УДК 517.988.8

ФУНКЦИЯ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИОНАЛ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

И.В. Корытов

Томский политехнический университет
E-mail: korytov@tpu.ru

Для произвольной функции из пространства Соболева, нормируемого с использованием производных всех порядков вплоть до заданного наивысшего, строится представление функционала погрешности кубатурной формулы. В отличие от работ, посвященных вопросу построения представлений функционалов через суммируемые функции, пространство Соболева здесь нормируется без использования псевдодифференциальных операторов. Доказывается существование, единственность и суммируемость представляющей функции. Ни норма, ни представление функционала не совпадают с описанными ранее ни при каком значении наибольшего порядка производных функций рассматриваемого класса.

Ключевые слова:
Кубатурная формула; функционал погрешности; негильбертово пространство; представление функционала; локально суммируемая функция.

Key words:
Cubature formula; error functional; non-Hilbert space; representation of functional; locally summable function.

Введение

Функционально-аналитический подход к задаче априорной оценки погрешности численного интегрирования, реализуемый в данной работе, впервые был применен С.Л. Соболевым [1, 2]. В рамках данного подхода погрешность рассматривается как линейный ограниченный функционал над некоторым банаховым пространством основных функций. Функционал представляет собой разность неизвестного приближаемого интеграла и кубатурной суммы. В качестве основной выступает подынтегральная функция, а обобщенной – разность характеристической функции области интегрирования и линейной комбинации дельта-функций. Последняя обеспечивает значения функции в узлах интегрирования. Для существования таких значений необходимо выполнение условия непрерывности основной функции, что достигается дополнительным ограничением – вложением основного банахова пространства в пространство непрерывных функций.

При функциональном подходе в самостоятельную выделяется задача о представлении функционала в основном пространстве через локально суммируемую функцию. Иными словами, требуется доказать, что функционал погрешности кубатурной формулы является регулярной обобщенной функцией. В дальнейшем такое представление используется для нахождения нормы функционала, которая уже непосредственно определяет границы погрешности приближения. В данных условиях функция, представляющая функционал, является решением некоторого дифференциального уравнения в обобщенных функциях. Оператор этого уравнения напрямую зависит от вида нормы основного пространства. Из наиболее близких к нашей по содержанию отметим работы С.Л. Соболева, В.И. Половинкина, Ц.Б. Шойнжурова [1–6].

С.Л. Соболев выполнил построение представления функционала погрешности кубатурной формулы для пространства $L_2^{(m)}$ – факторизации по множеству полиномов степени не выше m пространства функций, суммируемых вместе со всеми производными в степени 2. Пространство благодаря показателю $p=2$ является гильбертовым, и функция, реализующая в нем функционал, принадлежит тому же пространству, что и функция, на которой данный функционал строится. Первые публикации на эту тему в настоящее время доступны в издании [1].

В.И. Половинкин занимался исследованием этого вопроса в пространстве с произвольным показателем суммируемости $L_p^{(m)}$, $1<p<\infty$. Показатель $p\neq 2$ переводит пространство Соболева и его факторизацию в статус негильбертовых. Реализующая представление функция в таком случае принадлежит пространству с сопряженным показателем суммируемости $L_q^{(m)}$, $1/p+1/q=1$. Некоторые из результатов приведены в работах [3–5]. Во всех упомянутых выше исследованиях дифференциальное уравнение было полигармоническим $\Delta^m=l$, и его фундаментальное решение, дифференциальные свойства, а также оценки производных в окрестности начала координат и на бесконечности описаны в [2].

В пространстве же Соболева $W_p^{(m)}$, нормированном с участием производных всех порядков, оператор содержит сумму операторов Лапласа с возрастанием порядка, и нахождение фундаментального решения такого уравнения представляет значительную трудность, так как требует нахождения несобственного интеграла от функции нескольких комплексных переменных. Поскольку уравнение строится на основе нормы основного пространства, то задача решается обычно подбором такой нормы, чтобы фундаментальное решение соответствуюго уравнения было известным. Ц.Б. Шойнжуров получил представление функционала в пространстве Соболева, введя норму, построенную на преобразовании Фурье известного фундаментального решения [6]. Таким образом, построенный на интегральном преобразовании оператор, указывающий наличие в составе нормы производных основной функции заданных порядков, является псевдодифференциальным.

В данной работе в отличие от [6] норма определена таким образом, что при ее построении не используются псевдодифференциальные операторы.

Исходные положения

Основные функции $\varphi(x)$ нескольких действительных переменных $x^T=(x_1,\dots,x_n)$ образуют пространство Соболева $W_p^{(m)}(R_n)$ с нормой

$$\left\|\varphi\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\| = \\ = \left(\int\limits_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi\right|^p dx\right)^{1/p}. \qquad (1)$$

Функционал погрешности кубатурной формулы

$$\langle l,\varphi\rangle = \int\limits_{R_n}\left(\chi_\Omega(x)-\sum_{k=0}^{N}c_k\delta(x-x^{(k)})\right)\varphi(x)dx$$

является финитным: $\exists r>0:\mathrm{supp}\,l\subset B(a,r)$. Здесь $B(a,r)$ – шар с центром $a\in R_n$ и радиусом r; c_k – коэффициенты и $x^{(k)}$ – узлы кубатурной формулы; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Область интегрирования ограничена $\Omega\subset B(a,r)$ и представлена в функционале характеристической функцией

$$\chi_\Omega(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega,\\ 0, & x\notin\Omega.\end{cases}$$

На параметры пространства $W_p^{(m)}(R_n)$ накладываются ограничения

$$pm>n,\quad 1<p<\infty,\quad 1/p+1/q=1. \qquad (2)$$

Первое из них обеспечивает вложение пространства Соболева с нормой (1) в пространство непрерывных функций, второе – равномерную выпуклость единичной сферы.

Локальная суммируемость функций предполагает суммируемость на любом подмножестве Ω^* ограниченного множества $\Omega\subset R_n$. Известно [7], что всякая глобально суммируемая в Ω функция является также и локально суммируемой. Сказанное верно и в случае, если область глобальной суммируемости расширяется до R_n.

Преобразование Фурье, применяемое ниже для решения дифференциального уравнения в обобщенных функциях, требует, чтобы областью их определения было пространство R_n. Однако функции, от которых вычисляется кратный интеграл, могут, в том числе, быть определены только внутри области интегрирования и не определены вне ее, или могут быть определены на R_n, но их поведение может быть неизвестным за пределами этой области. В таком случае утверждения, доказанные в данной работе, будут верными и для таких функций, если рассматривать их как совпадающие на области интегрирования с функциями, определенными на R_n и принадлежащими $W_p^{(m)}(R_n)$ с минимальной нормой (1).

Существование представляющей функции

В данном пункте будет показано, что представление функционала существует и реализуется некоторой функцией, локально суммируемой в степени q вместе со всеми своими частными производными.

Теорема 1. Существует функция $\psi\in W_q^{(m)}(R_n)$, реализующая на произвольной функции $\psi\in W_p^{(m)}(R_n)$ с нормой (1) при условиях (2) данный линейный функционал в виде

$$\langle l,\varphi\rangle = \int\limits_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha\psi D^\alpha\varphi dx. \qquad (3)$$

Норма функционала при этом равна норме функции ψ: $\|l|W_p^{(m)*}(R_n)\|=\|\psi|W_q^{(m)}(R_n)\|$.

Доказательство. Последовательное применение неравенств Гельдера к выражению (3)

$$\left|\langle l,\varphi\rangle\right| \le \left(\int\limits_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi\right|^q dx\right)^{1/q}\times \\ \times\left(\int\limits_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi\right|^p dx\right)^{1/p}$$

приводит к оценке

$$\left|\langle l,\varphi\rangle\right| \le \left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|\left\|\varphi\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|,$$

что означает, *во-первых*, ограниченность функционала, *во-вторых*, необходимость принадлежности функции ψ пространству $W_q^{(m)}(R_n)$, откуда

$$\frac{\left|\langle l,\varphi\rangle\right|}{\left\|\varphi\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|} \le \left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|.$$

Далее, поскольку правая часть неравенства не зависит от функций $\varphi\in W_p^{(m)}(R_n)$, и неравенство верно для всех таких функций, то

$$\sup_{\varphi\ne 0}\frac{\left|\langle l,\varphi\rangle\right|}{\left\|\varphi\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|} \le \left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|,$$

что согласно определению нормы функционала дает

$$\left\|l\left|W_p^{(m)*}(R_n)\right.\right\| \le \left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|. \qquad (4)$$

Для построения обратного неравенства предположим существование функции θ, удовлетворяющей равенствам

$$D^\alpha\theta = \left|D^\alpha\psi\right|^{1/(p-1)}\mathrm{sign}\,D^\alpha\psi,\quad \forall|\alpha|\le m. \qquad (5)$$

