Заключение

Операторы из множества обобщённого оператора $G^s x$ могут быть использованы в приложениях и, прежде всего, для описания пространств с дробной размерностью и описания самых разных процессов в таких пространствах.

Может оказаться, что для тех или иных конкретных процессов в пространствах дробных размерностей будут подходить одни операторы дробного интегродифференцирования из множества обобщённого оператора $G^s x$, а для других процессов больше будут подходить другие операторы из того же множества.

При выборе операторов из множества $G^s x$ для приложений можно исходить из теоретического *принципа простоты*, согласно которому их двух операторов правильным должен быть признан наиболее простой из них. Но принцип простоты носит скорее рекомендательный характер. Окончательный отбор операторов из множества $G^s x$ следует проводить, опираясь на конкретные результаты наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Обобщённый вещественный локальный оператор дробного интегродифференцирования // Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики: Матер. II Междунар. Российско-Узбекского симпозиума. – Кабардино-Балкарская республика, Эльбрус, 28 мая – 1 июня 2012. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2012. – С. 285–287.
2. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 22.02.2013 г.

УДК 531.01

КОВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПОВ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

А.И. Родионов

Новосибирский Государственный технический университет
E-mail: teormech@ngs.ru

Представлен авторский взгляд на систему дифференциальных вариационных принципов и уравнений механики систем с произвольными дифференциальными связями. Он основан на варианте расширения классической механики, описывающем динамику голономных и неголономных систем произвольных порядков. Для несвободной системы вводится ее изображающая точка. Она движется в пространстве E_{3N} по многообразию R_m, стеснённому также дифференциальными связями. На основе уравнений движения ИТ выводятся ковариантные формы уравнений и принципов механики неголономных систем высших порядков.

Ключевые слова:
Системы с произвольными дифференциальными связями, дифференциальные вариационные принципы механики неголономных систем произвольных порядков, изображающая точка системы, уравнения движения изображающей точки системы, ковариантные формы уравнений движения и принципов.

Key words:
Systems with any differential constraints, differential variation principles of mechanics of any orders nonholonomic systems, Affix of a system, Affix motion equations, covariant forms of motion equations and principles.

Введение

Современное состояние и развитие мехатроники, авионики и точной электромеханики поставило вопрос об адекватных механических моделях динамики систем управляемого движения с полными и неполными дифференциальными программами движения высших порядков. К таким системам относятся системы, управляемые по резкости-рывку и производным более высоких порядков.

Во второй половине XX в. стало понятно, что большой класс движений систем, управляемых по какой-либо программе, может быть описан как класс систем с голономными и неголономными связями общего вида [1]. А уравнения связей исполняют роль программ движения. В рамках одного формализма эти связи могут быть определены как дифференциальные связи высших порядков.

Известно, что построение механики твердых тел и распределенных систем на основе дифференциальных и интегральных вариационных соотношений и принципов является устоявшейся научной традицией [2–5] и с развитием вычислительных методов и техники приобрело большое практическое значение. Разделение всех принципов на вариационные соотношения и собственно принципы признается рядом авторов и имеет в рамках вариационного исчисления глубокий смысл. Придерживаясь этой точки зрения, мы всё же будем называть в дальнейшем соотношения и собственно принципы для краткости принципами. В данной работе рассмотрим подробно только уравнения движений и дифференциальные принципы произвольных порядков. Каковы же эти уравнения и принципы?

Ответ на эти вопросы был получен в работах [6–13]. Так, в статьях [6, 9] были выведены уравнения движения систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову [5] дифференциальными связями высших порядков непосредственно из основных положений классической механики. А в статьях [10–13] описаны основы динамики систем с произвольными дифференциальными связями, приведены примеры задач и их решения. В [7] на основе результатов работы [6] были получены дифференциальные вариационные принципы для систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову дифференциальными связями высших порядков и доказана их необходимость и достаточность.

О дифференциальных принципах

При дифференциальных связях вида

$$\begin{cases} \varphi^p = \varphi^p(t, \chi_i, \dot{\chi}_i, ..., \overset{(k)}{\chi_i}) = 0 \\ p \le 3N-1, \quad i = 1,2,...,3N, \; k \ge 2 \end{cases}$$

принципы систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову дифференциальными связями высших порядков выглядят согласно [7] так:

$$\sum_{\ell=1}^{N} \frac{d^{(k-q)}}{dt^{(k-q)}} (\mathbf{f}_\ell - m_\ell \mathbf{a}_\ell) \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{r}_\ell} = 0. \tag{1}$$

Здесь δ_k – частная изохронная вариация вектора $\overset{(k)}{\mathbf{r}_\ell}$, q=1 для нелинейных, а q=2 для линейных по $\overset{(k)}{\mathbf{r}_\ell}$ связей. Оказалось, что один из Принципов (1) при q=2 эквивалентен принципу из [4] для систем с линейными по $\overset{(k)}{q^j}$ уравнениями связей.

Что же касается известных принципов и вариационных соотношений, то исторически они были сформулированы как независимые. И каждый имел своё собственное обоснование и интерпретацию. Принципы Даламбера–Лагранжа (k=0), Суслова–Журдена (k=1), Гаусса (k=2), Манжерона–Делеану (k≥3) в предложенных обозначениях имеют вид $\sum_{l=1}^{N} (\mathbf{f}_\ell - m_\ell \mathbf{a}_\ell) \overset{(k)}{\delta_k \mathbf{r}_\ell} = 0.$ Обратим внимание на то, что принцип Даламбера–Лагранжа необходим и достаточен для описания движения голономных систем и систем с линейными по скоростям неголономными связями. Принцип Суслова–Журдена – для голономных систем и систем с произвольными по скоростям неголономными связями. Принцип Гаусса – для голономных систем, систем с произвольными по скоростям и линейными по ускорениям неголономными связями. И для описания движения классических голономных и неголономных управляемых систем этих принципов вполне достаточно. Так, именно принцип Гаусса позволил в работе [14] получить вариационное условие и замкнуть систему уравнений, описывающую процесс удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству.

Естественно, возник вопрос о полной системе дифференциальных принципов механики в рамках парадигмы классической механики, адекватных различным типам дифференциальных связей. Такая система принципов для систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову дифференциальными связями была выведена в векторной форме и представлена в виде таблицы в работе [8].

Изображающая точка системы и её уравнения движения

Для вывода полной системы дифференциальных принципов мы воспользовались в [8] понятием изображающей точки системы (ИТ) [4–6], движущейся несвободно в абстрактном пространстве E_{3N} по многообразию R_m.

Представим $\mathbf{r}_\ell(x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ как $\mathbf{r}_\ell(\chi_{3\ell-2}, \chi_{3\ell-1}, \chi_{3\ell})$ а $\mathbf{f}_\ell(X_\ell, Y_\ell, Z_\ell)$ как $\mathbf{f}_\ell(f_{3\ell-2}, f_{3\ell-1}, f_{3\ell})$, $m_\ell = m_{3\ell-2} = m_{3\ell-1} = m_{3\ell}$; $M = \sum_{l=1}^{N} m_\ell$. Введем, как это сделано в [4, 7–13], ИТ, имеющую массу M, радиус-вектор $\mathbf{x}(x_i)$, где $x_i = \chi_i \sqrt{\mu_i}$, $\mu_i = m_i/M$, i=1,2,…,3N. Тогда, согласно [10], система векторных уравнений движения ИТ, приведённая к одному дифференциальному порядку и подобная уравнениям Лагранжа 1-го рода, примет вид:

$$\begin{cases} M\overset{(s)}{\mathbf{x}} = \overset{(r)}{\mathbf{F}} + \lambda_p \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\mathbf{x}} + \mathbf{T_k}, \; \mathbf{T_k} \perp \partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\mathbf{x}} \quad \text{a)} \\ d_t \varphi^p = (\partial\varphi^p / \partial \overset{(k)}{\mathbf{x}}) \overset{(s)}{\mathbf{x}} + \Psi^p(t, x_i, ... \overset{(s-1)}{x_i}) = 0 \quad \text{b)} \\ p = n \le 3N-1; \; q = 1,2; \; s = r+2, \\ r = 0 \text{ при } k \le 1, \; r = k-q \text{ при } k \ge 2. \end{cases} \tag{2}$$

В уравнениях (2) и далее предполагается суммирование по двойному немому индексу в соответствии с правилом Эйнштейна. Здесь 3N-мерные векторы силового фактора задаваемых сил $\overset{(r)}{\mathbf{F}}_i(F_i)$, $F_i = (f_i / \sqrt{\mu_i})$. Неопределенные множители Лагранжа λ_p могут быть представлены в разных видах, удобных при численном решении конкретных прикладных задач $\lambda_p = \lambda_p(t) = \overset{(r+2)}{\mu_p} = \overset{(r)}{\eta_p}$. n – общее число линейных и нелинейных связей k-го и связей более низких порядков, приведенных к единому дифференциальному виду $\varphi^p = \varphi^p(t, x_i, \dot{x}_i, ..., \overset{(k)}{x_i}) = 0$.

Введем силовой фактор «потерянных сил» **P** [2, 5, 6] как **P=F–M**$\ddot{\mathbf{x}}$. Тогда, например, принцип Даламбера–Лагранжа примет вид $(\mathbf{P} \cdot \delta_0 \mathbf{x}) = 0$, а принципы (1) будут выглядеть так:

$$\begin{cases} (\overset{(r)}{\mathbf{P}} \cdot \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{x}}) = 0, \quad r = k - q, \\ k \ge 2, \qquad q = 1,2. \end{cases} \tag{3}$$

Выражение (3) задаёт пару дифференциальных вариационных принципов, описывающих движение неголономных систем k-го порядка. Здесь при $q=1$ имеем дифференциальное вариационное соотношение, а при $q=2$ – собственно вариационный принцип [7], которому можно придать вид:

$$\delta_k Z_{k-2} = 0, \quad Z_{k-2} = (\overset{(k-2)}{\mathbf{P}})^2 / 2M. \qquad (4)$$

В этой форме принцип (4) подобен по виду принципу Гаусса и при $k=2$ тождественен ему. При этом функция Z_0 равна принуждению по Гауссу Zw [1, 2, 4–7]. Исходя из этого, назовём функцию Z_s принуждением s-го порядка. Заметим, что принцип (4) эквивалентен принципу, предложенному в работе [4]. Обратим внимание на то, что все представленные выше дифференциальные вариационные принципы могут быть заданы одной формулой $(\overset{(r)}{\mathbf{P}} \cdot \delta_k \overset{(k)}{\mathbf{x}}) = 0$, где $r=0$ при $k\le 1$, $r=k-q$ при $k\ge 2$, $q=1,2$.

Ковариантные аналитические формы уравнений движения

Для решения конкретных практических задач механики управляемого движения выведем более удобные аналитические формы уравнений движения и дифференциальных принципов высших порядков. Соотношение $\mathbf{x}=\mathbf{x}(i,q^j)$, выражающее декартовы координаты через обобщенные, выделяет в E_{3N} риманово многообразие R_m. Задача состоит в представлении движения материальной системы с помощью терминов геометрии R_m. Эта задача была решена в [6, 11–13]. Согласно этим работам все ковариантные формы уравнений движения выводятся единообразно путём скалярного умножения (2) на координатные векторы $\mathbf{e}_j=\partial\mathbf{x}/\partial q^j=\partial\dot{\mathbf{x}}/\partial\dot{q}^j=\ldots$ с последующими алгебраическими и дифференциальными преобразованиями для той или иной формы уравнений. Таким образом, получим следующие ковариантные формы уравнений движения.

***$R_m Q$*-форма**, подобная уравнениям движения в обобщённых силах:

$$\begin{cases} \dfrac{d^{(r)}}{dt^{(r)}}[(Q_i^P)\mathbf{e}^i]\mathbf{e}_j + \lambda_p(\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j}) + \Theta_{kj} = 0; \\ df^p/dt = (\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j})\overset{(s)}{q^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(s-1)}{q^j}) = 0; \\ i, j = 1,2,\ldots,m, \quad p \le n \le m-1, \quad q = 1,2, \quad s = r+2, \\ r = 0 \ \text{ при } \ k \le 1, \quad r = k-q \ \text{ при } \ k \ge 2. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь $Q_i^P=Q_i^F+Q_i^\Phi$, Q_i^F – i-я задаваемая обобщенная сила;

$$Q_i^\Phi = -\left[\frac{d}{dt}((\partial T/\partial\dot{q}^i)) - \partial T/\partial q^i\right] = -\partial S/\partial\ddot{q}^i = \ldots$$

– i-я обобщенная сила инерции;

$$f^p = f^p(t, q^j, \ldots, \overset{(k)}{q^j}) = 0$$

– уравнения связей, представленные в терминах геометрии R_m; $\mathbf{e}^i$ – координатные векторы взаимного базиса в касательном к R_m пространстве E_m; $\mathbf{e}^i=g^{ij}\mathbf{e}_j$, g^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора пространства R_m, определяемые выражением для кинетической энергии системы [4, 5], $\Theta_{kj}=(\mathbf{T}_k\cdot\mathbf{e}_j)$. Заметим, что при градиентном управлении движением $\Theta_{kj}=0$.

***$R_m A$*-форма**, подобная уравнениям Аппеля:

$$\begin{cases} \partial K_{(s)} / \partial \overset{(s)}{q^j} = Q_j^{(r)} + \lambda_p(\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j}) + \Theta_{kj}; \\ (\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j})\overset{(s)}{q^j} + W^p(t, q^j, \ldots, \overset{(s-1)}{q^j}) = 0; \\ j = 1,2,\ldots,m, \quad p = 1,2,\ldots,n \le m-1, \\ \begin{cases} q = 1,2, \quad s = r+2, \\ r = 0 \ \text{ при } k \le 1, \ r = k-q \ \text{ при } k \ge 2. \end{cases} \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь, согласно [6, 10–13], K_s – универсальная кинетическая мера движения s-го порядка – кинэта. $K_s = M(\overset{(s)}{\mathbf{x}})^2/2 = \dfrac{1}{2}\sum_{\ell=1}^N m_\ell(\overset{(s)}{\mathbf{r}_\ell})^2$; $K_{(s)}$ – часть кинэты, квадратично зависящая от $\overset{(s)}{q^j}$; $Q^{(r)}$ – обобщенный силовой фактор r-го порядка

$$Q_j^{(r)} = (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{\ell=1}^N \left(\overset{(r)}{\mathbf{F}_\ell} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\ell}{\partial q^j}\right).$$

Заметим, что при $r=0$ уравнения движения в $R_m A$-форме становятся уравнениями Аппеля.

***$R_m \Lambda$*-форма**, подобная уравнениям Лагранжа:

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) = Q_j^{(r)} + \lambda_p(\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j}) + \Theta_{kj}; & \text{а)} \\ (\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j}) \ \overset{(r+2)}{q^j} + W^p = 0; & \text{б)} \\ j = 1,2,\ldots,m, \quad p = 1,2,\ldots,n \le m-1, \\ \begin{cases} q = 1,2, \\ r = 0 \ \text{ при } \ k \le 1, \ r = k-q \ \text{ при } \ k \ge 2. \end{cases} \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $\hat{\Lambda}_j^{(r+1)} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial \overset{(r+1)}{q^j}}\right) - \dfrac{1}{r+1}\dfrac{\partial}{\partial \overset{(r)}{q^j}}$. Назовём этот дифференциальный оператор оператором Эйлера–Лагранжа порядка $(r+1)$. Заметим, что при $q=1$ уравнения (7а) будут выглядеть так

$$\hat{\Lambda}_j^{(k)}(K_{(k)}) = Q_j^{(k-1)} + \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j} + \Theta_{kj}.$$

А при $r=0$ эти уравнения становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода.

Уравнения движения в обобщенных силовых факторах ($R_m Q^{(r)}$-форма)

$$\begin{cases} Q_{\Phi j}^{(r)} + Q_j^{(r)} + Q_{\lambda j}^{(r)} + \Theta_{kj} = 0; \\ (\partial f^p / \partial \overset{(k)}{q^j}) \ \overset{(r+2)}{q^j} + W^p = 0; \\ j = 1,2,\ldots,m, \ p = 1,2,\ldots,n \le m-1, \ q = 1,2; \\ r = 0 \ \text{ при } k \le 1, \ r = k-q \ \text{ при } k \ge 2. \end{cases} \qquad (8)$$

Здесь обобщённые силовые факторы $Q_{\Phi j}^{(r)}$ и $Q_{\lambda j}^{(r)}$, согласно [9–11], равны

$$Q^{(r)}_{\Phi j} = -\partial K_{(s)} / \partial \overset{(s)}{q}{}^j = -\hat{\Lambda}^{(r+1)}_j (K_{(r+1)})...$$

$$j = 1, 2, ..., m, \quad s = r + 2, \quad q = 1, 2;$$

$$r = 0 \text{ при } k \le 1, \quad r = k - q \text{ при } k \ge 2,$$

$$Q^{(r)}_{\lambda j} = \lambda_p \partial f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j .$$

Отметим, что при r=0 *уравнения движения в обобщённых силовых факторах* эквивалентны *уравнениям движения в обобщённых силах* [9].

Ковариантные аналитические формы принципов

Получим ковариантные формы записи дифференциальных принципов механики из уравнений (6)–(9).

***R*$_m$*Q*-форма принципов.** Умножим (5) на $\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j$ и просуммируем по j. С учётом того, что f^p=0 и $\delta_k f^p = (\partial f^p / \partial \overset{(s)}{q}{}^j)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0$, получим:

$$\left(\frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}}[(Q^P_i)\mathbf{e}^i]\,\mathbf{e}_j + \Theta_{kj}\right)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0,$$

$$i, j = 1, 2, ..., m, \quad q = 1, 2;$$

$$r = 0 \text{ при } k \le 1, \quad r = k - q \text{ при } k \ge 2... \qquad (9)$$

В такой форме принципы (9) при Θ_{kj}=0 приведены в [9].

***R*$_m$*A*-форма принципов.** Уравнениям (7) соответствуют Принципы:

$$(\partial K_{(s)} / \partial \overset{(s)}{q}{}^j - Q^{(r)}_j - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0;$$

$$j = 1, 2, ..., m, \quad s = r + 2, \quad q = 1, 2;$$

$$r = 0 \text{ при } k \le 1, \quad r = k - q \text{ при } k \ge 2, \qquad (10)$$

которые выводятся из них аналогично принципам (9). Если ввести *характеристическую функцию* $R_s = K_{(s)} - Q^{(r)}_j \cdot \overset{(s)}{q}{}^j$, определяющую состояние движения системы при *векторе задаваемых сил* $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t,q^j,\dot{q}^j)$, то принципы (10) примут вид

$$(\partial R_s / \partial \overset{(s)}{q}{}^j - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0;$$

$$j = 1, 2, ..., m, \quad s = r + 2, \quad q = 1, 2;$$

$$r = 0 \text{ при } k \le 1, \quad r = k - q \text{ при } k \ge 2.$$

Заметим, что при q=2 и Θ_{kj}=0 имеем собственно принцип (11):

$$\delta_k R_k = 0. \qquad (11)$$

Нетрудно показать, что R_s=$Z_{(r)}$. Здесь $Z_{(r)}$ – зависящая квадратично от $\overset{(k)}{q}{}^j$ часть функции Z_r. Действительно,

$$R_s = M(\overset{(r)}{\mathbf{a}})^2 / 2 - (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_j)\overset{(s)}{q}_j = M(\overset{(r)}{\mathbf{a}})^2 / 2 - (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \overset{(r)}{\mathbf{a}}) =$$

$$= (M(\overset{(r)}{\mathbf{a}})^2 / 2 - (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \overset{(r)}{\mathbf{a}}) + (\overset{(r)}{\mathbf{F}})^2 / 2M)_{(s)} = Z_{(r)}.$$

Это доказывает эквивалентность (4) и (11).

При Θ_{kj}=0 и с учётом того, что

$$\partial Z_{(r)} / \partial \overset{(s)}{q}{}^j = \partial Z_r / \partial \overset{(s)}{q}{}^j,$$

принципы (10) и (11) примут вид

$$(\partial Z_r / \partial \overset{(s)}{q}{}^j)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0, \; \delta_k Z_{k-2} = 0. \qquad (12)$$

Соответствующий вид будут иметь и уравнения движения в этой форме

$$\partial Z_r / \partial \overset{(s)}{q}{}^j = \lambda_p f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j + \Theta_{kj} . \qquad (13)$$

Назовём (12) и (13) $R_m GA$-формой принципов и уравнений.

***R*$_m$Λ-форма принципов.** В этой форме принципы выглядят так:

$$(\hat{\Lambda}^{(r+1)}_j (K_{(r+1)}) - Q^{(r)}_j - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0;$$

$$j = 1, 2, ..., m, \quad q = 1, 2;$$

$$r = 0 \text{ при } k \le 1, \quad r = k - q \text{ при } k \ge 2. \qquad (14)$$

Они выводятся аналогично принципам (10) и при q=1 и Θ_{kj}=0 имеют вид

$$\left(\hat{\Lambda}^{(k)}_j (K_{(k)}) - Q^{(r)}_j\right)\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0.$$

Заметим, что эта форма принципов также допускает введение характеристической функции R_{r+1}=$Z_{(r-1)}$ для систем с r=1,2,... и вектором задаваемых сил вида $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t,q^j)$. Действительно,

$$Q^{(r)}_j = (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{e}_j) = (\overset{(r)}{\mathbf{F}} \cdot \partial \overset{(r+1)}{\mathbf{x}} / \partial \overset{(r+1)}{q}{}^j) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\overset{(r-1)}{\mathbf{F}} \cdot \partial \overset{(r+1)}{\mathbf{x}} / \partial \overset{(r+1)}{q}{}^j) - (\overset{(r-1)}{\mathbf{F}} \cdot \partial \overset{(r+1)}{\mathbf{x}} / \partial \overset{(r)}{q}{}^j) / (r+1). \qquad (15)$$

С учётом (15) принципы (14) примут вид

$$(\hat{\Lambda}^{(r+1)}_j (R_{r+1}) - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0 =$$

$$= (\hat{\Lambda}^{(r+1)}_j (Z_{(r-1)}) - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j;$$

$$j = 1, 2, ..., m, \quad q = 1, 2; \quad r = k - q \ge 1,$$

где $R_{r+1} = K_{(r+1)} - (\overset{(r-1)}{\mathbf{F}} \cdot \overset{(r-1)}{\mathbf{a}}) = Z_{(r-1)}$, а принцип (14) будет выглядеть так:

$$(\hat{\Lambda}^{(k)}_j (Z_{(k-1)}) - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0.$$

Соответствующий вид будут иметь и уравнения

$$\hat{\Lambda}^{(r+1)}_j (Z_{(r-1)}) = \lambda_p f^p / \partial \overset{(k)}{q}{}^j + \Theta_{kj} .$$

Назовём (17) $R_m G\Lambda$-*формой* принципов и уравнений.

***R*$_m$*Q*$^{(r)}$-форма принципов.** Этой универсальной форме записи уравнений (8) соответствуют принципы:

$$(Q^{(r)}_{Pj} - \Theta_{kj})\delta_k \overset{(k)}{q}{}^j = 0;$$

$$j = 1, 2, ..., m, \quad q = 1, 2;$$

$$r = 0 \text{ при } k \le 1, \quad r = k - q \text{ при } k \ge 2,$$

где $Q^{(r)}_{Pj}$=$Q^{(r)}_{\Phi j}$+$Q^{(r)}_{Fj}$ и $Q^{(r)}_{Fj}$=$Q^{(r)}$.

Здесь обобщённый силовой фактор инерции $Q_{\Phi j}^{(r)}$ может быть вычислен по любой из приведенных выше формул, а сами принципы могут быть записаны в представлениях взаимодействующих парциальных движений и взаимодействующих тел [9].

Заключение

Возможны и другие ковариантные формы уравнений движения и принципов неголономных систем высших порядков, которые в данной статье не рассматриваются. Интегральные вариационные принципы, описывающие движения неголономных систем высших порядков, будут рассмотрены в следующей работе. Представленные нами результаты могут быть положены в основу целого ряда более детальных исследований в области теории неголономных систем высших порядков. Естественным образом они могут стимулировать и уже породили появление ряда прикладных работ в различных областях неголономной механики, мехатроники, электромеханики и электродинамики [12, 13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коренев Г.В. Введение в механику управляемого тела. – М.: Наука, 1964. – 568 с.
2. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
3. Полак А.С. Вариационные принципы механики. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 599 с.
4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. – 275 с.
5. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. – М.: Высшая школа, 1970. – 269 с.
6. Родионов А.И. Уравнения движения неголономных систем высших порядков // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 1997. – № 2 (7). – С. 85–96.
7. Родионов А.И. Принципы неголономной механики высших порядков // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 1998. – № 1 (10). – С. 69–78.
8. Родионов А.И. О дифференциальных принципах механики // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 1998. – № 2 (11). – С. 124–134.
9. Остроменский П.И., Родионов А.И. Составление и исследование уравнений движения голономных и неголономных систем методом обобщенных сил // Вестник Новосибирского государственного технического университета. – 1997. – № 1 (3). – С. 121–140.
10. Родионов А.И. К динамике мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения // Вестник Сибирской государственной геодезической академии. – 2002. – Вып. 7. – С. 205–211.
11. Rodionov A.I., Kaveshnikov V.M. On dynamics of mechatronic systems with incomplete differential programs of motion // IFTOMM-2004: Proc. of XI World Cong. in Mech. and Machine Science. – Tianjin, China, 2004. – V. 3 «Mechatronics». – P. 1331–1335.
12. Родионов А.И., Сырецкий Г.А. Разомкнутые модели управления движением транспортных систем третьего порядка // Транспорт: Наука, техника, управление. –2011. – № 4. – С. 12–15.
13. Родионов А.И. Уравнения аналитической динамики систем с дифференциальными связями произвольных порядков. Ч. 1 // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2012. – № 4 (49). – С. 99–106.
14. Родионов А.И., Матвеев К.А. К динамике удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2012. – № 1 (46). – С. 93–108.

Поступила 16.04.2013 г.