i,k}^{L-1}=\varphi_k(v-2i)$, $k=0,1,2$, $i=0,1,...,2^{L-1}$ и запишем их в виде матрицы-строки

$$\psi_0^L=\begin{bmatrix} M_{0,1}^L, M_{0,2}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, M_{1,2}^L, ..., \\ ..., M_{2^L-1,0}^L, M_{2^L-1,1}^L, M_{2^L-1,2}^L, M_{2^L,1}^L \end{bmatrix}.$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты на уровне разрешения L будем собирать в вектор

$$D_0^L=\begin{bmatrix} D_0^{L,1}, D_0^{L,2}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, D_1^{L,2}, ..., \\ ..., D_{2^L-1}^{L,0}, D_{2^L-1}^{L,1}, D_{2^L-1}^{L,2}, D_{2^L}^{L,1} \end{bmatrix}^T.$$

В результате вейвлет-преобразование может быть записано как

$$C_0^L=[P_0^L\,|\,Q_0^L]\left[\frac{C_0^{L-1}}{D_0^{L-1}}\right]. \qquad (4)$$

Нетрудно проверить, что матрицы, обратные по отношению к $[P_0^L|Q_0^L]$, теряют разреженную структуру. Поэтому систему линейных уравнений (4) приходится решать численно. При этом матрицу $[P_0^L|Q_0^L]$ удобно сделать ленточной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P_0^L и Q_0^L перемежались [3]. Тем не менее, хотя разрешимость полученной системы и гарантирована линейной независимостью базисных функций, вопрос ее хорошей обусловленности остается открытым. В [6] для частного случая кубических эрмитовых сплайн-вейвлетов с помощью метода неопределенных коэффициентов были впервые получены конечные неявные соотношения разложения. В матричном виде полученные результаты можно представить следующим равенством $[P_0^L|Q_0^L]R^L=G^L$, где матрица R^L представляет собой простую ленточную матрицу, а матрица G^L – трехдиагональную матрицу со строгим диагональным преобладанием. После этого решение системы уравнений типа (4) можно записать в матричном виде как [8]:

$$\left[\frac{C_0^{L-1}}{D_0^{L-1}}\right]=[P_0^L\,|\,Q_0^L]^{-1}C_0^L=R^L(G^L)^{-1}C_0^L, \qquad (5)$$

т. е. решение сводится к трехдиагональной системе линейных уравнений. Для представленного выше типа мультивейвлетов, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, справедливы аналогичные равенства, например,

$$[P_0^1 \,|\, Q_0^1]\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0\\ 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 & 0\\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -7 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 12 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[P_0^2 \,|\, Q_0^2]^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{106}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{111}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & \frac{1}{16} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{99}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & \frac{111}{16} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -150 & -16 & -168 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1260 & 0 & -1960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 30 & -8 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 180 & -48 & 76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 64 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 75 & 8 & 84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 315 & 0 & 490 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -16 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -15 & 4 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -45 & 12 & -19 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & -16 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \textbf{(6)}$$

Следующее утверждение дает последовательность вычисления коэффициентов вейвлет-анализа по известным коэффициентам сплайн-разложения на любом уровне разрешения L, $L\geq 2$.

Теорема 1. Пусть значения сплайн-коэффициентов $C_i^{L,2}$, $C_i^{L,0}$ и $C_i^{L,1}$ в нечетных узлах пересчитаны из последовательного решения трех систем линейных уравнений, соответственно, вида

