УДК 519.2

УПРАВЛЕНИЕ ОПЦИОННЫМИ РЕСУРСАМИ: ПОЛНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕСУРСА В ПРОИЗВОДСТВЕННОМ ЦИКЛЕ

А.В. Китаева, Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов*

Томский политехнический университет
*Томский государственный университет
E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассмотрена модель управления опционными ресурсами с ограниченным сроком годности, которые необходимо полностью использовать в течение производственного цикла. Спрос на ресурс в процессе производства носит случайный характер: поток запросов – пуассоновский, величины запросов – независимые одинаково распределенные случайные величины с известным средним и дисперсией. Интенсивность пуассоновского потока запросов зависит от дополнительной прибыли предприятия. В диффузионном приближении получено распределение процесса использования ресурса, найдены вероятностные характеристики: математическое ожидание, дисперсия и функция корреляции. В случае линейной зависимости интенсивности от прибыли проведена оптимизация средней дополнительной прибыли предприятия, в том числе найдено оптимальное закупочное количество ресурса.

Ключевые слова:
Управление запасами, управление прибылью, ограниченный срок хранения, стохастические запросы, диффузионная аппроксимация.

Постановка задачи

Работа продолжает исследования, начатые в [1]. Рассмотрим более сложную модель: производитель управляет дополнительной прибылью на единицу использованного сырья $c(\cdot)$ с целью регулирования потока запросов на опционное сырье так, чтобы к концу производственного цикла длительности T все сырье $Q(\cdot)$ было использовано, т. е. $Q(T)=0$. Зависимость интенсивности спроса на сырье от c вполне естественна, поскольку прибыль предприятия заложена в стоимость продукта для заказчика, и снижение этой стоимости приводит к росту спроса на продукцию. Аналогичная зависимость рассматривалась, например, в [2].

Такая модель актуальна в случае практической невозможности утилизации сырья и позволяет увеличить прибыль предприятия от использования опционного ресурса.

Итак, будем считать, что поток запросов на опционное сырье является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c)$, зависящей от $c(t)$, $Q(t)$ – количество сырья, имеющегося в наличии в момент времени t, $Q(0)=Q_0$ – количество закупленного к началу производственного цикла сырья.

Рассмотрим решение задачи в диффузионном приближении процесса $Q(\cdot)$, т. е. будем считать, что процесс удовлетворяет следующему стохастическому уравнению

$$dQ(t) = -a_1\lambda(c)dt + \sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t), \qquad (1)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, a_1 – средняя величина одного запроса на сырье, a_2 – второй начальный момент одного запроса на сырье.

Диффузионная аппроксимация часто используется в моделях управления запасами и массового обслуживания и дает адекватные результаты [3–6].

Пусть управление прибылью определяется соотношением

$$a_1\lambda(c(t)) = \kappa\frac{Q(t)}{T-t}, \qquad (2)$$

где $\kappa>0$ – некоторый коэффициент, т. е. интенсивность использования ресурса прямо пропорциональна его текущему количеству и обратно пропорциональна времени до конца производственного цикла. Аналогичная (2) модель управления ценой без введения параметра κ рассматривалась впервые в [7].

Итак, объединяя (1) и (2), получаем, что диффузионное приближение процесса $Q(\cdot)$ имеет вид

$$dQ(t) = -\kappa \frac{Q(t)}{T-t}dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa \frac{Q(t)}{T-t}}dw(t). \qquad (3)$$

Рассмотрим вероятностные характеристики процесса $Q(\cdot)$.

Характеристики процесса использования опционного ресурса

Обозначим математическое ожидание $E\{Q(t)\}=\bar{Q}(t)$. Усредняя выражение (3), получим

$$d\bar{Q}(t) = -\kappa \frac{\bar{Q}(t)}{T-t}dt. \qquad (4)$$

Решая (4), учитывая начальное условие $\bar{Q}(0)=Q_0$, получаем

$$\bar{Q}(t) = Q_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}.$$

Применяя формулу Ито для квадратичного преобразования процесса $Q(t)$ получим

$$d(Q^2) = \left[-2Q\kappa\frac{Q}{T-t} + \frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}\right]dt +$$
$$+2Q\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}}dw(t).$$

Усредняя, получим уравнение для второго начального момента $Q_2(t)=E\{Q^2(t)\}$

$$\frac{dQ_2}{dt} + 2\kappa\frac{Q_2}{T-t} = \frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t}. \qquad (5)$$

Обозначим через $VAR_Q(t)=Q_2-\bar{Q}^2$ дисперсию процесса $Q(t)$.

Учитывая (4), получим

$$\frac{d(\bar{Q}^2)}{dt} = 2\bar{Q}\frac{d\bar{Q}}{dt} = -2\kappa\bar{Q}^2\frac{1}{T-t},$$

или

$$\frac{d(\bar{Q}^2)}{dt} + 2\kappa\frac{\bar{Q}^2}{T-t} = 0. \qquad (6)$$

Вычитая (6) из (5), получаем уравнение для дисперсии

$$\frac{dVAR_Q}{dt} + 2\kappa\frac{VAR_Q}{T-t} = \frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t} =$$
$$= \frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q_0}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa-1} \qquad (7)$$

с начальным условием $VAR_Q(0)=0$.

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$VAR_Q(t) = C_0(T-t)^{2\kappa} + \frac{a_2}{a_1}\frac{Q_0}{T^{\kappa}}(T-t)^{\kappa}.$$

Учитывая начальное условие, получаем

$$VAR_Q(t) = \frac{a_2}{a_1}Q_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\left[1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\right].$$

Заметим, что

$$Q_2 = D_Q(t) + \bar{Q}^2(t) =$$
$$= \frac{a_2}{a_1}Q_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\left[1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\right] + Q_0^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\kappa}.$$

Обозначим через

$$R(t_1,t_2) = E\{Q(t_1)Q(t_2)\} - E\{Q(t_1)\}E\{Q(t_2)\}$$

функцию корреляции процесса $Q(t)$.

Пусть $t_2>t_1$, тогда, умножив уравнение

$$dQ(t_2) = -\kappa\frac{Q(t_2)}{T-t_2}dt_2 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q(t_2)}{T-t_2}}dw(t_2)$$

на $Q(t_1)$ и усредняя по реализациям, получаем уравнение для $E\{Q(t_1)\,Q(t_2)\}$

$$\frac{\partial E\{Q(t_1)Q(t_2)\}}{\partial t_2} = -\kappa\frac{E\{Q(t_1)Q(t_2)\}}{T-t_2}.$$

Его общее решение имеет вид $E\{Q(t_1)Q(t_2)\}= =C(t_1)(T-t_2)^{\kappa}$. Полагая $t_2=t_1$, получаем

$$C(t_1) = \frac{E\{Q(t_1)^2\}}{(T-t_1)^{\kappa}},$$

откуда следует

$$E\{Q(t_1)Q(t_2)\} = E\{Q(t_1)^2\}\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}}.$$

Так как

$$E\{Q(t_1)Q(t_2)\} = R(t_1,t_1) + \frac{Q_0^2}{T^{2\kappa}}(T-t_1)^{2\kappa},$$

то

$$R(t_1,t_2) = VAR_Q(t_1)\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}} =$$
$$= \frac{a_2}{a_1}Q_0\left[1-\left(1-\frac{t_1}{T}\right)^{\kappa}\right]\left(1-\frac{t_2}{T}\right)^{\kappa}, \quad t_2 > t_1.$$

Найдем $p(x,t)$ – функцию плотности вероятностей процесса $Q(t)$ в момент времени t.

Рассмотрим преобразование $f(Q,t)=e^{-pQ}$, параметр $p>0$. Полученный процесс удовлетворяет уравнению

$$d(e^{-pQ}) = \left(\kappa\frac{Q}{T-t}pe^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}p^2e^{-pQ}\right)dt -$$
$$-pe^{-pQ}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}}dw(t). \qquad (8)$$

Пусть $\Phi(p,t)=E\{e^{-pQ}\}$ – преобразование Лапласа функции $p\ (x,\ t)$. Тогда, усредняя (8), получим

$$(T-t)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \kappa p\left(1+\frac{a_2}{2a_1}p\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0. \qquad (9)$$

Решая (9) методом характеристик, получим уравнение для характеристик $C=\frac{p}{p+\beta}(T-t)^k$, где β=2a_1/a_2. Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\Phi(p,t)=\varphi\left(\frac{p}{p+\beta}(T-t)^k\right),$$

где $\varphi(\cdot)$ – произвольная функция.

Воспользуемся условием, что $Q(0)=Q_0$ с вероятностью 1. Тогда $p(x,0)=\delta(x-Q_0)$, где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Отсюда следует, что $\Phi(p,0)=e^{-pQ_0}$ или $\varphi\left(\frac{p}{p+\beta}T^k\right)=e^{-pQ_0}$. Сделав замену переменной $\frac{p}{p+\beta}T^k=z$, получим $\varphi(z)=\exp\left(-\frac{\beta zQ_0}{T^k-z}\right)$.

Таким образом,

$$\Phi(p,t)=\varphi\left(\frac{p}{p+\beta}(T-t)^k\right)=$$
$$=\exp\left(-\frac{p\beta(1-t/T)^kQ_0}{p+\beta-p(1-t/T)^k}\right),$$

или, обозначив $(1-t/T)^k=\rho$, получим

$$\Phi(p,t)=\exp\left(-\frac{p\beta\rho Q_0}{p+\beta-p\rho}\right). \tag{10}$$

Приведем аргумент $\exp(\cdot)$ в (10) к виду

$$A+\frac{B}{p(1-\rho)+\beta}.$$

Очевидно, что

$$A=-\lim_{p\to\infty}\left(\frac{p\beta\rho Q_0}{p(1-\rho)+\beta}\right)=\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho},$$

тогда

$$B=\frac{\beta^2\rho Q_0}{(1-\rho)} \text{ и } \Phi(p,t)=\exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right)+$$
$$+\exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right)\left[\exp\left(\frac{\beta^2\rho Q_0}{(p+\beta/(1-\rho))(1-\rho)^2}\right)-1\right].$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа [8. Ф. 23.65] (в нашем случае $a=\frac{(1-\rho)^2}{\beta^2\rho Q_0}$, $b=\frac{\beta}{1-\rho}$), получаем

$$p(x,t)=\exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right)\times$$
$$\times\left[\delta(x)+e^{-\beta x/(1-\rho)}\sqrt{\frac{\beta^2\rho Q_0}{(1-\rho)^2x}}I_1\left(2\sqrt{\frac{\beta^2\rho Q_0x}{(1-\rho)^2}}\right)\right], \tag{11}$$

где $I_1(\cdot)$ – функция Бесселя мнимого аргумента.

Дельта-функция в (11) возникает потому, что величина запроса на опционный ресурс является случайной и, в принципе, заказчик может использовать все оставшееся сырье, что приведет к завершению производственного цикла

Оптимизация средней прибыли предприятия

Рассмотрим случай, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть линеаризована

$$\lambda(c)=\lambda_0-\lambda_1\frac{c-c_0}{c_0}. \tag{12}$$

Здесь величина c_0 имеет смысл некоторой «стандартной» дополнительной прибыли, так что $\lambda(c_0)=\lambda_0$. Такая аппроксимация возможна, если отклонения прибыли $c(t)$ от c_0 незначительны.

В этом случае уравнение (2) приобретает вид

$$a_1\lambda(c)=a_1\left(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_1\frac{c}{c_0}\right)=\frac{\kappa Q}{T-t},$$

откуда

$$c=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{\kappa Q}{a_1\lambda_1(T-t)}\right).$$

Так как в единицу времени в среднем поступает $\lambda(c)$ запросов на сырье, средний размер которых равен a_1, то среднее значение прибыли в единицу времени равно

$$ca_1\lambda(c)=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{\kappa}{a_1\lambda_1}\frac{Q}{T-t}\right)\kappa\frac{Q}{T-t}.$$

Усредняя по количеству сырья $Q(t)$, имеющегося в наличии в момент времени t, получим

$$E\{ca_1\lambda(c)\}=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t}-c_0\frac{\kappa^2}{a_1\lambda_1}\frac{Q_2}{(T-t)^2}=$$
$$=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t}-\frac{c_0\kappa^2}{a_1\lambda_1}\frac{D_Q+\bar{Q}^2}{(T-t)^2}=$$
$$=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\kappa\frac{Q_0}{T-t}\left(1-\frac{t}{T}\right)^\kappa-\frac{c_0\kappa^2Q_0}{a_1\lambda_1(T-t)^2}\times$$
$$\times\left\{\frac{a_2}{a_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^\kappa\left[1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^\kappa\right]+\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\kappa}Q_0^2\right\}.$$

Средняя прибыль за производственный цикл равна

$$S=\int_0^T E\{ca_1\lambda(c)\}dt. \tag{13}$$

Вычисляя интегралы в (13) получим

$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^\kappa\frac{dt}{T-t}=\frac{1}{\kappa},\ \int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^\kappa\frac{dt}{(T-t)^2}=\frac{1}{T(\kappa-1)},$$
$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\kappa}\frac{dt}{(T-t)^2}=\frac{1}{T(2\kappa-1)}.$$

Первый интеграл имеет смысл при $\kappa>0$, второй интеграл конечен только при $\kappa>1$, третий интеграл конечен только при $\kappa>0{,}5$.

Следовательно, в аппроксимации (12) следует считать $\kappa>1$. В этом случае

$$S = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)Q_0 -$$

$$-\frac{c_0 a_2 Q_0}{a_1^2\lambda_1 T}\kappa^2\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa-1}\right)-\frac{c_0 Q_0^2}{a_1\lambda_1 T}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}. \quad (14)$$

Задача выбора оптимального значения κ имеет вид

$$\frac{c_0 Q_0}{a_1\lambda_1 T}\left[\frac{a_2}{a_1}\kappa^2\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa-1}\right)+Q_0\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}\right]\Rightarrow \min_{\kappa},$$

или $\varphi(\kappa)=\dfrac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)}+\dfrac{Q_0 a_1}{a_2}\dfrac{\kappa^2}{2\kappa-1}\Rightarrow \min\limits_{\kappa}$.

Полагая $\varphi'(\kappa)=0$, получим уравнение

$$\frac{3\kappa^2(\kappa-1)(2\kappa-1)-\kappa^3(4\kappa-3)}{(\kappa-1)^2}+$$

$$+\frac{a_1 Q_0}{a_2}(2\kappa(2\kappa-1)-2\kappa^2)=0,$$

или
$$\frac{a_1 Q_0}{a_2}=-\frac{\kappa(2\kappa^2-6\kappa+3)}{2(\kappa-1)^3}, \quad (15)$$

которое надо решить в области $\kappa>1$.

Учитывая также, что правая часть (15) должна быть положительна, решение уравнения (15) следует искать в области $1<\kappa<\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}367$.

График зависимости оптимального значения κ от параметра a_1Q_0/a_2 приведен на рис. 1.

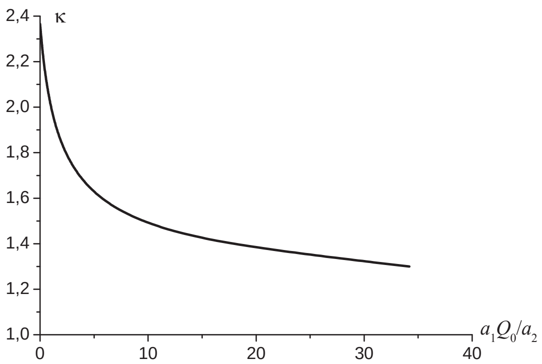

Рис. 1. *Зависимость оптимального значения параметра управления κ от характеристики системы a_1Q_0/a_2*

Заметим, что при больших значениях a_1Q_0/a_2 оптимальное значение κ мало отличается от 1. Полагая $\kappa=1+\varepsilon$ получаем, что при малых ε

$$-\frac{\kappa(2\kappa^2-6\kappa+3)}{2(\kappa-1)^3}\approx\frac{1}{2\varepsilon^3},$$

поэтому при $a_1Q_0/a_2>>1$ параметр $\kappa\approx 1+\sqrt[3]{\dfrac{a_2}{2a_1Q_0}}$.

Оптимизация начального объема опционного ресурса

Так как стоимость единицы ресурса равна d, то дополнительная прибыль, получаемая при использовании ресурса объема Q_0, равна, с учетом (14)

$$P=\int_0^T E\{ca_1\lambda(c)\}dt-dQ_0=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)Q_0-dQ_0-$$

$$-\frac{c_0 a_2 Q_0}{a_1^2\lambda_1 T}\frac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)}-\frac{c_0 Q_0^2}{a_1\lambda_1 T}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}.$$

Оптимальный объем Q_0 определяется из условия $\partial P/\partial Q_0=0$:

$$\frac{c_0 a_2}{a_1^2\lambda_1 T}\frac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)}=\frac{2c_0 Q_0}{a_1\lambda_1 T}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1},$$

откуда

$$Q_0=\frac{a_1\lambda_1 T}{2}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{d}{c_0}\right)\frac{2\kappa-1}{\kappa^2}-\frac{a_2}{2a_1}\frac{\kappa}{(\kappa-1)}. \quad (16)$$

Рассмотрим систему уравнений (15) и (16), решающих задачу максимизации прибыли предприятия одновременно по величинам Q_0 и κ

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2}Q_0=-\dfrac{\kappa(2\kappa^2-6\kappa+3)}{2(\kappa-1)^3},\\[2mm] Q_0=\dfrac{a_1\lambda_1 T}{2}\left(1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}-\dfrac{d}{c_0}\right)\dfrac{2\kappa-1}{\kappa^2}-\dfrac{a_2}{2a_1}\dfrac{\kappa}{(\kappa-1)}.\end{cases}$$

Исключая Q_0, получим уравнение для κ:

$$\frac{a_1^2\lambda_1 T}{a_2}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{d}{c_0}\right)=-\frac{\kappa^3(\kappa^2-4\kappa+2)}{(\kappa-1)^3(2\kappa-1)}, \quad (17)$$

которое надо решить в области $\kappa>1$ и при условии $\kappa^2-4\kappa+2<0$, т. е. в области $1<\kappa<3{,}414$.

Из (17), зная a_1, a_2, λ_0, λ_1, T, d и c_0, можно найти оптимальное значение κ, а затем и оптимальное значение объема партии опционного ресурса Q_0.

График функции $\psi(\kappa)=-\dfrac{\kappa^3(\kappa^2-4\kappa+2)}{(\kappa-1)^3(2\kappa-1)}$ в допустимой области приведен на рис. 2.

При больших $\lambda_1 T$ левая часть уравнения (17) велика, и поэтому κ мало отличается от 1. Полагая $\kappa=1+\varepsilon$, придем к уравнению

$$\frac{a_1^2\lambda_1 T}{a_2}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{d}{c_0}\right)\approx\frac{1}{\varepsilon^3},$$

откуда

$$\kappa\approx 1+\varepsilon=1+\sqrt[3]{\frac{a_2}{a_1^2\lambda_1 T\left(1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}-\dfrac{d}{c_0}\right)}},$$

$$Q_0\approx\frac{a_2}{2a_1\varepsilon^3}=\frac{a_1\lambda_1 T}{2}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{d}{c_0}\right).$$

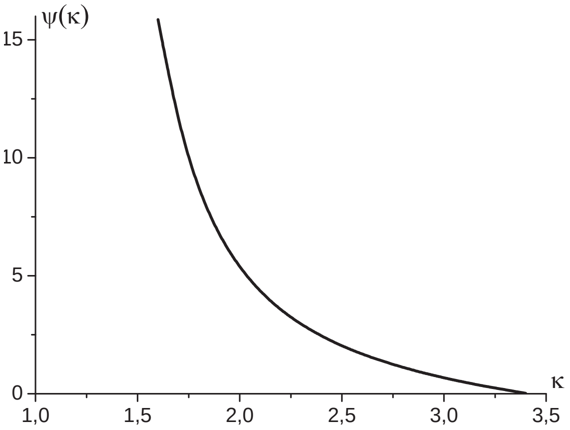

Рис. 2. *График функции $\psi(\kappa)$, определяющей оптимальное значение параметра управления κ*

Заключение

Предложена гибкая модель регулирования потока запросов на опционное сырье, позволяющая добиться полного использования опционного ресурса в производственном цикле. Получены уравнения (15) и (16), определяющие оптимальные параметры модели: начальный объем ресурса Q_0 и параметр управления κ, которые обеспечивают максимальную среднюю прибыль предприятия. Эти значения, вообще говоря, можно найти лишь численно. Получено выражение для плотности распределения вероятностей (11), полностью описывающее процесс использования опционного ресурса в диффузионном приближении и позволяющее найти распределение длительности использования ресурса, что даст возможность рассчитать оптимальную продолжительность производственного цикла T. Этот расчет составляет перспективы дальнейшей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Китаева А.В., Степанова Н.В. Управление опционными ресурсами // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 5. – С. 23–28.
2. Chatwin R.E. Optimal dynamic pricing of perishable products with stochastic demand and a finite set of prices // European Journal of Operational Research. – 2000. – V. 125. – P. 149–174.
3. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. – Томск: Изд-во Томского университета, 1991. – 166 с.
4. Harrison J.M. Brownian Motion and Stochastic Flow Systems. – New York: John Wiley and Sons, 1985. – 140 p.
5. Wee H.M., Chiamsiri S. Continuous-review inventory models using diffusion approximation for bulk queues // International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice. – 2012. – V. 19. – № 10. – P. 354–389.
6. Kitaeva A., Stepanova N. Diffusion approximation in inventory management // Book of Abstract of the 15th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2013). – Mataro (Barselona), Spain, 25–28 June 2013. – International Society for the Advancement of Science and Technology, 2013. – P. 115.
7. Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф. Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции. – Томск: Изд-во Томского университета, 2004. – 93 с.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 544 с.

Поступила 25.09.2013 г.

UDC 519.2

INVENTORY CONTROL: FULLY RESOURCE USAGE IN PRODUCTION CYCLE

A.V. Kitaeva, N.V. Stepanova, A.F. Terpugov[1]

Tomsk Polytechnic University
[1]Tomsk State University

The paper considers the model of controling optional resource with limited lifetime which should be completely used for the production cycle. The demand for the resource is of random character: the demand flow is Poisson with an intensity that is inversely related to the enterprise's additional profit, the purchases are i.i.d. random variables. The authors use a diffusion approximation to the system. The mean, the variance and the correlation function of the inventory level process are found. The optimization of the average additional profit is carried out in a case of linear dependence of the intensity of the profit; the optimal initial inventory level is also found.

Key words:
Inventory control, yield management, fixed lifetime, stochastic demand, diffusion approximation.

REFERENCES

1. Kitaeva A.V., Stepanova N.V. Upravlenie optsionnymi resursami [Control of optional resources]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 5, pp. 23–28.
2. Chatwin R.E. Optimal dynamic pricing of perishable products with stochastic demand and a finite set of prices. *European Journal of Operational Research*, 2000, vol. 125, pp. 149–174.
3. Nazarov A.A. *Asimptoticheskiy analiz markoviziruemykh system* [Asymptotic analysis of Markovian systems]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1991. 166 p.
4. Harrison J.M. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. New York, John Wiley and Sons, 1985. 140 p.
5. Wee H.M., Chiamsiri S. Continuous-review inventory models using diffusion approximation for bulk queues. *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice*, 2012, vol. 19, no. 10, pp. 354–389.
6. Kitaeva A., Stepanova N. Diffusion approximation in inventory management. *Book of Abstract of the 15th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2013)*. Mataro (Barselona), Spain, 25–28 June 2013. International Society for the Advancement of Science and Technology, 2013. p. 115.
7. Novitskaya E.V., Terpugov A.F. *Optimizatsiya roznichnoy prodazhi skoroportyashcheysya produktsii* [Optimization of retailing perishable products]. Tomsk, Tomsk University Publ., 2004. 93 p.
8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Reference book on operating calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965. 544 p.

УДК 621.52+511.52

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

С.О. Симонян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван
E-mail: ssimonyan@seua.am

Актуальность работы *обусловлена необходимостью эффективного определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза, достаточно часто встречающихся при решении неавтономных линейных систем конечных уравнений, задач оптимального управления, неавтономных матричных уравнений, при сингулярном разложении, в задачах расщепления линейных динамических систем, при решении линейных многоточечных краевых задач, непрерывных задач математического программирования, при нахождении корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами и др.*

Цель работы*: разработка параллельных матрично-векторных и матричных вычислительных методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза.*

Методы исследования*: при решении рассматриваемой задачи были использованы методы линейной алгебры, теории матриц, дифференциальных преобразований, численных методов, параллельных вычислений, методы машинного моделирования, а также современные информационные технологии.*

Результаты*: доказана теорема об определении параметрических обобщенных обратных матриц на основе использования аппарата дифференциальных преобразований, сводящего решение непрерывной задачи к решению эквивалентной числовой задачи, обеспечивающую высокую эффективность вычислительных процедур.*

Ключевые слова:
Параметрические матрицы, обобщенные обратные матрицы, дифференциальные преобразования, параллельные матрично-векторные и матричные вычислительные методы.

Введение

Для определения параметрических обобщенных обратных матриц

$$X(t) = A^{+}(t) \in R^{n\times m}$$

Мура–Пенроуза [1, 2] при параметрических матрицах $A(t)\in R^{m\times x}$ (заметим, что параметр t может быть временем, оператором Лапласа $\left(S \sim \dfrac{d}{dt}\right)$ или другим параметром) на основе дифференциальных преобразований Пухова [3] в работе [4] был предложен дифференциальный аналог (Д-аналог) определения $X(t)\equiv A^{(1)}(t)$, основанный на первом известном условии Мура–Пенроуза [1, 2]

$$A(t) = A(t)X(t)A(t), \qquad (1)$$

а в работе [5] – Д-аналог определения $X(t)\equiv A^{(2)}(t)$, основанный на втором известном условии [1, 2]

$$X(t) = X(t)A(t)X(t). \qquad (2)$$

При этом наряду с условиями (2) и (3) выполняются также третье и четвертое условия Мура–Пенроуза – условия симметричности [1, 2]

$$[A(t)X(t)]^{T} = A(t)X(t), \qquad (3)$$

$$[X(t)A(t)]^{T} = X(t)A(t). \qquad (4)$$

В настоящей работе для определения $X(t)$ предлагаются параллельные матрично-векторные и матричные вычислительные методы, основанные на неявных последовательных рекуррентных вычислительных схемах, предложенных в работах [4, 5].