Функционал, формально построенный на такой функции, будет равен

$$\langle l,\theta\rangle=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha\psi D^\alpha\theta dx=$$

$$=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^\alpha\psi\left|D^\alpha\psi\right|^{1/(p-1)}\operatorname{sign}D^\alpha\psi dx=$$

$$=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi\right|\left|D^\alpha\psi\right|^{1/(p-1)}dx=$$

$$=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi\right|^{p/(p-1)}dx=$$

$$=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi\right|^{q}dx=\left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|^q. \quad (6)$$

Согласно (5)

$$D^\alpha\psi=\left|D^\alpha\theta\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\theta,\ \forall|\alpha|\le m.$$

Известно [2], что для любой $f\in L_p$, $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$, функция $|f|^{p-1}\operatorname{sign}f\in L_q$.

Так как $\psi\in W_q^{(m)}$, то $D^\alpha\psi\in L_q$, следовательно, $D^\alpha\theta\in L_p$, $\alpha\le m$, и $\theta\in W_p^{(m)}$.

Таким образом, для нормы функции θ, в предположении, что эта функция существует, верно равенство

$$\left\|\theta\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|^p=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\theta\right|^p dx=$$

$$=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|\left|D^\alpha\psi\right|^{1/(p-1)}\operatorname{sign}D^\alpha\psi\right|^p dx=$$

$$=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi\right|^{p/(p-1)}dx=$$

$$=\left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|^q. \quad (7)$$

Далее будем рассматривать интегралы из (7), т. е. p и q степени ($p>1$ и $q>1$, $1/p+1/q=1$) норм функций в основных пространствах как нелинейные функционалы, заданные на этих пространствах

$$F(f)=\left\|f\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|^p,\quad G(g)=\left\|g\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|^q.$$

Покажем, что для непрерывного ограниченного функционала существует функция, для которой выполняются соотношения (5)–(7) при всех значениях мультииндекса.

Пусть f_k – последовательность функций из пространства $W_p^{(m)}(R_n)$, сходящаяся по норме к функции f, т. е. $\|f_k-f\|\to0$, $k\to\infty$. Тогда из неравенства Минковского в аксиомах нормы следует

$$|F(f_k)-F(f)|=|\,\|f_k\|^p-\|f\|^p|\le\|f_k-f\|^p\to0,\ k\to\infty,$$

что означает непрерывность функционала $F(f)$. Его ограниченность следует из конечности нормы. Из сказанного видно, что равенство функционалов равносильно равенству функций, на которых они определены.

Далее из оценки функционала

$$\left|\langle l,\theta\rangle\right|\le\left\|l\left|W_p^{(m)*}(R_n)\right.\right\|\left\|\theta\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|$$

с учетом (6) и (7) следует

$$\left\|l\left|W_p^{(m)*}(R_n)\right.\right\|\ge\frac{\left|\langle l,\theta\rangle\right|}{\left\|\theta\left|W_p^{(m)}(R_n)\right.\right\|}=$$

$$=\frac{\left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|^q}{\left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|^{q/p}}=\left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|^q.$$

Получилось неравенство, обратное к (4), следовательно,

$$\left\|l\left|W_p^{(m)*}(R_n)\right.\right\|=\left\|\psi\left|W_q^{(m)}(R_n)\right.\right\|.$$

Теорема доказана.

Единственность представляющей функции

Теорема 2. Функция, реализующая представление (3) в условиях теоремы 1, единственна в пространстве обобщенных функций и имеет вид

$$\psi=G*l, \quad (8)$$

где G – фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{2\alpha}.$$

Доказательство. Интегрирование по частям представления (3)

$$\langle l,\varphi\rangle=\int_{R_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{2\alpha}\psi\varphi dx$$

приводит к дифференциальному уравнению в обобщенных функциях

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{2\alpha}\psi=l.$$

Оператор уравнения линеен и имеет постоянные коэффициенты. Согласно [8] решение такого уравнения единственно в пространстве обобщенных функций и равно свертке его фундаментального решения с правой частью, что доказывает утверждение теоремы.

Фундаментальное решение определяется из уравнения

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{2\alpha}G=\delta,$$

к обеим частям которого применено преобразование Фурье

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}(-2\pi iz)^{2\alpha}F[G]=F[\delta],$$

что после цепочки упрощений левой части

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|2\pi iz_j\right|^2\right)^kF[G]=1,$$

$$(1+|2\pi z|^2)^mF[G]=1$$

приводит к выражению

$$G=F^{-1}[(1+|2\pi z|^2)^{-m}].$$

Результат обратного преобразования Фурье полученного выражения известен и приведен в [9]. Подставив значение показателя m, сохраняя обозначения и учитывая, что аргументом искомой функции выступает $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$, получим фундаментальное решение в виде

$$G(x) = G_{2m}(|x|) = \frac{K_{n/2-m}(|x|)}{2^{m-1}\Gamma(m)|x|^{n/2-m}}.$$

В выражении присутствуют специальные функции: $K_r(z)$ – функция Макдональда и $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Из теоремы следует, что искомая функция единственна как обобщенная функция, и, что если она будет регулярной, то будет единственной и в классе локально суммируемых функций.

Локальная суммируемость представляющей функции

Теорема 3. Функция (8) в условиях (2) принадлежит пространству $W_q^{(m)}(R_n)$ с нормой вида (1).

Доказательство. Для доказательства требуется установить суммируемость в степени q частных производных всех порядков $|\alpha|\le m$ свертки (8). Вначале докажем это утверждение для производных функции G_{2m}.

На основании оценок [9]

$$\left|D^\alpha G_{2m}\right| \le Ce^{-|x|}|x|^{(2m-n-1)/2}, \quad |x|>1,$$

все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой производной сходятся.

Оценка внутри единичного шара разбивается на три случая.

При $n-2m+|\alpha|=0$ и четном $|\alpha|$ несобственный интеграл от оценивающей функции

$$\left|D^\alpha G_{2m}\right| \le C(1-\ln|x|), \quad |x|<1,$$

сходится.

При $n-2m+|\alpha|<0$ интеграл от оценки

$$\left|D^\alpha G_{2m}\right| \le C, \quad |x|<1,$$

является собственным.

При $n-2m+|\alpha|=0$ и нечетном $|\alpha|$ или $n-2m+|\alpha|>0$ несобственный интеграл от оценки

$$\left|D^\alpha G_{2m}\right| \le C\frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, \quad |x|<1,$$

возведенной в степень q

$$\int\limits_{|x|<1}\left|D^\alpha G_{2m}\right|^q dx \le C\int\limits_{|x|<1}\left|\frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}\right|^q dx,$$

сводится к однократному путем перехода к сферическим координатам

$$K\int_0^1\left|\frac{1}{r^{n-2m+|\alpha|}}\right|^q r^{n-1}dr \le CK\int_0^1\frac{1}{r^{(n-2m+|\alpha|)q-n+1}}dr. \qquad (9)$$

Здесь в константу K перешли все повторно взятые интегралы от тригонометрических множителей. Несобственный интеграл от неограниченной функции одной переменной сходится на указанном интервале при $(n-2m+|\alpha|)\,q-n+1<1$.

Учитывая, что $q=\frac{p}{p-1}$, получаем сходимость интеграла, оценивающего каждую производную при условии $p(2m-|\alpha|)>n$. Следовательно, интегралы от производных наивысшего порядка функции G_{2m} оцениваются сходящимся несобственным интегралом при $pm>n$.

Для установления суммируемости свертки используется ограниченность линейного функционала в L_q [2]

$$\left\|D^\alpha G_{2m} * l\,\middle|\,L_q(R_n)\right\|^q =$$
$$= \int\limits_{R_n}\left|D^\alpha G_{2m} * l\right|^q dx \le M\int\limits_{R_n}\left|D^\alpha G_{2m}\right|^q dx.$$

Таким образом, для всех $|\alpha|\le m$ интегралы от производных свертки, возведенных в степень q, сходятся при $pm>n$, следовательно $D^\alpha G_{2m}*l\in L_q(R_n)$, $|\alpha|\le m$, и $G_{2m}*l\in W_q^{(m)}(R_n)$, т. е. свертка и ее производные всех порядков локально суммируемы в степени q.

Теорема доказана.

Заключение

Пространство Соболева нормируется таким образом, что обязательными слагаемыми суммы, стоящей под знаком интеграла, являются функция и все частные производные высшего порядка. Включение производных промежуточных порядков является произвольным, равно как и присутствие коэффициентов при этих производных. В задачах представления функционалов через локально суммируемые функции возникает необходимость решения дифференциальных уравнений в частных производных с использованием интегральных преобразований. Если пространство Соболева является гильбертовым, то такие уравнения линейны относительно искомой функции и ее производных. В негильбертовых же случаях уравнения нелинейны, поэтому в ранних исследованиях частные производные, входящие в норму, вводились через обратные интегральные преобразования заданного фундаментального решения. Позднее были опубликованы результаты, в том числе и автора, с нормой, не зависящей от интегральных преобразований, но в этом случае требовалось установление эквивалентности фундаментальных решений в окрестности начала координат и на бесконечности. В данной работе введена норма, с одной стороны, не зависящая от интегральных преобразований, что позволяет ее вычислить, с другой, позволяющая найти фундаментальное решение непосредственно через преобразование Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» СО РАН, 2003. – 692 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 707 с.
3. Половинкин В.И. Реализация линейных функционалов из $L_q^{m*}(\Omega)$ // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 156–158.
4. Половинкин В.И. Реализация функционалов на пространствах $L_p^m(E_n)$ // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – № 1. – С. 166–172.
5. Половинкин В.И. Формула для функций, реализующих функционалы // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 920–925.
6. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.
7. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
9. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

Поступила 23.05.2013 г.

УДК 519.87

О ПОСТРОЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА ДВА

Э.А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: emilia@rav.sscc.ru

Рассматривается задача оптимизации неориентированных циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Получены новые нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей любых степеней и диаметра два. Впервые построены бесконечные семейства циркулянтов диаметра два, достигающих найденные оценки.

Ключевые слова:
Неориентированные циркулянтные сети, графы Кэли абелевых групп, циркулянтные графы диаметра два, нижние оценки достижимого числа вершин.

Key words:
Undirected circulant networks, Abelian Cayley graphs, circulant graphs of diameter two, lower bounds of a number of nodes.

Введение

Пусть $s_1,s_2,\dots,s_k$, n – целые числа такие, что $1\le s_1<s_2<\dots<s_k<n$, и пусть $S=\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$. Неориентированный граф $C(n;S)$ с множествами вершин $V=\{0,1,\dots,n-1\}$ и ребер $E=\{(i,j):|i-j|\equiv s_l(\mathrm{mod}\,n),\ l=\overline{1,k}\}$ называется *циркулянтным*, числа из множества S – образующими, k – размерностью, n – порядком графа. В k-мерном циркулянте степень вершин $v=2k$, за исключением тех случаев, когда образующая представляет собой циклическую подгруппу порядка два.

Циркулянтные графы (сети) являются графами Кэли абелевых групп и находят широкое применение при построении и анализе топологий сетей и мультипроцессорных систем, в теории кодирования, распределенных вычислениях, моделировании химических реакций [1–7].

Диаметром графа G называется

$$d(G)=\max_{i,j\in V} d(i,j),$$

где $d(i,j)$ – длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G.

Пусть $AC(v,d)$ означает наибольший возможный порядок графа Кэли абелевой группы степени v и диаметра d. В последнее время границы $AC(v,d)$ интенсивно изучаются (обзор в [8]). Исследование циркулянтных графов как важного класса графов Кэли абелевых групп вносит существенный вклад при поиске нижних границ $AC(v,d)$. Так, для степеней 4 и 6 получены точные значения $AC(4,d)=2d^2+2d+1$ и $AC(6,d)$ (обзор в [3]), для степени 8 также найдены хорошие оценки для $AC(8,d)$ [9]. В работах [3, 10, 11] улучшены нижние оценки функции $AC(v,d)$ для любых четных степеней v и диаметров $d\ge v/2\ge 3$ [10], $d\ge v/2+\lfloor v/8\rfloor$ и $v>8$ [3], в [11] – на основе получения семейств экстремальных графов Кэли абелевых групп и при условии $d\ge\lfloor v/4\rfloor$. Удивительно, но с другой стороны спектра, для графов Кэли абелевых групп диаметра два, трудности в получении нижних оценок функции $AC(v,2)$ крайне сложны, а циркулянты диаметра два вообще еще не исследовались. Данная работа – первое исследование функции $AC(v,2)$ для класса циркулянтов.

Известно, что для четных степеней $v=2k$

$$AC(v,2)\le v^2/2+v+1=2k^2+2k+1.$$

С другой стороны, из построения графа Кэли для $\mathbb{Z}_{\lfloor (v+2)/2\rfloor}\times\mathbb{Z}_{\lceil (v+2)/2\rceil}$ с множеством образующих, со-