$$\begin{bmatrix} \frac{99}{2} & -4 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & -4 & \frac{111}{2} & \ddots & \\ & & \frac{111}{2} & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & \ddots & -4\\ & & & \ddots & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1^{L,2}\\ C_3^{L,2}\\ \vdots\\ C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} C_1^{L,2}\\ C_3^{L,2}\\ \vdots\\ C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{53}{4} & 8 & \frac{1}{8} & & \\ \frac{1}{8} & 8 & \frac{111}{8} & \ddots & \\ & & \frac{111}{8} & \ddots & \\ & & \frac{1}{8} & \ddots & 8\\ & & & \ddots & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1^{L,0}\\ C_3^{L,0}\\ \vdots\\ C_{2^L-1}^{L,0} \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} C_1^{L,0}-C_1^{L,2}\\ C_3^{L,0}-C_1^{L,2}\\ C_5^{L,0}\\ \vdots\\ C_{2^L-3}^{L,0}-C_{2^L-1}^{L,2}\\ C_{2^L-1}^{L,0}-C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{111}{16} & \frac{1}{16} & & \\ \frac{1}{16} & \frac{55}{8} & \ddots & \\ & \frac{1}{16} & \ddots & \frac{1}{16}\\ & & \ddots & \frac{111}{16} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1^{L,1}\\ C_3^{L,1}\\ \vdots\\ C_{2^L-1}^{L,1} \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} C_1^{L,1}+15C_1^{L,0}+C_1^{L,2}\\ C_3^{L,1}-15C_1^{L,0}-C_1^{L,2}\\ C_5^{L,1}\\ \vdots\\ C_{2^L-3}^{L,1}+15C_{2^L-1}^{L,0}+C_{2^L-1}^{L,2}\\ C_{2^L-1}^{L,1}-15C_{2^L-1}^{L,0}-C_{2^L-1}^{L,2} \end{bmatrix}.$$

Здесь точки, расставленные по диагонали, означают, что предшествующий столбец повторяется соответствующее число раз, сдвигаясь при этом вниз на одну позицию.

Тогда вектор сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} представляет собой результат умножения матрицы

$$\begin{bmatrix} -150 & -16 & -168 & & & & & & & & & & \\ -1260 & 0 & -1960 & & & & & & & & & & \\ 4 & -1 & 2 & 16 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & & & & \\ 30 & -8 & 14 & 0 & -8 & 0 & -30 & 0 & -14 & \ddots & & & \\ 180 & -48 & 76 & 0 & 48 & 64 & 180 & 0 & 76 & \ddots & & & \\ & & & & -1 & 0 & 20 & 1 & 24 & \ddots & & & \\ & & & & -8 & 0 & 0 & -8 & 0 & \ddots & & & \\ & & & & -48 & 0 & -360 & 48 & -1048 & \ddots & & & \\ & & & & & & 4 & -1 & 2 & \ddots & 16 & 1 & 0\\ & & & & & & 30 & -8 & 14 & \ddots & 0 & -8 & 0\\ & & & & & & 180 & -48 & 76 & \ddots & 0 & 48 & 64\\ & & & & & & & & & \ddots & 0 & -16 & 0 \end{bmatrix}$$

на вектор $[C_1^{L,0},C_1^{L,1},C_1^{L,2},\ldots,C_{2^L-1}^{L,2}]^T$ сплайн-коэффициентов в нечетных узлах густой сетки Δ^L, тогда как вектор вейвлет-коэффициентов равен такому же произведению с матрицей

$$\begin{bmatrix} 75 & 8 & 84 & & & & & & & & & & \\ 315 & 0 & 490 & & & & & & & & & & \\ -4 & 1 & -2 & -16 & -1 & 0 & -4 & 0 & -2 & & & & \\ -15 & 4 & -7 & 0 & 4 & 0 & 15 & 0 & 7 & \ddots & & & \\ -45 & 12 & -19 & 0 & -12 & -16 & -45 & 0 & -19 & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 0 & -20 & -1 & -24 & \ddots & & & \\ & & & & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & \ddots & & & \\ & & & & 12 & 0 & 90 & -12 & 262 & \ddots & & & \\ & & & & & & -4 & 1 & -2 & \ddots & -16 & -1 & 0\\ & & & & & & -15 & 4 & -7 & \ddots & 0 & 4 & 0\\ & & & & & & -45 & 12 & -19 & \ddots & 0 & -12 & -16\\ & & & & & & & & & \ddots & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

при условии добавления к результату вектора $[C_0^{L,1},C_0^{L,2},C_2^{L,0},C_2^{L,1},C_2^{L,2},\ldots,C_{2^L}^{L,1}]^T$ сплайн-коэффициентов в четных узлах густой сетки. Здесь точки, расставленные по диагонали, означают, что предшествующие три столбца повторяются соответствующее число раз, опускаясь при этом вниз на три ряда.

Доказательство. Согласно построению, на каждых m внутренних шагах сетки Δ^L перекрываются по $3(m-1)$ широких базисных функций и вейвлетов и $3(2m-1)$ узких базисных функций. Поэтому после соответствующего изменения нумерации узлов на отрезке $[0,\, m]$ можно записать следующие три конечных неявных соотношения разложения:

$$\sum_{i=0}^{2m-2} a_i^k \varphi_k(2x-i)=$$

$$=\sum_{l=0}^{2}\sum_{j=0}^{m-2}\left(b_j^{kl}\varphi_l(2x-1-2j)+c_j^{kl}\varphi_l(x-j)\right),\ k=0,1,2, \quad (7)$$

где $\varphi_k(2x-i)$ – эрмитовы базисные сплайны на густой сетке; $\varphi_l(x-j)$ – эрмитовы базисные сплайны на прореженной сетке, $\varphi_l(2x-1-2j)$ – базисные вейвлеты на прореженной сетке.

Тогда для вычисления неопределенных коэффициентов соотношения (7) при $k=0$ с использованием табл. 1 и легко проверяемых равенств $\frac{d^k}{dt^k}\varphi_l(2t)=2^l\cdot\delta_k^l,\ t=\frac{1}{2},\ k,l=0,1,2,$ имеем, соответственно, в точках

$$x=\frac{1}{2}:\ a_0^0=c_0^{00}\frac{1}{2}+c_0^{01}\left(-\frac{5}{32}\right)+c_0^{02}\frac{1}{64},$$

$$0=c_0^{00}\frac{15}{8}+c_0^{01}\left(-\frac{7}{16}\right)+c_0^{02}\frac{1}{32},$$

$$0=c_0^{01}\frac{3}{2}+c_0^{02}\left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$x=1:\ a_1^0=b_0^{00}+c_0^{00},$$

$$0=b_0^{01}\cdot 2+c_0^{01},$$

$$0=b_0^{02}\cdot 4+c_0^{02},$$

$$x=\frac{3}{2}:\ a_2^0=c_0^{00}\frac{1}{2}+c_0^{01}\frac{5}{32}+c_0^{02}\frac{1}{64}+c_1^{00}\frac{1}{2}+$$

$$+c_1^{01}\left(-\frac{5}{32}\right)+c_1^{02}\frac{1}{64},$$

$$0=c_0^{00}\left(-\frac{15}{8}\right)+c_0^{01}\left(-\frac{7}{16}\right)+c_0^{02}\left(-\frac{1}{32}\right)+$$

$$+c_1^{00}\frac{15}{8}+c_1^{01}\left(-\frac{7}{16}\right)+c_1^{02}\frac{1}{32},$$

$$0=c_0^{01}\left(-\frac{3}{2}\right)+c_0^{02}\left(-\frac{1}{4}\right)+c_1^{01}\frac{3}{2}+c_1^{02}\left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$\vdots$$

$$x=m-1:\quad a_{2m-3}^0=b_{m-2}^{00}+c_{m-2}^{00},$$

$$0=b_{m-2}^{01}\cdot 2+c_{m-2}^{01},$$

$$0=b_{m-2}^{02}\cdot 4+c_{m-2}^{02},$$

$$x=\frac{2m-1}{2}:a_{2m-2}^0=c_{m-2}^{00}\frac{1}{2}+c_{m-2}^{01}\frac{5}{32}+c_{m-2}^{02}\frac{1}{64},$$

$$0=c_{m-2}^{00}\left(-\frac{15}{8}\right)+c_{m-2}^{01}\left(-\frac{7}{16}\right)+c_{m-2}^{02}\left(-\frac{1}{32}\right),$$

$$0=c_{m-2}^{01}\left(-\frac{3}{2}\right)+c_{m-2}^{02}\left(-\frac{1}{4}\right).$$

Одно из решений полученной системы уравнений имеет вид: $a^0_{2j+1}=b^0_j=1$, $j=0,\ldots,m-2$, при условии, что все остальные коэффициенты равны нулю. Это означает, что в нечетных узлах выполняются тождества для базисных сплайн-вейвлетов $\varphi_0(2x-1-2j)$.

Попытаемся найти систему уравнений, связывающую коэффициенты разложения для четных узлов (случай, когда $a^0_1=a^0_3=\ldots=a^0_{2m-3}=0$). При $m=2$, 3 нетрудно убедиться, что система имеет только тривиальное решение. При $m=4$ решение имеет вид: $a^0_1=a^0_3=a^0_5=b^{01}_1=c^{01}_1=0$, $b^{00}_0=b^{00}_2=-4$, $b^{00}_1=-20$, $b^{01}_0=-15$, $b^{01}_2=15$, $b^{02}_0=b^{02}_2=-45$, $b^{02}_1=90$, $c^{00}_0=c^{00}_2=4$, $c^{00}_1=20$, $c^{01}_0=30$, $c^{01}_2=-30$, $c^{02}_0=c^{02}_2=180$, $c^{02}_1=-360$, $a^0_0=a^0_6=1/8$, $a^0_2=a^0_4=111/8$.

Таким образом, из соотношения (7) выделяется неявное четырехчленное разложение вида

$$\frac{\varphi_0(2x)+111\varphi_0(2x-2)+111\varphi_0(2x-4)+\varphi_0(2x-6)}{8}=$$

$$=4\begin{pmatrix}\varphi_0(x)+5\varphi_0(x-1)+\varphi_0(x-2)-\\ -\varphi_0(2x-1)-5\varphi_0(2x-3)-\varphi_0(2x-5)\end{pmatrix}+$$

$$+15(2\varphi_1(x)-2\varphi_1(x-2)-\varphi_1(2x-1)+\varphi_1(2x-5))+$$

$$+180(\varphi_2(x)-2\varphi_2(x-1)+\varphi_2(x-2))-$$

$$-45(\varphi_2(2x-1)-2\varphi_2(2x-3)+\varphi_2(2x-5)).$$

Таблица. *Значения базисных функций и их производных в точках отрезка [0,2]*

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi'_0(x)$	$\varphi''_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi'_1(x)$	$\varphi''_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi'_2(x)$	$\varphi''_2(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/2	1/2	15/8	0	−5/32	−7/16	3/2	1/64	1/32	−1/4
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
3/2	1/2	−15/8	0	5/32	−7/16	−3/2	1/64	−1/32	−1/4
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Совершенно аналогично с помощью табл. 1 нетрудно убедиться, что для эрмитовых базисных сплайнов первых производных на густой сетке справедливо неявное трехчленное разложение вида

$$\frac{\varphi_1(2x)+110\varphi_2(2x-2)+\varphi_2(2x-4)}{16}=$$

$$\varphi_0(2x-1)-\varphi_0(2x-3)-\varphi_0(x)+\varphi_0(x-1)+$$

$$+4(\varphi_1(2x-1)+\varphi_1(2x-3)-2\varphi_1(x)-2\varphi_1(x-1))+$$

$$12(\varphi_2(2x-1)-\varphi_2(2x-3)-4\varphi_2(x)+4\varphi_2(x-1)),$$

а для базисных сплайнов вторых производных имеет место неявное четырехчленное разложение вида

$$\frac{\varphi_2(2x)+111\varphi_2(2x-2)+111\varphi_2(2x-4)+\varphi_2(2x-6)}{8}=$$

$$2\begin{pmatrix}\varphi_0(x)+12\varphi_0(x-1)+\varphi_0(x-2)-\\ -\varphi_0(2x-1)-12\varphi_0(2x-3)-\varphi_0(2x-5)\end{pmatrix}+$$

$$+7(2\varphi_1(x)-2\varphi_1(x-2)-\varphi_1(2x-1)+\varphi_1(2x-5))+$$

$$+38\varphi_2(x)-524\varphi_2(x-1)+38\varphi_2(x-2)-$$

$$19\varphi_2(2x-1)+262\varphi_2(2x-3)-19\varphi_2(2x-5).$$

Соответствующие разложения по краям отрезка аппроксимации содержатся в матричном равенстве (6). Введем последовательности матриц G^L и R^L, блоки которых составлены из коэффициентов левых и правых частей полученных разложений, соответственно. В результате находим, что базисные функции пространства эрмитовых сплайнов 5-й степени на густой сетке, базисные функции на прореженной сетке и вейвлеты удовлетворяют равенству $\varphi_0^L G^L=[\varphi_0^{L-1}|\psi_0^{L-1}]\,R^L$, $L\geq 2$.

Отсюда, используя свойство дополнения пространства вейвлетов, находим

$$[\varphi_0^{L-1} \mid \psi_0^{L-1}]\left[\frac{C_0^{L-1}}{D_0^{L-1}}\right] = \varphi_0^L C_0^L =$$
$$= [\varphi_0^{L-1} \mid \psi_0^{L-1}] R^L (G^L)^{-1} C_0^L.$$

После этого решение системы уравнений (4) можно записать в виде (5), откуда после расщепления по четным и нечетным узлам вытекает утверждение Теоремы 1.

Пример. Рассмотрим в качестве тестовой функции функцию Хартена:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(3\pi x), & x \le \frac{1}{3}, \\ \left|\sin(4\pi x)\right|, & \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2}\sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Начиная с верхнего уровня разрешения L=5, то есть при числе разбиений $n=2^L=32$, на интервале $0 \le x \le 1$ с длиной шага $\Delta x = 1/n$ находим последовательно, при L=5: D_0^4=[–5,856, –88,1, 3,295, 5,904, –25,81, 14,12, 2,663, –173,8, 8,263, –1,359, –83,65, 11,54, –4,808, –144,9, 2,226, –19,38, 60,93, 66,25, 0,1275, –855,7, 6,406, –8,153, 0,7788, 23,93, –12,57, –352, 6,406, 8,153, 0,7788, 66,25, –0,1276, –855,7, 2,029, 10,15, 78,23, –8,348, –5,076, 95,12, –11,52, –1,357, 132,6, –10,86, 2,664, 124,9, –6,528, 5,788, 75,11, 6,961]^T; L=4: D_0^3=[–407,3, –2522, –121,3, 15,31, 2087, 44,06, –29,11, –313,5, 17,2, –9,35, 2376, 127,6, –0,003728, –3,504, 17,1, 9,76, 2375, 74,52, –8,945, –885,9, 93,62, 10,86, –1204, 28,64]^T; L=3: D_0^2=[–13980, –80860, –1099, 986, 23240, 459,8, –10,01, –5093, –1401, 235,3, 19260, –802,2]^T; L=2: D_0^1=[–11760, 225000, 27040, 1022, –262700, 15090]^T; L=1: на последнем шаге остается три коэффициента разложения производных на концах интервала C_0^0=[–3,871·10^6, –4,625·10^7, 5,768·10^5]^T и три вейвлет-коэффициента D_0^0=[2,018·10^6, 1,214·10^7, –3,156·10^5]^T.

При условии обнуления незначимых вейвлет-коэффициентов D_0^2(6),D_0^3(3), ...,D_0^4(48) итоговый коэффициент сжатия равняется 3*33/(96–32)=99/64=1,55.

Несложно предложить параллельную реализацию представленного в статье алгоритма вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов 5-й степени, в которой три прямых хода прогонки выполняются независимо, а три обратных хода выполняются с максимальным запаздыванием на два такта. Это позволит преодолеть некоторое отставание в вычислительной эффективности вейвлет-алгоритмов в сравнении с универсальными алгоритмами сжатия [9].

Работа выполнена при поддержке РФФИ 13-01-90900 мол_ин_нр, 13-07-90900 мол_ин_нр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты / пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике / пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
4. Исаев Ю.Н. Конструирование биортогональных вэйвлет-базисов для оптимального представления сигналов // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 1. – С. 37–42.
5. Strela V. Multiwavelets: Theory and Applications. – Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1996. – 99 p.
6. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 260–266.
7. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
8. Шумилов Б.М. Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Механика. – 2010. – № 4 (12). – С. 45–55.
9. Замятин А.В., То Динь Чыонг. Повышение эффективности трехэтапного алгоритма сжатия многозональных аэрокосмических изображений // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313. – № 5. – С. 24–28.

Поступила 09.01.2013 г.