

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» СО РАН, 2003. – 692 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 707 с.
3. Половинкин В.И. Реализация линейных функционалов из $L_q^m(\Omega)$ // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 156–158.
4. Половинкин В.И. Реализация функционалов на пространствах $L_p(E_n)$ // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – № 1. – С. 166–172.
5. Половинкин В.И. Формула для функций, реализующих функционалы // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 920–925.
6. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.
7. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
9. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

Поступила 23.05.2013 г.

УДК 519.87

О ПОСТРОЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА ДВА

Э.А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

E-mail: emilia@rav.sccc.ru

Рассматривается задача оптимизации неориентированных циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Получены новые нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей любых степеней и диаметра два. Впервые построены бесконечные семейства циркулянтов диаметра два, достигающих найденные оценки.

Ключевые слова:

Неориентированные циркулянтные сети, графы Кэли абелевых групп, циркулянтные графы диаметра два, нижние оценки достижимого числа вершин.

Key words:

Undirected circulant networks, Abelian Cayley graphs, circulant graphs of diameter two, lower bounds of a number of nodes.

Введение

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_k$, n – целые числа такие, что $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$, и пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. Неориентированный граф $C(n; S)$ с множествами вершин $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и ребер $E = \{(i, j) : |i - j| = s_l \pmod{n}, l = 1, k\}$ называется *циркулянтным*, числа из множества S – образующими, k – размерностью, n – порядком графа. В k -мерном циркулянте степень вершин $v = 2k$, за исключением тех случаев, когда образующая представляет собой циклическую подгруппу порядка два.

Циркулянтные графы (сети) являются графами Кэли абелевых групп и находят широкое применение при построении и анализе топологий сетей и мультимедийных систем, в теории кодирования, распределенных вычислениях, моделировании химических реакций [1–7].

Диаметром графа G называется

$$d(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j),$$

где $d(i, j)$ – длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G .

Пусть $AC(v, d)$ означает наибольший возможный порядок графа Кэли абелевой группы степени

v и диаметра d . В последнее время границы $AC(v, d)$ интенсивно изучаются (обзор в [8]). Исследование циркулянтных графов как важного класса графов Кэли абелевых групп вносит существенный вклад при поиске нижних границ $AC(v, d)$. Так, для степеней 4 и 6 получены точные значения $AC(4, d) = 2d^2 + 2d + 1$ и $AC(6, d)$ (обзор в [3]), для степени 8 также найдены хорошие оценки для $AC(8, d)$ [9]. В работах [3, 10, 11] улучшены нижние оценки функции $AC(v, d)$ для любых четных степеней v и диаметров $d \geq v/2 \geq 3$ [10], $d \geq v/2 + \lfloor v/8 \rfloor$ и $v > 8$ [3], в [11] – на основе получения семейств экстремальных графов Кэли абелевых групп и при условии $d \geq \lfloor v/4 \rfloor$. Удивительно, но с другой стороны спектра, для графов Кэли абелевых групп диаметра два, трудности в получении нижних оценок функции $AC(v, 2)$ крайне сложны, а циркулянтные диаметра два вообще еще не исследовались. Данная работа – первое исследование функции $AC(v, 2)$ для класса циркулянтов.

Известно, что для четных степеней $v = 2k$

$$AC(v, 2) \leq v^2 / 2 + v + 1 = 2k^2 + 2k + 1.$$

С другой стороны, из построения графа Кэли для $\mathbb{Z}_{(v+2)/2} \times \mathbb{Z}_{\lfloor (v+2)/2 \rfloor}$ с множеством образующих, со-

стоящим из всех таких пар (x, y) , где точно один из x, y равен нулю, следует

$$AC(v, 2) \geq \left\lfloor \frac{v+2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{v+2}{2} \right\rceil = (k+1)^2. \quad (1)$$

Указанная нижняя граница во многих случаях улучшалась на 1 или 2 [8]. В настоящей работе данная граница улучшена на k и $2k$.

Наилучшая известная нижняя граница функции $AC(v, 2)$ для графов Кэли абелевых групп диаметра два есть $O((3/8)v^2)$ [12]. Полученные в [12] графы не являются циркулянтами, и граница найдена только для последовательности степеней вида $v=4q-2$, где q – простые числа или их степени. В [13] найден более слабый результат, а именно $AC(v, 2) \geq (8/25)v^2 + O(v)$, применимый для всех степеней $v \geq 11$. В [13] также доказано, что найденные графы не являются вершинно-транзитивными при $v \geq 21$. Аналогичная задача рассмотрена в [14], где, используя результаты теории чисел по распределению простых чисел, авторы показали, что для всех достаточно больших v нижняя граница $AC(v, 2)$ имеет вид $(3/8)v^2 - O(v^{1.525})$.

В данной статье конструктивно получены новые нижние оценки экстремальной функции $AC(v, 2)$ в классе циркулянтных графов для всех размерностей k (соответственно, степеней $v=2k$) и построены семейства циркулянтных сетей, достигающих найденные оценки. Показано, что аналитические описания найденных графов диаметра два обладают свойством сохранения параметров описания на больших диапазонах изменения порядков графа.

Новые семейства циркулянтных графов диаметра два

Построим циркулянтный граф $C(n; S)$ диаметра два размерности $k > 1$ с образующими $s_i, i=1, \dots, k$, и порядком n , большим (1). Пронумеруем вершины графа от 0 до $n-1$. Обозначим через $D(x)=d(0, x)$, $0 \leq x < n$, длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x . В графе диаметра два выполняется условие $D(x) \leq 2$ для любой вершины x , где $0 \leq x < n$. Поскольку циркулянтные графы являются вершинно-транзитивными, то достаточно рассматривать вершины с номерами $0 \leq x \leq n/2$.

Пусть образующие

$$s_i = i \text{ для } i=1, \dots, l, \text{ где } l \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Остальные $k-l$ образующих определим следующим образом:

$$s_{l+1} = l + 2l + 1, \quad s_{l+2} = s_{l+1} + 2l + 1, \dots, \\ s_k = s_{k-1} + 2l + 1 = 2l(k-l) + k.$$

При таких образующих имеем $D(x) \leq 2$ для любой вершины x из интервала $0 \leq x \leq s_k + l$. Если порядок графа будет равен $n = 2(s_k + l) + 1$, то выполняется условие $D(x) \leq 2$ для любой вершины $0 \leq x < n$. Отсюда искомое значение $n = 4l(k-l) + 2(k+l) + 1$. Найдем, при каких значениях l значение n как функции от k является максимально возможным.

Пусть k – четное число. Если $l=k/2$, то $2l+1=k+1$ и $n=(k+1)^2+k$. Если $l=k/2+1$, то

$2l+1=k+3$ и $n=(k+1)^2+k-2$. При всех других $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ значения n будут меньше.

Пусть $k > 1$ – нечетное число. Если $l=\lfloor k/2 \rfloor$, то $2l+1=k$ и $n=(k+1)^2+k-2$. Если $l=\lceil k/2 \rceil$, то $2l+1=k+2$ и $n=(k+1)^2+k$. При всех других $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ значения n будут меньше.

Таким образом, доказаны две следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $k > 1$ – целое число,

$$n = (k+1)^2 + k - 2 = n_1, \quad (2)$$

$$S = \left\{ 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor k \right\},$$

если k нечетное, (3)

или

$$S = \left\{ 1, \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 1 + k + 3, \dots, \frac{k}{2} + 1 + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) (k + 3) \right\}, \quad (4)$$

если k четное.

Тогда $d(C(n; S)) = 2$.

Теорема 2. Пусть $k > 1$ – целое число,

$$n = (k+1)^2 + k = n_2, \quad (5)$$

$$S = \left\{ 1, \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + k + 1, \dots, \frac{k}{2} + \frac{k}{2} (k + 1) \right\},$$

если k четное, (6)

или

$$S = \left\{ 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k + 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor (k + 2) \right\},$$

если k нечетное. (7)

Тогда $d(C(n; S)) = 2$.

При этом все найденные в теоремах 1 и 2 описания образующих для графов диаметра два обладают свойством сохранения параметров на больших интервалах изменения порядков графов (следствия 1, 2).

Следствие 1. Пусть $k > 1$ – целое число, значение n_1 равно (2), а образующие S равны (3) или (4). Для

всех порядков n , где $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor \leq n \leq n_1$, циркулянтные

графы $C(n; S)$ имеют диаметр два и степени вершин $v=2k$, за исключением значений

$$n_i = \begin{cases} n_1 - ik, & i = 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ n_1 - i(k+3), & i = 1, \frac{k}{2} - 1, & \text{если } k \text{ четное,} \end{cases}$$

для которых графы $C(n; S)$ имеют степени вершин $v=2k-i$.

Доказательство. Из рассмотренного выше способа построения данных графов следует, что при

всех значениях n в диапазоне $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor \leq n \leq n_1$ диа-

метр графов $C(n;S)$ равен двум. Степень вершин графов $C(n;S)$ зависит от соотношения между множеством образующих S и множеством $\bar{S}=\{n-s_j | j=1, \dots, k\}$ их дополнений до n . Имеем $s_j < \lfloor n_1/2 \rfloor$ и $n_1 - s_j > \lfloor n_1/2 \rfloor$ для всех $j=1, 2, \dots, k$. Для всех поряд-

ков $n \neq n_1$, $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor \leq n \leq n_1$, $S \cap \bar{S} = \emptyset$ и степень вершин графов $C(n;S)$ равна $v=2k$. При $n=n_1$, $|S \cap \bar{S}|=i$, так как происходит совпадение (наложение) i образующих из S с i дополнениями из $\bar{S}$, что уменьшает степень графа $C(n;S)$ на i . Следствие 1 доказано. Аналогично доказывается следствие 2.

Следствие 2. Пусть $k > 1$ – целое число, значение n_2 равно (5), а образующие S равны (6) или (7). Для

всех порядков n , где $\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor \leq n \leq n_2$, циркулянтные графы $C(n;S)$ имеют диаметр два и степени вершин $v=2k$, за исключением значений

$$n_i = \begin{cases} n_2 - i(k+1), & i=1, \frac{k}{2}, \quad \text{если } k \text{ четное,} \\ n_2 - i(k+2), & i=1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \quad \text{если } k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

для которых графы $C(n;S)$ имеют степени вершин $v=2k-i$.

Теперь будем увеличивать порядок циркулянтного графа $C(n;S)$ диаметра два. Это можно сделать следующим образом. Пусть образующие $s_i=i$ для $i=1, \dots, l$, где $l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Остальные $k-l$ образующих имеют следующий вид:

$$s_{l+1} = l + 2l + 2, s_{l+2} = s_{l+1} + 2l + 2, \dots, s_k = s_{k-1} + 2l + 2 = 2(l+1)(k-l) + l.$$

При таких образующих имеем $D(x) \leq 2$ для любой вершины x из интервала $0 \leq x \leq s_k + l$, кроме вершин с номерами

$$x_1 = 2l + 1, x_2 = x_1 + 2l + 2, \dots, x_{k-l} = x_{k-l-1} + 2l + 2,$$

где $D(x_i)=3$, $i=1, 2, \dots, k-l$. Если порядок графа будет равен $n=2(s_k+l)+1$, то выполняются следующие соотношения:

$$x_1 = 2l + 1 = n - 2s_k, x_2 = n - s_k - s_{k-1}, \dots, x_{k-l} = n - s_k - s_{l+1}.$$

Таким образом, $D(x) \leq 2$ для любой вершины $0 \leq x < n$. Отсюда искомое значение $n=4l(k-l)+4k+1$. Найдем, при каких значениях $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ значение n как функции от k является максимально возможным.

Пусть k – четное число. Если $l=k/2$, то $2l+2=k+2$ и $n=(k+1)^2+2k$. При всех других $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ значения n будут меньше.

Пусть $k > 1$ – нечетное число. Если $l=\lfloor k/2 \rfloor$ или $l=\lceil k/2 \rceil$, то в первом случае $2l+2=k+1$, во втором $2l+2=k+3$ и в обоих случаях $n=(k+1)^2+2k-1$. При всех других $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ значения n будут меньше.

Таким образом, получены доказательства следующих теорем.

Теорема 3. Пусть k – четное число,

$$n = (k+1)^2 + 2k,$$

$$S = \left\{ 1, \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + k + 2, \dots, \frac{k}{2} + \frac{k}{2}(k+2) \right\}.$$

Тогда $d(C(n;s))=2$.

Теорема 4. Пусть $k > 1$ – нечетное число,

$$n = (k+1)^2 + 2k - 1,$$

$$S = \left\{ 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k + 1, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor(k+1) \right\}$$

или

$$S = \left\{ 1, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + k + 3, \dots, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil(k+3) \right\}.$$

Тогда $d(C(n;s))=2$.

Заключение

Полученная для всех степеней v конструктивная нижняя граница функции $AC(v,2)$ в классе циркулянтных графов еще относительно далека от верхней границы. Что же показывают проведенные вычислительные эксперименты в этом случае? Получение точных значений функции $AC(v,d)$ при $v > 6$ достаточно трудоемко даже для диаметра $d=2$ и сводится к полному перебору параметрических описаний графов. Даже в пределах класса циркулянтов никакой общей тенденции для получения семейств с общим аналитическим описанием для максимально достижимых порядков графов пока не намечается, но это требует дальнейшего исследования.

В таблице даны описания экстремальных циркулянтных графов диаметра два, полученные с помощью компьютерной программы на основе переборных алгоритмов. Во втором столбце приведены значения функции $P(v,2)$, которые соответствуют границе Мура для класса циркулянтных графов. Представленные графы степеней $v=4, 6$ и 8 являются максимально возможными циркулянтными графами диаметра $d=2$ (отмечено символом *).

Таблица. Описания максимально достижимых циркулянтов диаметра два

v	$P(v,2)$	$n \leq AC(v,2)$	$S=(s_1, s_2, \dots, s_{v/2})$
4	13	13*	(1, 5), (2, 3)
6	25	21*	(1, 2, 8), (1, 3, 8), (1, 4, 6), (1, 5, 8), (1, 5, 9)
8	41	35*	(1, 6, 7, 10), (1, 7, 11, 16)
10	61	51	(1, 2, 10, 16, 23)
12	85	67	(1, 2, 3, 13, 21, 30)
14	113	90	(1, 4, 10, 17, 26, 29, 41)
16	145	112	(1, 4, 10, 17, 29, 36, 45, 52)

Автор выражает благодарность О.Г. Монахову за полезное обсуждение статьи и помощь в компьютерных экспериментах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D.F. Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. – 1995. – V. 24. – P. 2–10.
2. Hwang F.K. A survey on multi-loop networks // Theoretical Computer Science. – 2003. – V. 299. – P. 107–121.
3. Монахова Э.А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 3 (13). – С. 92–115.
4. Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А. Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // Искусственный интеллект. – 2009. – 3. – С. 132–138.
5. Martinez C., Beivide R., Gabidulin E.M. Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers // IEEE Transactions on Information Theory. – 2009. – V. 55. – № 8. – P. 3552–3562.
6. Muga F.P., Saldana R.P., Yu W.E.S. Building GraphBased Symmetric Cluster // NECTEC Technical Journal. – 2001. – V. 11. – № 9. – P. 195–199.
7. Balaban A.T. Reaction graphs // Graph Theoretical Approaches to Chemical Reactivity / eds. D. Bonchev, O. Mekenyan. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994. – P. 137–180.
8. Miller M., Siran J. Moore Graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem // Electron. J. Combin. – 2005. – Dyn. Surv. (DS14). – 61 p.
9. Монахова Э.А. Новая достижимая нижняя оценка числа вершин в циркулянтных сетях размерности четыре // Дискретный анализ и исследование операций. – 2013. – Т. 20. – № 1. – С. 37–44.
10. Chen S., Jia X.-D. Undirected loop networks // Networks. – 1993. – V. 23. – P. 257–260.
11. Dougherty R., Faber V. The degree-diameter problem for several varieties of Cayley Graphs, 1: The Abelian Case // SIAM J. Discrete Math. – 2004. – V. 17 (3). – P. 478–519.
12. Macbeth H., Siagiova J., Siran J. Cayley Graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups // Discrete Math. – 2012. – V. 312 (1). – P. 94–99.
13. Meseznikov D. A construction of large graphs of diameter two and given degree from Abelian lifts of dipoles // Kybernetika. – 2012. – V. 48 (3). – P. 518–521.
14. Siran J., Siagiova J., Zdimalova M. Large graphs of diameter two and given degree // Proceedings of the 3rd Inter. Workshop on Optimal Networks Topologies IWONT'2010. – Barcelona: Iniciativa Digital Politecnica, 2011. – P. 347–359.

Поступила 17.04.2013 г.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО Q_n И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ

М.А. Аль-Хассани^{1,2}, Е.А. Молдованова¹

¹Томский политехнический университет

E-mail: eam@tpu.ru

²Аль-Баера Университет, Ирак

Изучаются поля инвариантных геометрических образов, возникающих при отображении аффинного пространства в проективное пространство. С помощью этих геометрических образов показывается, что с рассматриваемым отображением инвариантным образом возникают отображения аффинного пространства в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства.

Ключевые слова:

Дифференцируемое отображение, многомерные пространства, линейные подпространства, геометрические объекты.

Key words:

Differentiable mapping, multidimensional spaces, linear subspaces, geometrical objects.

Введение

Как известно [1–4], дифференцируемые отображения многообразий являются важным разделом дифференциально-геометрических структур на многообразиях.

Данная работа посвящена изучению отображения $V_{n,n}: Q_n \rightarrow P_n$ аффинного Q_n и проективного P_n пространств. В первом разделе выводятся дифференциальные уравнения этого отображения, которым удовлетворяют компоненты внутренних фундаментальных геометрических объектов Γ_1 и Γ_2 первого и второго порядков в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 5]. С помощью этих компонент во втором разделе изучаются поля инвариантных геометрических образов. Эти поля дают возможность аналитически и геометрически доказать, что с отобра-

жением $V_{n,n}$ инвариантным образом ассоциируются два отображения $f_n^{2n}: Q_n \rightarrow M^{2n}$ и $f_n^{2n-1}: Q_n \rightarrow M^{2n-1}$, где M^{2n} и M^{2n-1} – многообразия всех невырожденных и вырожденных нуль-пар пространства P_n , соответственно.

Все построения в данной работе носят локальный характер, а функции, встречающиеся в работе, предполагаются функциями класса C^∞ .

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–7].

1. Аналитический аппарат

Рассматривается n -мерное аффинное пространство Q_n , отнесенное к подвижному аффинному реперу $Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями