

---

# Рецензии

## Рецензия на монографию А.А. Тихонова «Тензорное моделирование геомагнитного поля»

Использование тензорного исчисления является характерной особенностью математического аппарата современных естественных наук. Достаточно упомянуть, что тензорное исчисление давно уже широко применяется в механике деформируемого твёрдого тела, аэрогидродинамике, теории электричества, аналитической и дифференциальной геометрии. При этом необходимость применения тензорного исчисления вызвана не только удобством использования и наглядностью математических формулировок, но и объективными свойствами изучаемых объектов и происходящих с ними процессов. Эту мысль подтверждает и недавно опубликованная монография А.А. Тихонова «Тензорное моделирование геомагнитного поля» (AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG., Saarbruecken, Germany, 2011, ISBN 978-3-8454-7932-3, прежнее название издательства – LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.). Книга предлагает по-новому взглянуть на такой, казалось бы, всем хорошо известный объект природы как магнитное поле Земли, применив для его описания аппарат тензорного исчисления.

Мотивацией к разработке нового подхода к описанию геомагнитного поля явилась необходимость аналитического моделирования и решения ряда задач динамики искусственных спутников Земли (ИСЗ), взаимодействующих с геомагнитным полем. Известно, что решение такого рода задач, сопряженное с изучением как орбитального движения ИСЗ, так и вращательного движения ИСЗ относительно центра масс, требует тщательного предварительного анализа сил и моментов, действующих на ИСЗ в околоземном пространстве, и построения адекватных математических моделей, позволяющих с достаточной степенью точности исследовать и прогнозировать движение ИСЗ аналитическими и численными методами. Магнитное поле Земли (МПЗ) оказывает разнообразное воздействие на ИСЗ, движущийся в околоземном пространстве. Это воздействие может происходить посредством таких сил и моментов, как, на-

пример, магнитные, возникающие при наличии на ИСЗ соленоидов, гистерезисных стержней, постоянных магнитов (в том числе и за счет намагничивания самого ИСЗ в геомагнитном поле); лоренцевы, возникающие при движении заряженного ИСЗ относительно МПЗ; кулоновы, возникающие вследствие взаимодействия ИСЗ с плазмой околоземного пространства; силы, обусловленные вихревыми токами Фуко, и др. Для математического описания такого рода сил и моментов требуется знать индукцию МПЗ (а иногда не только индукцию, но и градиент индукции) как функцию радиус-вектора точки околоземного пространства. Ввиду сложного строения МПЗ и отсутствия указанной функциональной зависимости в конечном аналитическом виде возникает проблема математического моделирования МПЗ как неизбежного этапа при построении наиболее подходящей математической модели динамики ИСЗ, на базе которой будет производиться аналитическое и/или численное исследование той или иной задачи космодинамики.

Анализу и решению этой проблемы и посвящена монография А.А. Тихонова, написанная с учетом имеющегося многолетнего опыта автора в изучении задач вращательного относительно центра масс движения ИСЗ, взаимодействующих с МПЗ, и в стиле работ, ориентированных при моделировании МПЗ в первую очередь именно на решение задач космодинамики.

Монография состоит из трех разделов. В первом разделе обсуждаются вопросы моделирования МПЗ и использования классических моделей МПЗ при исследовании динамики вращательного движения ИСЗ, взаимодействующих с МПЗ. Основное внимание уделяется наиболее широко используемой в аналитических исследованиях модели МПЗ, называемой «прямой диполь», а также известной модели «наклонный диполь». Для МПЗ, моделируемого прямым магнитным диполем, получено уточнённое выражение вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , учитывающее градиентность МПЗ. При этом показано, что известный в литературе одно-

сторонний подход к учёту градиентности МПЗ, не учитывающий кривизну силовых линий МПЗ в объёме ИСЗ, является недостаточно корректным. Обсуждаются причины, по которым использование хорошо известной простейшей модели МПЗ «прямой магнитный диполь», позволившей решить большое количество важных прикладных задач, не всегда приводит к качественно верным результатам. Обоснована необходимость замены этой модели другой – более общей моделью. Однако попытка простой замены модели «прямой диполь» следующей по сложности известной моделью МПЗ «наклонный диполь» приводит к тому, что учитываются не все поправки к индукции МПЗ одного порядка величины. Это означает, что с точки зрения задачи динамики ИСЗ модель МПЗ «наклонный диполь» не уточняет модели «прямой диполь». Следовательно, для построения математической модели вращательного движения ИСЗ, взаимодействующего с МПЗ посредством, например, магнитного или лоренцева моментов, пропорциональных магнитной индукции  $\mathbf{V}$ , корректно учитывающей все слагаемые одного порядка, необходимо в выражении для вектора  $\mathbf{V}$  учитывать влияние следующей, т. е. квадрупольной составляющей геомагнитного потенциала и, возможно даже, составляющих более высоких порядков (в зависимости от постановки задачи). Так, естественным образом возникла проблема создания и исследования различных моделей МПЗ, учитывающих его высшие (после дипольной) составляющие.

Во втором разделе в процессе решения сформулированной выше проблемы подробно рассмотрено квадрупольное приближение МПЗ. Путем введения в рассмотрение тензора первого ранга  $\mathbf{M}^{(1)}$ , названного дипольным магнитным моментом МПЗ, и тензора второго ранга  $\mathbf{M}^{(2)}$ , названного квадрупольным магнитным моментом МПЗ, получена новая – тензорная форма представления квадрупольного приближения потенциала МПЗ в виде суммы двух слагаемых одностипной структуры. В каждом из слагаемых одинаковый набор множителей, причем каждый из множителей зависит только от определенных параметров задачи – от параметров орбиты ИСЗ или от координат точки пространства или, как тензоры  $\mathbf{M}^{(1)}$  и  $\mathbf{M}^{(2)}$ , – от гауссовых коэффициентов. Среди перечисленных выше параметров только гауссовы коэффициенты определяют собственные свойства МПЗ. Основываясь на этом факте, автор оценивает составляющие геомагнитного потенциала по норме указанных тензоров и сравнивает их между собой на основании этих оценок. Поскольку такие оценки не зависят от координат точек околоземного пространства, получаются довольно интересные объективные результаты, показывающие между прочим, как в течение последних ста лет  $\|\mathbf{M}^{(1)}\|$  убывает,  $\|\mathbf{M}^{(2)}\|$  растет, причем  $\|\mathbf{M}^{(2)}\|$  растет быстрее, чем убывает  $\|\mathbf{M}^{(1)}\|$ . Далее предложен математический аппарат, позволяющий аналитически построить вектор  $\mathbf{V}$  в квадрупольном

приближении и представить его в тензорной форме с использованием уже известных тензоров  $\mathbf{M}^{(1)}$  и  $\mathbf{M}^{(2)}$ . Для этого в общем виде решена задача нахождения градиента произвольной гармонической функции  $U$  и градиента поля вектора  $\mathbf{V} = -\text{grad}U$  по его известному скалярному потенциалу  $U = U(x^1, x^2, x^3)$ , заданному в произвольных криволинейных ортогональных координатах  $x^1, x^2, x^3$ . Произведено сравнение квадрупольной модели МПЗ с известными более простыми моделями МПЗ. Показано, что при вычислении вектора  $\mathbf{V}$  учет квадрупольной составляющей потенциала МПЗ дает поправки того же порядка малости, что и поправки от наклона магнитного диполя МПЗ к модели «прямой диполь» и вносит значительно более существенный вклад в точность вычисления вектора  $\mathbf{V}$ , чем учет градиентности МПЗ в рамках дипольной модели МПЗ.

В третьем разделе дано развитие математического аппарата, изложенного во втором разделе. Программно и алгоритмически обоснована возможность тензорного мультипольного представления геомагнитного потенциала, а также магнитной индукции и ее градиента, с произвольной степенью точности путем введения в рассмотрение тензоров высших рангов. Сравнивая полученное тензорное представление потенциала МПЗ с известным гармоническим представлением в виде ряда Лежандра в сферических координатах (Международное аналитическое поле), невозможно не заметить, что представление А.А. Тихонова выгодно отличается от традиционного, *во-первых*, краткостью записи, *во-вторых*, однотипной структурой слагаемых, а *в-третьих* – явным присутствием в каждом слагаемом множителя  $\mathbf{M}^{(n)}$ , зависящего только от гауссовых коэффициентов и, следовательно, являющегося характеристикой собственных свойств конкретной мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Последнее из упомянутых преимуществ представляется наиболее важным. Действительно, отсутствие зависимости мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  от координат точек околоземного пространства позволяет рассматривать его как объективную характеристику соответствующей мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Такая альтернативная форма представления потенциала вносит ясность в понимание мультипольной структуры геомагнитного поля и позволяет лучше представить его как поле, образованное совокупностью магнитных мультиполей, каждое из которых, как многомерный объект, характеризуется тензором соответствующего ранга. Полученные выражения отличаются краткостью записи и удобством использования как при ручном аналитическом исследовании, так и в компьютерных исследованиях с использованием методов компьютерной алгебры или численных методов.

Наряду с теоретическим обоснованием тензорного подхода к мультипольному моделированию геомагнитного поля, книга содержит готовые к использованию алгоритмы и программы. Например,

алгоритм и программа для математического пакета Maple, реализующего символьные вычисления, позволяющие построить аналитические выражения компонент мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  произвольного ранга. Для практического использования в прикладных задачах космодинамики приведены аналитические выражения компонент первых семи мультипольных тензоров МПЗ, выраженные через гауссовы коэффициенты. Приводится также программа, позволяющая аналитически строить вектор  $\mathbf{B}$  в любом конечном приближении.

Предложена методика оценки корректности мультипольных моделей МПЗ. Произведено разбиение околоземного пространства на области, в которых корректен учет конечного числа мультипольных составляющих вектора  $\mathbf{B}$  в зависимости от выбранных критериев точности. Это позволяет установить то необходимое и достаточное количество слагаемых в мультипольном разложении вектора  $\mathbf{B}$ , которое обеспечивает заданную точность нахождения вектора  $\mathbf{B}$  в любой точке орбиты ИСЗ с заданными параметрами радиуса и наклона.

Следует отметить, что все результаты, полученные в монографии и сформулированные в терминах, принятых при описании магнитного поля Земли, в равной мере могут быть применены к описанию гравитационного поля Земли, а также гравитационных и магнитных полей других планет.

Таким образом, полученные в монографии результаты позволяют еще раз убедиться в эффективности тензорного аппарата при математическом моделировании процессов и явлений в окружающем нас мире.

*Георгиевский Дмитрий Владимирович,  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
механико-математического факультета  
Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова*