

Управление техническими системами

УДК 681.3.06

МОДЕЛИРОВАНИЕ СДВИГА ФУНКЦИЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ МЕТОДОМ ИЗОБРАЖАЮЩИХ ВЕКТОРОВ

Ю.Н. Шалаев

Томский политехнический университет

E-mail: shalaev@tpu.ru

Рассматривается цифровой способ сдвига функции во временной области методом изображающих векторов. Это операторный метод, который всякой временной функции на конечном промежутке времени ставит в соответствие p -мерный вектор, а линейному оператору – матрицу $(p \times p)$. Дальнейшие преобразования, необходимые для сдвига функции, ведутся численными методами. Функции времени ставится в соответствие вектор, который называется изображающим вектором, а операции сдвига в прямом и противоположном направлениях – матричные операторы, которые находятся заменой в звене запаздывания оператора преобразования Лапласа матрицей дифференцирования. Оператор сдвига функции во временной области находится путем вычисления коэффициентов ряда по известному разложению матричной экспоненты в ряд Фурье. Восстанавливается функция времени скалярным произведением изображающего вектора на вектор полиномов Чебышева второго рода. Все это позволяет успешно использовать вычислительную технику, а окончательный результат на основании формулы обращения записать в аналоговой форме в виде функции времени. Предлагается способ разложения целых положительных чисел n степени в ряд нечетных чисел. Коэффициентом разложения положительных целых чисел является сумма геометрической прогрессии. Этот способ разложения связывает произведение и сумму целых положительных чисел и позволяет заменить n степень положительного целого числа суммой ряда нечетных положительных чисел. В качестве примера рассматривается разложение единицы (как самое сложное число) в пятую степень.

Ключевые слова:

Оператор сдвига, изображающий вектор, степень целых положительных чисел, ряд нечетных целых чисел.

Введение

При анализе и моделировании динамических систем возникает задача сдвига функций во временной области, то есть экстраполяция функции на заданную величину времени k . Задача сдвига функции во временной области решается методом изображающих векторов, который изложен в работах [1–3]. Метод изображающих векторов – это операторный метод, который всякой временной функции на конечном промежутке времени ставит в соответствие p -мерный вектор, а линейному оператору – матрицу $(p \times p)$. Суть метода изображающих векторов состоит в том, что каждой функции $f(t)$ ставится в однозначное соответствие вектор $F = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$, элементы которого коэффициенты ряда Фурье. Для функции $f(t)$, определенной на промежутке времени $[0, t_0]$, имеет место разложение

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^p f_i T_i(\tau),$$

где f_i – коэффициенты Фурье; $T_i(\tau)$ – ортонормированные смещенные полиномы Чебышева I-го рода; $\tau = t/t_0$ – безразмерная независимая переменная.

Объекты и цель исследования

При обработке опытных значений некоторой функции на интервале наблюдения $[0, t_0]$ часто возникает задача экстраполяции ее на последующий интервал наблюдения. Если в результате контроля выбранного параметра системы получен ряд значений $f(\tau_1), f(\tau_2), \dots, f(\tau_p)$, то требуется вычислить значение параметра $f(\tau_{p+1})$ в последующий момент времени.

Метод исследования

Для сдвига функции во временной области на заданную величину времени k вводится оператор сдвига B_k , задаваемый как

$$B_k f(t) = f(t + k). \quad (1)$$

Для нахождения структуры оператора B_k воспользуемся известным соотношением [4]

$$L\{f(t+k)\} = e^{sk} F(s). \quad (2)$$

В соотношении (2) оператором сдвига является величина e^{sk} , которая согласно методу изображающих векторов имеет вид

$$B_k = e^{Dk}, \quad (3)$$

где D – матрица дифференцирования – приведена в [1]. Как известно, матричную экспоненту (3) можно представить в виде матричного ряда [3]

$$e^{Dk} = E + \sum_{i=1}^n \frac{k^i D^i}{i!}. \quad (4)$$

При изменении знака в показателе степени в выражениях (3) и (4) получим оператор сдвига функции времени в противоположном направлении

$$B_{-k} = E + \sum_{i=1}^n \frac{(-k)^i D^i}{i!}. \quad (5)$$

Динамику системы управления успешно описывают с помощью дифференциальных и интегральных уравнений [4]

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{i-n}}{dt^{i-n}} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{j-m}}{dt^{j-m}} u(t). \quad (6)$$

Формальная структура системы управления на основании многих источников определена в виде дифференциального уравнения (6). Оператор идентификации объекта управления запишем в виде передаточной функции

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (7)$$

Таким образом, задача оценки параметров передаточной функции по виду переходного процесса системы управления $h(t)$ сводится к оценке конструктивных параметров m и n передаточной функции (7), при этом $m < n$, и нахождению неизвестных параметров модели a_i ($i=0, n-1$) и b_j ($j=0, m$).

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом изображающих векторов, для этого переходной процесс $h(t)$ преобразуем в изображающий вектор по соотношениям [2, 3], получим

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}. \quad (8)$$

По вектору (8) и из формулы обращения [1, 2] получаем аналитическую зависимость переходного процесса в виде полинома порядка p :

$$h(t) = (H, T(t)) \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{W(g)}{W(c * g)} = c^{n-m}. \quad (9)$$

По аналитической зависимости (9) функции $h(t)$ находим время переходного процесса t_0 от момента включения системы до момента, когда модуль отклонения переходного процесса от установившегося значения не превосходит заданной величины зоны нечувствительности.

Для нахождения весовой функции системы $w(t)$ воспользуемся дифференциальной связью между весовой и переходной функциями

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t). \quad (10)$$

В области изображающих векторов соотношение (10) запишется как

$$w = DH. \quad (11)$$

По соотношению (9) получаем аналитический вид весовой функции

$$w(t) = (w, T(t)). \quad (12)$$

По весовой функции (12) получаем числовую характеристику передаточной функции, для этого воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа

$$W(g_i) = \int_0^{\infty} w(t) \exp(-g_i t) dt, \quad (13)$$

где g_i – вещественный параметр на интервале $[0, t_0]$; $W(g_i)$ – оператор системы управления. Необходимо отметить, что для устойчивых динамических систем весовая функция (12) определена на интервале $[0, t_p]$, то есть на время переходного процесса, на последующем участке наблюдения она равна нулю. На основании этого вывода интегральное преобразование Лапласа (13) рассматривается в пределах времени переходного процесса.

Оператор системы управления (6) для вещественной переменной запишется как

$$W(g) = \frac{b_m g^m + b_{m-1} g^{m-1} + \dots + b_1 g + b_0}{g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g + a_0}, \quad (14)$$

где a_i ($i=0, n-1$), b_j ($j=0, m$) – коэффициенты передаточной функции.

Для оценки конструктивных параметров n , m воспользуемся [2], уравнениями (13, 14) и предельным соотношением

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{W(g)}{W(c * g)} = c^{n-m}, \quad (15)$$

где $c > 1$. Опытным путем получено, что лучший результат оценки конструктивных параметров m и n достигается при $c=2$. Из полученного соотношения (15) находится оценка конструктивных параметров

$$\hat{n-m} = \frac{\ln c^{n-m}}{\ln c}.$$

В результате введенных допущений при оценке параметров n , m получается вещественное число, содержащее целую часть и мантиссу. Мантиссу полученного выражения принимаем за единицу и прибавляем к целой части. Для нахождения параметра m воспользуемся оператором сдвига (4) и, изменяя величину времени k на заданный период времени, находим количество нулей m передаточной функции. Таким образом, задача нахождения конструктивных параметров n , m решена.

Для нахождения коэффициентов передаточной функции необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений порядка $n+m+1$ следующего вида:

$$g_k^n W(g_k) + W(g_k) \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_k^i - \sum_{j=0}^m b_j g_k^j = 0, \\ k = 0, n+m+1.$$

Результаты исследования

По найденным коэффициентам a_i , b_j и конструктивным параметрам n и m записываем передаточную функцию исходной системы, то есть находим структуру исследуемой динамической системы.

Необходимо отметить, что переходной процесс (9) может быть на выходе нестационарной и нелинейной динамических систем. Изложенный метод оценки параметров динамических систем позволяет аппроксимировать эти системы передаточными функциями линейных динамических систем.

При моделировании систем и составлении программ рассматривается возможность замены операции возведения целых положительных чисел в n степень суммой числового ряда вида

$$x^n = \sum_{i=0}^{x-1} (2R(x, n) i + 1), \quad (16)$$

где $R(x, n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2}$.

Выражение $R(x, n)$ представляет сумму геометрической прогрессии плюс единица, тогда на основании известного соотношения [5, 6] $R(x, n)$ примет следующий вид

$$R(x, n) = 1 + \frac{x(x^{n-2} - 1)}{x - 1}. \quad (17)$$

Преобразуем соотношение (16) к виду

$$x^n = R(x, n) \sum_{i=0}^{x-1} 2i + \sum_{i=0}^{x-1} 1, \quad (18)$$

и на основании известных соотношений [5, 6] выражение (18) запишется как

$$x^n = R(x, n)(x^2 - x) + x. \quad (19)$$

Подставим в выражение (19) соотношение (17), получим уравнение вида

$$x^n = \left(1 + \frac{x(x^{n-2} - 1)}{x - 1} \right) (x^2 - x) + x. \quad (20)$$

После алгебраических преобразований для выражения (20) получим тождество, то есть x^n . Таким образом, соотношение (16) доказано. В частности, при $R(x, n) = 1$ получим известное разложение квадрата целого положительного числа x в виде суммы целых положительных нечетных чисел. Для иллюстрации предложенного метода разложения целого положительного числа в n степень рассмотрим разложение единицы, например в пятую степень. Коэффициент $R(x, n)$ будет равен четырем, но первое слагаемое в соотношении (18) принимает нулевое значение, а второе слагаемое при любых n будет принимать значение единица.

Выводы

В работе вводится оператор сдвига на основе звена запаздывания [4], который позволяет оценить количество нулей передаточной функции исследуемой динамической системы. По полученным конструктивным параметрам и найденным коэффициентам записывается передаточная функция исходной системы, то есть решается задача идентификации по виду переходного процесса исследуемой динамической системы. Кроме этого, любую степень целого положительного числа можно представить в виде суммы целых нечетных положительных чисел, что показывает связь между степенью и суммой целых положительных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Осипов В.М. Основы метода изображающих векторов и линейное преобразование сигналов // в сб.: Вопросы программирования и автоматизации проектирования. – Томск: Изд-во Томского университета, 1971. – Вып. 1. – С. 1–13.
- Шалаев Ю.Н. Моделирование нестационарных динамических систем методом изображающих векторов // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 44–47.
- Шалаев Ю.Н. Обработка экспериментальных данных методом изображающих векторов. Математическое и программное

- обеспечение проектирования систем. Вып. 2. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – С. 99–101.
- Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
- Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

Поступила 09.10.2013 г.

UDC 681.3.06

MODELING OF FUNCTION SHIFT IN TIME DOMAIN BY THE DEPICT VECTORS METHOD

Yu.N. Shalaev

Tomsk Polytechnic University

The author has considered the digital way of shifting function in the time domain using the method of representing vectors. This is the operational method which assigns a p -dimensional vector to any time functions at finite time interval and assigns matrix $(p \times p)$ to linear operator. Further changes necessary to shift the functions are carried out by numerical methods. A function of time is associated with a vector which is called a depicting vector, and shift operations in the direct and opposite direction are associated with matrix operators, the latter are replaced in the operator delay chain of Laplace transform by the differentiation matrix. The shift operator function in the time domain is found by calculating the series coefficients by the known degradation of the matrix exponential in the Fourier series. The time function is recovered by the depicting vector inner product on the vector of Chebyshev polynomials of the second kind. All this allows applying successfully the computer equipment and recording the final result on the basis of the inversion formula in analog form as a function of time. The author proposes the method of expansion of positive integers of n degree into a series of odd numbers. The sum of a geometric progression is the coefficient of expansion of positive integers. This method binds the product of decomposition and the amount of positive integers and allows replacing the n degree of a positive integer by a sum of the series of odd positive integers. Unity (as the most complex number) expansion to the fifth power is considered as an example.

Key words:

Shift operator, representing vector, degree of positive integers, a number of odd integers.

REFERENCES

1. Osipov V.M. Osnovy metoda izobrazhayushchih vektorov i lineynoe preobrazovanie signalov [The bases of the technique of representing vectors and signals linear transformation]. *Voprosy programirovaniya i avtomatizatsii proektirovaniya* [Issues of design programming and automation]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1971. Iss. 1, pp. 1–13.
2. Shalaev Yu.N. Modelirovanie nestatsionarnykh dinamicheskikh sistem metodom izobrazhayushchih vektorov [Modeling non-stationary dynamic systems by the method of representing vectors]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2006, vol. 309, no. 7, pp. 44–47.
3. Shalaev Yu.N. Obrabotka eksperimentalnykh dannyykh metodom izobrazhayushchih vektorov [Processing of the experimental data by the method of representing vectors]. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie proektirovaniya sistem* [Software of system design]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2002. Iss. 2, pp. 99–101.
4. Besekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Theory of automated control systems]. Moscow, Nauka, 1972. 768 p.
5. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychisleniy* [Computation techniques]. Moscow, Nauka, 1966. Vol. 1, 632 p.
6. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical reference book for researchers and engineers]. Moscow, Nauka, 1974. 832 p.