СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Идрисов Ф.Ф., Устинова И.Г. Оценка функции корреляции стационарного случайного процесса при случайном числе измерений // Экономика, технология, предпринимательство. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2000. – Вып. 1. – С. 75–79.
2. Устинова В.Н., Устинова И.Г. Дискретные иерархические системы в геофизике // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 91–97.
3. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986. – 342 с.
4. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. – М.: Наука, 1965. – 463 с.
5. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 642 с.

Поступила10.06.2013 г.

УДК 517

ОБОБЩЁННЫЙ *G*-ОПЕРАТОР КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводится локальный G-оператор дифференцирования и интегрирования вещественной переменной комплексных порядков, который является обобщением d-оператора вещественных порядков на случай бесконечного количества локальных операторов, для которых выполняется принцип соответствия. Рассмотрены некоторые его свойства и частные случаи.

Ключевые слова:
G-оператор комплексного порядка, пространство коэффициентов, полиномы интегрирования, полиномы дифференцирования.
Key words:
G-operator of a complex order, space of factors, integration polynomials, differentiation polynomials.

Введение

В работе [1] был введён обобщённый *вещественный локальный оператор дробного интегродифференцирования*, но без учёта полиномов дифференцирования, или G-оператор, который представляет бесконечное множество локальных операторов дробного интегродифференцирования вещественных порядков вещественной переменной.

Обобщим G-оператор на комплексные порядки интегродифференцирования, действующие на степенные функции с комплексными показателями, следуя в основном [1]. Кроме того, в новый G-оператор, по сравнению с оператором из [1], внесены изменения, связанные с логарифмическими случаями.

G-оператор комплексных порядков

Определение. Оператор $G^s x$ будем называть *обобщённым локальным оператором дифференцирования и интегрирования дробных комплексных порядков* $s=\chi+i\gamma$, χ, $\gamma\in\mathbb{R}$; χ, γ=const; χ, $\gamma\geq 0$, действующим над множеством степенных функций x^q вещественной переменной x с комплексными показателями $q=\mu+i\nu$, μ, $\nu\in\mathbb{R}$; μ, ν=const

$$\begin{cases} G^{-s}x : x^q = K(-s,q;x)x^{q-s} + C_{-s}(x); \\ G^0 x : x^q = K(0,q;x)x^{q+0} + C_0(x) = x^q; \\ G^s x : x^q = K(s,q;x)x^{q+s} + C_s(x); s \neq -q; \\ G^s x : x^{-s} = K(s,-s;x)\ln_s(x) + C_s(x). \end{cases} \qquad (*)$$

Рассмотрим важные частные случаи порядков интегродифференцирования s.

Если порядок нулевой, $s=\chi=\gamma=0$, то это соответствует *единичному оператору*, который переводит функции самих в себя, что можно записать $G^0x=\mathbf{1}$.

Если порядок интегродифференцирования вещественный, $s=\mathrm{Re}(s)=\chi>0$, а в равенствах (*) перед показателем порядка оператора s, стоит знак минус, то это соответствует *оператору дробного дифференцирования вещественного порядка* χ, а если перед показателем порядка оператора стоит знак плюс, тогда это будет соответствовать *оператору дробного интегрирования вещественного порядка* χ.

Когда порядок мнимый, $s=i\mathrm{Im}(s)=i\gamma$; $\gamma>0$, а в равенствах (*) перед показателем порядка оператора s стоит знак минус, то это будет соответствовать *G-оператору дробного дифференцирования мнимого порядка* γ, а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это будет *G-оператор дробного интегрирования мнимого порядка* γ.

Если порядок интегродифференцирования комплексный, $s=\chi+i\gamma$; χ, $\gamma>0$, и перед ним стоит знак минус, то это соответствует *дробному дифференцированию комплексного порядка* s, а если знак плюс – *дробному интегрированию комплексного порядка* s.

В случаях, когда знаки у вещественной и мнимой части порядка интегродифференцирования различаются, т. е. $s=-\chi+i\gamma$ или $s=\chi-i\gamma$, то такие порядки будем называть *смешанными комплекс-*

ными порядками. Тогда нельзя говорить только о дифференцировании или только об интегрировании. Если в операторе у смешанного порядка перед вещественной частью стоит знак минус, то формально будем говорить, что это *G-оператор смешанного дифференцирования комплексного порядка s*, а если знак плюс, то это *G-оператор смешанного интегрирования комплексного порядка s*.

Далее $C_{-s}(x)$ – *полиномы дифференцирования порядка s*; $C_s(x)$ и C_1 – соответственно, *полиномы интегрирования порядков s* и 1. Полиномы интегрирования являются обобщениями констант интегрирования стандартного анализа [2].

Полиномы интегрирования и полиномы дифференцирования для удобства легко объединить в *полиномы интегродифференцирования* $C_{\mp s}(x)$.

Произвольные полиномы интегродифференцирования $C_{\mp s}(x)$ и $\tilde{C}_{\mp s}(x)$ дробного порядка s при их интегродифференцировании порядка s удовлетворяют уравнениям

$$G^{\pm s}x : C_{\mp s}(x) = \tilde{C}_{\pm s}(x).$$

Функции $\ln_s(x)$ являются *логарифмами порядка s*, которые требуют дальнейшего определения. В частности, в стандартном анализе, для s=1, $\ln_1(x)$=ln (x).

Коэффициенты дробного интегродифференцирования $K(s,q;x)$ определяют вид операторов дробного интегродифференцирования; $C_{\mp s}(x)$ – *полиномы интегродифференцирования дробного порядка s*.

Вид полиномов интегродифференцирования определяется коэффициентами $K(s,q;x)$.

В каждом конкретном случае при интегродифференцировании необходимо задавать конкретный вид коэффициентов $K(s,q;x)$.

Кроме этого, на *коэффициенты* $K(s,q;x)$ и полиномы интегродифференцирования необходимо наложить дополнительные условия, которые должны обеспечить выполнение принципа соответствия [1]. Тогда для вещественного порядка 1 и порядка 0, дробного дифференцирования и дробного интегрирования, что соответствует стандартному анализу, эти условия будет

$$K(-1,q;x) = q;$$

$$K(0,q;x) = 1;$$

$$K(1,q;x) = (q+1)^{-1}; q \neq -1;$$

$$K(1,-1;x) = 1; q = -1;$$

$$C_{-1}(x) = 0; C_0(x) = 0; C_1(x) = C_1x^0 = C_1 = \text{const}.$$

Множество всех возможных функций коэффициентов K $(s,q;x)$ образуют *пространство коэффициентов* обобщённого вещественного локального оператора комплексных порядков s и комплексных показателей степеней q: $\mathbf{K}(\pm s,q)\subset\mathbf{K}$ $(\pm s,q;x)$.

Каждый элемент пространства $\mathbf{K}(\pm s,q;x)$ задаёт локальный оператор дробного интегродифференцирования, отличный от других операторов, задаваемых другими элементами пространства коэффициентов. Поэтому каждый из элементов пространства $\mathbf{K}(\pm s,q;x)$ может лежать в основе построения локального дробного анализа, отличного от других подобных направлений, основанных на других операторах, определяемых другими элементами $\mathbf{K}(\pm s,q;x)$.

Заданное таким образом пространство коэффициентов $\mathbf{K}(\pm s,q;x)$ является очень широким, поэтому имеет смысл его сузить. Для этого на коэффициенты из $\mathbf{K}(\pm s,q;x)$ наложим дополнительные условия.

Потребуем, чтобы коэффициенты были независимы от переменной x, или

$$K(\pm s,q;x) \to K(\pm s,q);\quad \partial K(\pm s,q)/\partial x = 0.$$

Коэффициенты $K(s,q)$ определены для всех значений s, q, однозначны и являются кусочно-непрерывными функциями по s и q.

Эти условия сужают пространство коэффициентов и приводят к пространству $\mathbf{K}(\pm s,q)$, которое назовём *суженным пространством коэффициентов*, тогда $\mathbf{K}(\pm s,q)\subset\mathbf{K}(\pm s,q;x)$.

Одним из самых простых в суженном пространстве коэффициентов, задающих конкретные направления дробного анализа, является d-оператор комплексных порядков, который в рамках обобщённого вещественного локального оператора задаётся соотношениями

$$\begin{cases} K(-s,q) = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}; q \neq -1,-2,-3,...; \\ K(-s,n) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-s-n+1)}; n = 0,1,2,3,...; \\ n \in \mathbb{N}; s \neq 0,1,2,3,...; \\ K(s,q) = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}; \begin{cases} q \neq -1,-2,-3,...; \\ s \neq -q; \end{cases} \\ K(s,n) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(s-n+1)}; s \neq n; n = 0,1,2,3,...; \\ K(s,-s) = 1. \end{cases}$$

Полиномом интегродифференцирования $C_{\mp s}(x)$ *вещественного порядка s* для данного случая определяется

$$C_{\mp s}(x) = \begin{cases} C_{-\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-\alpha}; s = \alpha; \alpha, b_k \in \mathbb{R}; \\ \alpha, b_k = \text{const}; \alpha \neq 0,1,2,3,...; \\ C_{-m}(x) = 0; s = m; m \in \mathbb{N}; \\ C_0(x) = 0; s = 0; \\ C_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha}; s = \alpha; \alpha, a_k \in \mathbb{R}; \\ \alpha, a_k = \text{const}; \alpha \neq 1,2,3,4...; \\ C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k; s = m; a_k = \text{const}; m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В этом случае будут справедливы формулы интегродифференцирования порядка s для произвольных полиномов интегродифференцирования $C_{\pm s}(x)$ и $\tilde{C}_{\mp s}(x)$ порядка s

$$d^{\mp s}x : C_{\pm s}(x) = \tilde{C}_{\mp s}(x).$$

Заключение

Операторы из множества обобщённого оператора $G^s x$ могут быть использованы в приложениях и, прежде всего, для описания пространств с дробной размерностью и описания самых разных процессов в таких пространствах.

Может оказаться, что для тех или иных конкретных процессов в пространствах дробных размерностей будут подходить одни операторы дробного интегродифференцирования из множества обобщённого оператора $G^s x$, а для других процессов больше будут подходить другие операторы из того же множества.

При выборе операторов из множества $G^s x$ для приложений можно исходить из теоретического *принципа простоты*, согласно которому их двух операторов правильным должен быть признан наиболее простой из них. Но принцип простоты носит скорее рекомендательный характер. Окончательный отбор операторов из множества $G^s x$ следует проводить, опираясь на конкретные результаты наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Обобщённый вещественный локальный оператор дробного интегродифференцирования // Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики: Матер. II Междунар. Российско-Узбекского симпозиума. – Кабардино-Балкарская республика, Эльбрус, 28 мая – 1 июня 2012. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2012. – С. 285–287.
2. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 22.02.2013 г.

УДК 531.01

КОВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПОВ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

А.И. Родионов

Новосибирский Государственный технический университет
E-mail: teormech@ngs.ru

Представлен авторский взгляд на систему дифференциальных вариационных принципов и уравнений механики систем с произвольными дифференциальными связями. Он основан на варианте расширения классической механики, описывающем динамику голономных и неголономных систем произвольных порядков. Для несвободной системы вводится ее изображающая точка. Она движется в пространстве E_{3N} по многообразию R_m, стеснённому также дифференциальными связями. На основе уравнений движения ИТ выводятся ковариантные формы уравнений и принципов механики неголономных систем высших порядков.

Ключевые слова:
Системы с произвольными дифференциальными связями, дифференциальные вариационные принципы механики неголономных систем произвольных порядков, изображающая точка системы, уравнения движения изображающей точки системы, ковариантные формы уравнений движения и принципов.

Key words:
Systems with any differential constraints, differential variation principles of mechanics of any orders nonholonomic systems, Affix of a system, Affix motion equations, covariant forms of motion equations and principles.

Введение

Современное состояние и развитие мехатроники, авионики и точной электромеханики поставило вопрос об адекватных механических моделях динамики систем управляемого движения с полными и неполными дифференциальными программами движения высших порядков. К таким системам относятся системы, управляемые по резкостирывку и производным более высоких порядков.

Во второй половине XX в. стало понятно, что большой класс движений систем, управляемых по какой-либо программе, может быть описан как класс систем с голономными и неголономными связями общего вида [1]. А уравнения связей исполняют роль программ движения. В рамках одного формализма эти связи могут быть определены как дифференциальные связи высших порядков.

Известно, что построение механики твердых тел и распределенных систем на основе дифференциальных и интегральных вариационных соотношений и принципов является устоявшейся научной традицией [2–5] и с развитием вычислительных методов и техники приобрело большое практическое значение. Разделение всех принципов на вариационные соотношения и собственно принципы признается рядом авторов и имеет в рамках вариационного исчисления глубокий смысл. Придерживаясь этой точки зрения, мы всё же будем называть в дальнейшем соотношения и собственно принципы для краткости принципами. В данной