УДК 681.51.01

ИНДЕКСЫ КАУЗАЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В СХЕМОТЕХНИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ И ПРИ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.М. Малышенко

Томский политехнический университет
E-mail: mam@tpu.ru

Определена сущность свойства каузальности вход-выходных систем, указана его квалиметрия, в том числе с использованием предложенных ранее автором индексов каузальности. Приведены сведения о расчете этих индексов по диграфам системы, по ее матрицам смежности и достижимости, а также с использованием программного обеспечения, разработанного с участием автора, для случая линейных динамических систем, процессы в которых описываются математическими моделями с непрерывным и дискретным временем. Показано, каким образом индексы каузальности многомерных по входу и выходу объектов могут использоваться при схемотехническом проектировании для них систем автоматического управления (САУ), а также при оценке сильной и слабой функциональной воспроизводимости управляемых объектов и САУ.

Ключевые слова:
Каузальность, индексы каузальности и их определение, вход-выходная динамическая система, система автоматического управления, схемотехническое проектирование, оценка, сильная и слабая функциональная воспроизводимость.

Введение

Целью данной статьи является привлечение внимания специалистов, занимающихся исследованием, проектированием и эксплуатацией вход-выходных динамических объектов и систем, и прежде всего систем автоматического управления (САУ), к свойству каузальности динамических систем, по сути, к такому же фундаментальному их свойству, как хорошо уже известные свойства устойчивости, а также управляемости, наблюдаемости, достижимости и восстанавливаемости (УНДВ). И если устойчивость систем является объектом исследования уже примерно полтора столетия, а УНДВ – около полувека, то каузальность систем еще не достаточно хорошо изучена. В то же время она также определяет потенциальные свойства характеризуемых ею систем, а ее количественные меры могут быть целенаправленно использованы при разработке многих объектов и систем различного назначения. В частности, как будет показано ниже, информация о количественных характеристиках каузальности объектов управления может быть эффективно использована при решении задач схемотехнического проектирования для них САУ, оценке функциональной воспроизводимости и самих объектов управления, и системы автоматического управления в целом.

Каузальность (лат. – *causalis*, англ. – *causality*) является одним из основополагающих понятий философии, выполняющих важнейшую методологическую роль в научном познании и описании физического мира. Она означает причинность, причинную взаимообусловленность событий во времени, при которой при воздействии одного объекта (причина) происходит соответствующее ожидаемое изменение другого объекта (следствие). Причем будущее течение многих процессов оказывается зависящим не только от настоящего, но и существенно определяется их предысторией.

Строгое формализованное определение свойства причинности (каузальности) введено в математику для характеризации используемых в ней операторов отображения одних множеств на другие лишь в 60-х гг. прошлого века, хотя ее суть уже давно используется в абсолютном большинстве математических моделей, описывающих реальные процессы. При этом оператор A, определенный на X со значениями в Y, называется ***каузальным*** (*причинным*) относительно семейств подпространств (X_a) и (Y_a), если для любого $a \in A$ образ AX_a лежит в Y_a, т. е. упорядоченная пара подпространств (X_a, Y_a) инвариантна относительно оператора A [1]. Наиболее полное определение каузального оператора дано в [2]: оператор A каузален, если при $\forall t \in R$ имеет место включение $AX_t \subseteq Y_t$, где

$$X_t = \{x \in X:\ x(s) = 0\ \ \forall s < t\}$$
$$\text{и}\ \ Y_t = \{y \in Y:\ y(s) = 0\ \ \forall s < t\}.$$

На необходимость учета свойства каузальности в общей теории систем впервые было обращено внимание в [3]. В теории систем ввиду разнообразия свойства каузальности у вход-выходных систем последние принято относить к строго каузальным, каузальным, антикаузальным или некаузальным, характеризуемым в последнем случае операторами без памяти [1, 2, 4, 5]. Следует заметить, что в этой части терминология еще не устоялась. В частности, строго каузальные системы и каузальные системы в [6–8] называются, соответственно, ***каузальными*** и ***бикаузальными***, а в [9, 10] – ***строго собственными*** и ***собственными***.

Свойство **каузальность** отражает факт запаздывания при распространении сигналов от входа к выходу системы. Оно присуще любой системе, обладающей инерционностью, и в этом плане дополнительно характеризует её. Управляемые объекты и системы, к которым относятся, в частности, системы автоматического управления

(САУ), в зависимости от того, в какой мере они обладают указанным свойством, могут быть разделены на 3 класса: ***некаузальные***, ***каузальные*** и ***строго каузальные*** [11–13].

Некаузальными являются вход-выходные системы, которые не обладают инерционными свойствами, т. е. такие системы, вход-выходные отображения в которых определяются только алгебраическими и/или логическими операторами.

В ряде частных случаев отличить каузальные системы от строго каузальных можно непосредственно по виду их математических моделей. С этой целью воспользуемся для описания процессов в динамических системах моделью типа «вход–состояние–выход» вида

$$\sigma x(t) = g(x(t), u(t)); \qquad (1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)). \qquad (2)$$

Полагаем, что в ней $x \in R^n$, $u \in R^m$ и $y \in R^p$ – соответственно, векторы состояния, входа и выхода системы. Составляющая $\sigma x(t)$ для непрерывных систем означает первую производную по времени от $x(t)$, а для систем с дискретным аргументом – относительным временем t, значения которого кратны периоду дискретизации T_0, эта составляющая равна $x(t+1)$.

Система с моделью (1), (2) строго каузальна лишь в том случае, когда выход $y(t)$ в (2) не зависит от $u(t)$. В противном случае она каузальна. Это значит, что у каузальной системы выход $y(t)$ формируется за счет преобразования и по инерционному, и по безинерционному каналам связи, а в строго каузальной системе – только после прохождения сигнала $u(t)$ через инерционную часть системы.

Квалиметрия каузальности вход-выходных динамических систем

В качестве количественной меры каузальности для одномерных по входу и выходу динамических систем (1), (2) с дискретным временем в [11] предложено использовать величину, названную ***характеристическим числом*** системы и определенную как момент времени t, при котором выход системы возбуждается входом, поступившим в момент $t=0$. В ряде работ, в частности в [12], для многомерных по входу и выходу линейных непрерывных систем, процессы в которых описываются математической моделью в форме «вход–состояние–выход» вида

$$\sigma x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (3)$$

и с теми же обозначениями, что и в (1), (2), при $D=0$ аналогичный по сути показатель между входом $u(t)$ и выходом y_i, где $i \in \overline{1,p}$, называется ***дифференциальной степенью системы*** δ_i **относительно выхода** $y_i(t)$. Она определяется как минимальная степень N, при которой нарушается условие $c_iA^{N-1}B \equiv 0$, где c_i – i-я строка матрицы C. Сумма всех δ_i системы при этом называется ***дифференциальной степенью системы***. Этот же показатель для линейных систем в [14] и для нелинейных в [15] называется их ***относительным порядком***.

Указанные выше показатели, как и индексы управляемости, наблюдаемости, достижимости, восстанавливаемости, характеризуют структурные и динамические свойства систем и имеют близкую с ними природу. В этой связи в [13] они названы автором ***индексами каузальности***. Тем самым была подчеркнута их принадлежность к указанной группе показателей и суть определяемого ими свойства системы. В этой же публикации даны строгие определения индексов каузальности многомерных по входу и выходу динамических систем с дискретным и непрерывным временем. В частности, для дискретной по времени системы с моделью (1), (2) и начальным состоянием

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0 \qquad (4)$$

индекс каузальности k_{ij}^u ***системы по выходу*** y_i, $i \in \overline{1,p}$ ***и входу*** u_j, $j \in \overline{1,m}$ – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (4)

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(h_i \circ g^t) \neq 0. \qquad (5)$$

В этом определении использованы следующие обозначения и допущения: $h_i(\cdot)$ – i-я строка вектор-функции $h(\cdot)$; вектор-функции g: $R^n \times R^m \to R^n$; h: $R^n \times R^m \to R^p$ – гладкие, удовлетворяющие условиям $(0,0)=0$, $hh(0,0)=0$; $x_0=x(0)$; $u_\nu=u(\nu)$;

$$g^\nu = g(g(...(g(g(x_0, u_0), u_1), u_2), ...), u_{\nu-1}).$$

При этом $h \circ g^\nu$ – однозначное (сюрьективное) вход-выходное отображение системы на интервале $0 \le t \le \nu$.

Индекс каузальности k_i^u рассматриваемой системы по выходу y_i от всего входа u – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (4) $\nabla^u(h_i \circ g^t) \neq 0$. В этом выражении и далее $\nabla \mu(T)$ означает градиент T по μ. Наконец, индекс каузальности k_c рассматриваемой системы по управлению – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (4)

$$\nabla^u(h \circ g^t) \neq 0.$$

При таком определении каузальность рассматриваемых систем характеризуется матрицей индексов каузальности $K^u=[k_{ij}^u]_{pm}$. При этом

$$k_i^u = \min\{k_{ij}^u : \ j \in \overline{1,m}\}. \qquad (6)$$

$$k^u = \min\{k_j^u : \ i \in \overline{1,p}, \ \ j \in \overline{1,m}\}. \qquad (7)$$

Если у объекта управления $k_{ij}^u=0$, то это значит, что его выходная переменная y_i начинает меняться одновременно с началом изменения u_j, $j \in \overline{1,m}$, т. е. между ними существует не только инерционный, но и безинерционный каналы связи. В ситуациях, когда управление u_j не влияет на y_i, считаем, что индекс каузальности $k_{ij}^u=\infty$.

Если анализируемая система подвержена не только входным воздействиям $u(t)$, но и возмущениям $f \in R^r$, так что ее модель в форме «вход–состояние–выход» имеет вид

$$\sigma x(t) = g(x(t)u(t), f(t)); \ \ y(t) = h(x(t), u(t), f(t)),$$

то и связь выхода системы $y(t)$ с возмущением $f(t)$ может характеризоваться матрицей индексов каузальности $K^f=[k^u_{ij}]_{pr}$, определяемой аналогичным способом.

Индексы каузальности могут использоваться и для характеристики свойств непрерывной системы с моделью вида (1), (2). В этом случае под индексом каузальности k^u_{ij} по входу u_j и выходу y_i следует понимать минимально возможный порядок $\alpha\geq 0$ отличной от нуля в момент $t=0_+$ производной $y_j^{(\alpha)}(t)$ реакции системы на управление $u_j(t)$ при начальном условии (4) и определять его согласно (5). Соответственно, индексы каузальности системы по выходу y_i и системы в целом определяются в соответствии с (6) и (7).

Вычисление индексов каузальности может проводиться как по диграфам анализируемой системы, так и с использованием матриц смежности и достижимости [13, 16].

При относительно невысоком порядке линейной многомерной системы с математической моделью вход-выходных отображений (3) более просто индексы каузальности вычисляются по диграфу системы, т. е. ориентированному графу, вершинами которого являются переменные, входящие в векторы состояния $x\in R^n$, входа $u\in R^m$ и выхода $y\in R^p$ системы. Дуги в этом диграфе определяются по скелетным матрицам $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, которые получаются заменой на единицы всех ненулевых элементов (вне зависимости от их знака) в матрицах A, B, C, D модели (3). Заметим, что дуги – петли при вершинах x_i, $i\in\overline{1,n}$ – в диграфе системы не указываются.

Например, если в математической модели (3) анализируемой на каузальность системы матрицы

$$D=0,$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{26} \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

то матрицам A, B, C с указанными в них ненулевыми элементами будут соответствовать скелетные матрицы

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом элементу $\bar{a}_{ij}=1$ матрицы $\bar{A}$ соответствует в диграфе дуга, выходящая из вершины x_j в вершину x_i $(i,j\in\overline{1,n})$, элементу $\bar{b}_{ij}=1$ матрицы $\bar{B}$ – дуга из u_j, $j\in\overline{1,m}$ в x_i, $i\in\overline{1,n}$. Аналогично $\bar{c}_{ij}=1$ порождает в диграфе системы дугу из x_j в y_i, а $\bar{d}_{ij}=1$ – дугу из u_j в y_i. Нулевые элементы матриц $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ указывают на то, что в диграфе системы отсутствуют дуги между соответствующими этим элементам вершинами.

Диграф данной системы имеет приведенный на представленном рисунке вид.

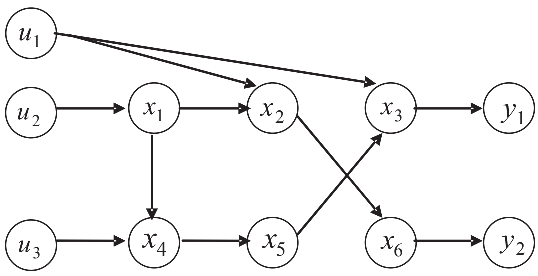

Рисунок. *Диграф системы, описываемой уравнениями (3) при указанных в (8) матрицах A, B, C*

По диграфу системы (3) ее индекс каузальности между входом u_j и выходом y_i определяется как уменьшенное на единицу число дуг в маршруте наименьшей длины между вершинами u_j и y_i. Индексы каузальности по выходу y_i и в целом системы определяются после этого согласно (6) и (7).

В данном случае в соответствии с этим правилом по приведенному выше диграфу системы получаем ее матрицу индексов каузальности по входу $u(t)$

$$K^u=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Процедура вычисления индексов каузальности по диграфу системы может быть заменена вычислением этих показателей по ***матрицам достижимости***, формируемым из ***матрицы смежности*** системы. Последняя для систем с вход-выходной моделью (3) представляет собой квадратную булеву матрицу размера $\alpha\times\alpha$, где $\alpha=n+m+p$, вида

$$E=\left[\begin{array}{c:c:c} \bar{A}_{nn} & \bar{B}_{nm} & 0_{np} \\ \hdashline 0_{mn} & 0_{mm} & 0_{mp} \\ \hdashline \bar{C}_{pn} & \bar{D}_{pm} & 0_{pp} \end{array}\right]. \qquad (10)$$

Индексы в (11) указывают на размерность соответствующих блочных матриц, например, $\bar{B}_{nm}$ – матрица размерности $m \times n$. В случае, когда в (3) $D=0$, вместо матрицы $\bar{D}_{pm}$ в (10) вводится нуль-матрица 0_{pm}.

Матрицы достижимости SN, $N=1,2,3...$ для рассматриваемого класса систем определяются как

$$SN \stackrel{\Delta}{=} [s_{ij}]_{\alpha\alpha} = ((I_\alpha + E)^N)^* = ((S1)^N)^*, \quad (11)$$

где I_α – единичная $\alpha \times \alpha$ матрица, а символ «*» означает, что соответствующие преобразования выполняются по правилам двоичной (булевой) арифметики. При этом если в SN элемент $s_{ij}=1$, то это означает, что от вершины V_j к вершине V_i имеется минимум один маршрут длины N, т. е. состоящий из N дуг. При $s_{ij}=0$ такие маршруты отсутствуют.

Если матрицы достижимости SN системы с моделью вида (3), определенные согласно (11), представить в виде

$$SN = \begin{bmatrix} SN_{nn} & \vdots & SN_{nm} & \vdots & 0_{np} \\ 0_{mn} & \vdots & I_{mm} & \vdots & 0_{mp} \\ SN_{pn} & \vdots & SN_{pm} & \vdots & I_{pp} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

то индексы каузальности системы будут определяться блочными матрицами SN_{pm}, $N = \in \overline{1,n}$. В частности, индекс каузальности системы по входу u_j и выходу y_i определяется как

$$k_{ij} = q - 1,$$

где q – наименьшая степень в $SN=((S1)^q)^*$, при которой в матрице SN_{pm} (i,j)-й элемент равен единице. Индексом каузальности k_i системы по выходу y_i будет уменьшенное на единицу значение q, при котором в i-й строке SN_{pm} впервые появится отличный от нуля элемент, а индексом каузальности всей системы в целом – уменьшенное на единицу значение q, при котором в SN_{pm} впервые появится отличный от нуля элемент. Если же во всем множестве SN_{pm}, $N = \in \overline{1,n}$ какой-либо (i,j)-й элемент остается равным нулю, то это означает, что любое изменение входного воздействия u_j не приводит к изменениям выходной переменной y_i системы. В таком случае соответствующий этой вход-выходной связи индекс каузальности k_{ij} следует принять равным бесконечности.

В частности, для приведенной модели линейной системы (3) с матрицами параметров, указанными в (8), получаем в соответствии с (11), (12)

$$S1_{pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; S2_{pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; S3_{pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S4_{pm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \; S5_{pm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \; S6_{pm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и уже определенную ранее матрицу индексов каузальности системы (9).

Для вычисления индексов каузальности линейных многомерных по входу и выходу систем, процессы в которых описываются уравнениями (3), можно использовать и специальное программное обеспечение [17], в основу которого положено описанное выше вычисление индексов каузальности по матрицам смежности и достижимости.

Использование индексов каузальности при решении задач схемотехнического проектирования систем автоматического управления

Очевидно, что знание индексов каузальности управляемого объекта между всеми входными управляющими, возмущающими воздействиями и выходными управляемыми переменными дает полное представление обо всех внутренних взаимосвязях указанного множества переменных в данном объекте. Более того, индекс каузальности по каждому вход-выходному каналу объекта отражает меру инерционности этого канала в указанном выше смысле. По этой причине предварительная количественная оценка индексов каузальности объекта управления может позволить при разработке системы управления данным объектом выбрать наиболее эффективные ее схемотехнические решения.

Особенно это важно учитывать при разработке САУ для сложных многомерных по входу и выходу многорежимных объектов управления. К таковым с полным основанием можно отнести, например, многие производственные установки в химической промышленности, современные подвижные объекты. Причем последние, с целью обеспечения их живучести, более высоких тактико-технических данных, проектируются с заведомо избыточной размерностью вектора управления по сравнению с размерностью вектора управляемого выхода [16]. Например, в американском космическом аппарате Шаттл для управления трехмерной угловой ориентацией в космическом пространстве (при трехмерном векторе управляемых переменных) имеется возможность аппаратно реализовать 64 управляющих воздействий – вращающих моментов относительно одной какой-либо строительной оси аппарата.

Схемотехническое проектирование САУ, проводимое на этапе технического предложения, направлено на выбор ее структуры для всех режимов функционирования (причем, часто не только штатных), принципов управления каждой управляемой переменной объекта управления (ОУ) в этих режимах, на аппаратную реализацию составных частей САУ.

Матрица индексов каузальности может быть положена в основу выбора используемых управляющих воздействий в каждом сепаратном канале управления.

В наиболее простом случае, когда размерность векторов управления $u(t)$ и управляемого выхода $y(t)$ одинакова, а матрица $K^u=[k^u_{ij}]_{pm}$ недиагональна, предпочтение следует отдавать такому схемотехническому решению, при котором индексы каузальности между управляющими воздействиями и управляемыми переменными в сепаратных каналах имеют наименьшие возможные значения. Именно этот вариант является наиболее привлекательным по той причине, что в создаваемой САУ будут обеспечены условия для ее наибольшего быстродействия. Выбор иного варианта схемотехнического решения может быть обусловлен, например, лишь тем, что при более предпочтительном по быстродействию варианте не достижимы все требуемые области вариации управляемых переменных объекта.

Если же размерность вектора $u(t)$, который может быть использован для управления выходом $y(t)$, превышает размерность последнего (что часто встречается на практике в силу особенностей самого объекта управления или специально организуется для обеспечения заданных свойств разрабатываемой САУ), то схемотехническое решение системы автоматического управления, как правило, далеко не единственно.

Проиллюстрируем это на примере, когда матрица индексов каузальности объекта управления соответствует вышеприведенному расчетному значению, т. е.

$$K^u = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

В этом случае управление u_3 не может быть использовано для управления второй переменной вектора выхода $y(t)$. Для управления этой переменной более предпочтительно из соображений быстродействия разрабатываемой САУ использование управляющего воздействия u_1. Но это же управление является наилучшим в этом смысле и для управления выходом $y_1(t)$. По этой причине, какие из управлений выбрать для каждого из сепаратных каналов САУ, следует решать с учетом других факторов, в частности, обеспечивают ли эти управления заданные диапазоны управляемых переменных, каков уровень перекрестных связей будет при выбранном варианте схемотехнического решения. В ситуациях, когда с помощью одного управляющего воздействия не обеспечивается заданный диапазон какой-либо выходной переменной в системе, можно использовать для соответствующего канала управления два и даже большее число управляющих воздействий. В таком случае предпочтение следует отдавать при возможности выбора тем управлениям, индексы каузальности по которым имеют меньшие значения.

Оценка функциональной воспроизводимости системы управления по ее индексам каузальности

Среди типовых задач управления динамическими объектами важное место занимают слежение за входным сигналом – заранее неизвестной функцией времени, а также программное, финитное и терминальное управление. В настоящее время при проектировании САУ, реализующих подобные режимы, основное внимание уделяется оценке их точностных и динамических свойств по традиционным прямым или косвенным показателям качества (таким как ошибка регулирования, величина перерегулирования, колебательность и т. п.). В то же время накладываемые на траектории движения в пространстве состояния и выхода управляемого объекта ограничения, определяемые свойствами последнего и САУ в целом, остаются обычно в лучшем случае мало исследованными.

Установлено, что точностные возможности систем автоматического управления при решении перечисленных выше типовых задач управления в существенной мере предопределяются ***функциональной воспроизводимостью*** этих систем. Под ней понимают способность таких систем реализовывать заданного класса временные функции в качестве своих выходов при возможных в них начальных условиях и входных воздействиях. Данное свойство представляет несомненный практический интерес, так как очерчивает класс реализуемых без заметных искажений командных (задающих) воздействий и с полным основанием может быть отнесено к числу основных фундаментальных свойств управляемых объектов и систем управления.

В зависимости от условий, налагаемых на начальное состояние системы, и класса функций, подлежащих воспроизведению на ее выходе, различают сильную и слабую функциональную воспроизводимость [18]. При этом ***сильную функциональную воспроизводимость*** системы определяют как ее способность реализовывать на выходе все непрерывные функции $\psi{:}I\to P^p$ при любом заданном $x_0=x(t_0)$. Она имеет место в линейных динамических системах, процессы в которых описываются уравнениями (3), тогда и только тогда, когда при непрерывном входе $\upsilon{:}I\to R^m$ и $t\in I$

$$\operatorname{rank} D(t) = p. \tag{13}$$

Таким образом, сильная функциональная воспроизводимость может иметь место в линейных динамических системах лишь в тех случаях, когда эти системы относятся к классу каузальных по всем своим выходам. В этом классе систем входные воздействия $u(t)$ должны влиять на ее выходы непосредственно, а не только через динамическую часть системы. При этом индексы каузальности k_i, $i\in\overline{1,p}$, определенные по всем выходам системы при $x(t_0)=x_0$ на всем интервале $t\in I$, должны быть равными нулю. Для тех выходов $y_i(t)$, $i\in\overline{1,p}$, у которых $k_i\neq 0$, сильная функциональная воспроизводимость в указанном выше смысле недостижима ни при каких входных воздействиях $\upsilon{:}I\to R^m$. Аналогичный вывод можно сделать и относительно строго каузальных линейных динамических систем, т. е. таких систем, у которых $D(t)\equiv 0$. Именно к этому классу систем и относится абсолютное большинство управляемых объектов и систем автоматического управления.

Следует заметить, что требование сильной функциональной воспроизводимости (13) применительно к объектам и системам автоматического управления является в большинстве конкретных случаев неоправданно завышенным. Действительно, реальные объекты и системы в процессе своего функционирования поддерживают свои переменные в некоторых ограниченных пределах, т. е. $x(t)\in X\subset R^n$, $u(t)\in U\subset R^m$, а не в целом в R^n и R^m. Кроме того, от САУ далеко не всегда по условиям их эксплуатации требуется высокопрецизионное воспроизведение заданных траекторий $y^*(t)$ во всем пространстве R^p. К тому же эти траектории не обязательно должны быть произвольными по характеру и темпам изменений во времени. Чаще всего в качестве обеспечиваемых выходов $\psi{:}I\to R^p$ в непрерывных системах по условиям их эксплуатации вполне допустимы лишь гладкие функции, имеющие непрерывные по времени производные до k-го порядка, т. е. можно допускать $\psi{:}I\to Y\in S^{k,p}$, где под $S^{k,p}$ при $k\geq 1$ понимается множество всех векторных аналитических функций размерности p, имеющих ненулевые производные до k-го порядка, т. е. принадлежащих классу C^k. Подобный класс воспроизводимых функций характерен, в частности, для многих систем программного управления технологическим оборудованием, например станков, роботов, где управлению подлежат движения рабочих инструментов по заданным непрерывным пространственным траекториям.

Наконец, начальное состояние системы не обязательно должно быть фиксированным заранее. В некоторых случаях можно допустить его «плавание» в пределах $x\in X$ или зависимость от вида воспроизводимого выхода системы.

При указанных выше допущениях относительно начальных условий и класса воспроизводимых функций следует говорить о слабой функциональной воспроизводимости вход-выходных систем. При этом под ***слабой функциональной воспроизводимостью*** класса C^k при $k\geq 1$ на интервале I понимают [18] способность вход-выходной управляемой системы реализовывать любую функцию $\psi\in S^{k,p}(I)$ в качестве выхода за счет выбора соответствующего начального условия из $I\times R^n$ и входа $u(t)$ из $C^{0,m}(I)$.

Очевидно, что класс воспроизводимых системой на выходе функций $y(t)$ зависит от динамических свойств системы и определяет класс необходимых для их реализации управлений $u(t)$.

Так как управляемые объекты в САУ чаще всего строго каузальны, а возможности строго каузальной системы по воспроизведению заданных сигналов на выходе тем выше, чем ниже порядок ее слабой функциональной воспроизводимости, представляет прежде всего интерес, при каких условиях такие объекты и системы могут быть слабо C^1-воспроизводящими в пространствах состояния и выхода, т. е. способными воспроизводить без искажений желаемые непрерывные сигналы (соответственно, $x(t)$ и $y(t)$) с кусочно-непрерывными первыми производными по времени.

Если в строго каузальной и стационарной системе (3) (при $D\equiv 0$) управление $u(t)\in U\subset C^{1,m}$, т. е. кусочно-непрерывно, то согласно [19] такая система будет обладать слабой функциональной C^1-воспроизводимостью в пространстве состояний тогда и только тогда, когда

$$rank\ B = n, \tag{14}$$

т. е. когда управление $u\ (t)$ способно воздействовать непосредственно на все компоненты вектора $\dot{x}(t)$. Слабой функциональной C^1-воспроизводимостью на целевой траектории $y^*(t)$ в пространстве Y при кусочно-непрерывных управлениях из U данная система обладает согласно [19] тогда и только тогда, когда

$$p \leq m; \quad \mathrm{rank}CB = p. \tag{15}$$

В связи с тем, что порядок системы, как правило, превышает размерность вектора выхода системы, т. е. $n>p$, можно сделать заключение, что данное свойство в таких системах может быть достигнуто (и то не всегда) лишь при условии использования в них управлений избыточной размерности. В этом случае может оказаться, что будут такие схемотехнические решения, при которых окажутся выполненными условия (14) и/или (15).

Заключение

Каузальность управляемых объектов и систем автоматического управления правомерно отнести к группе таких их фундаментальных свойств, как управляемость, наблюдаемость, восстанавливаемость, достижимость и возмущаемость (УНВДВ). Все эти свойства фактически однотипно оцениваются как на бинарном уровне (обладает данным свойством объект или система или же нет), так и индексами [13], подобными определенным выше индексам каузальности. В совокупности индексы каузальности и индексы структурных УНВДВ образуют так называемые структурные инварианты управляемых динамических систем, и все они могут быть определены для линейных систем по их матрицам смежности и достижимости [20].

Практический интерес к перечисленным выше фундаментальным свойствам управляемых объектов и систем, в том числе и к каузальности, обусловлен их явно выраженным влиянием на разрешимость многих задач автоматического управления объектами и достижимые при этом результаты. Оценка этих свойств у объектов и систем обычно проводится не на этапе анализа уже спроектированной системы, а на этапах предпроектных исследований или схемотехнического и параметрического синтеза, когда имеется возможность изменять (подстраивать) параметры системы, и важно знать, возможно ли в принципе выбрать их так, чтобы обеспечивались заданные свойства и характеристики в разрабатываемой системе.

Индексы каузальности многомерного динамического объекта не только отражают структуру их вход-выходных взаимосвязей, но и характеризуют инерционные свойства каждой из этих связей.

Предпроектная оценка каузальности объекта управления, как следует из текста данной статьи, позволяет успешно решать при разработке для такого объекта системы автоматического управления важные задачи при выборе схемотехнического решения САУ, при оценке ее функциональной воспроизводимости и потенциально реализуемых в пространстве состояний и выхода САУ траекторий изменения, соответственно, состояний системы и ее управляемых переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feintuch A., Saeks R. System Theory: A Hilbert Space Approach. – New York: Academic press, 1982. – 310 p.
2. Криштал И.А. Спектральный анализ каузальных операторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 2003. – 112 с.
3. Youla D.C., Carlin H.L., Castriota L.J. Bounded Real Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory // IRE Trans. Circuit Theory CT-6. – 1959. – P. 102–124.
4. Willems J.C. Stability, Instability, Invertibility and Causality, SIAM J. Control. – 1969. – V. 7. – № 4. – P. 645–671.
5. DeSantis R.M. Causality, Strict Causality and Invertibility for Systems in Hilbert Resolution Space // SIAM J. Control. – 1974. – V. 12. – № 3. – P. 536–553.
6. Commault C., Lafay J.F., Malabre M. Structure of linear systems. Geometric and transfer matrix approaches // Kybernetika. – 1991. – V. 27. – № 3. – P. 170–185.
7. Hammer J. Stabilisation of non-linear systems // Int. J. Control. – 1986. – V. 44. – № 5. – P. 1349–1381.
8. Hammer J. Robust stabilisation of non-linear systems // Int. J. Control. – 1989. – V. 49. – № 2. – P. 629–653.
9. Chan J.-T., Wei L.-F. Adaptive multi-channel signal tracking controller for minimum or nonminimum phase systems // Int. J. Control. – 1989. – V. 50. – № 1. – P. 65–73.
10. Rao S.K., Chen C.-T. Design of minimal-degree compensators with assignable poles or structure // Automatica. – 1987. – V. 23. – № 2. – P. 241–245.
11. Lee H.G., Aropostathis A., Mareus S.I. Linearisation of discrete-time systems // Int. J. Control. – 1987. – V. 45. – № 5. – P. 1803–1822.
12. Roppenecker G., Lohmann B. Vollstandige Modale Synthese von Entkopplungsregelungen // Automatisierungstechnik. – 1988. – V. 36. – № 11. – S. 434– 441.
13. Малышенко А.М. Определение индексов каузальности управляемых динамических систем // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 32–36.
14. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
15. Hirschorn R.M., Davis J.H. Global output tracking for nonlinear systems // SIAM J. Control and Optimization. – 1988. – V. 26. – № 6. – P. 1321–1330.
16. Малышенко А.М. Системы автоматического управления с избыточной размерностью вектора управления. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2005. – 302 с.
17. Малышенко А.М., Рыбаков Е.А., Кочеткова Е.А. Программное обеспечение для расчета индексов каузальности линейных вход-выходных динамических систем. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2013619662 от 11.10.2013 г.
18. Grasse K.A. Sufficient conditions for the functional reproducibility of time-varying, input-output systems // SIAM J. Control and Optimization. – 1988. – V. 26. – № 1. – P. 230–249.
19. Wohltmann H.-W. A note Aoki's conditions for path controllability of continuous-time dynamic economic systems // Review of Economic Studies. – 1984. – V. 51. – № 2. – P. 343–349.
20. Малышенко А.М. Определение индексов каузальности, структурных управляемости, наблюдаемости, достижимости и восстанавливаемости линейных динамических систем // Вестник науки Сибири. – 2011. – № 1 (1). – С. 374–378. URL: http://sjs.tpu.ru/journal/article/view/77/124 (дата обращения: 12.11.2013).

Поступила 25.10.2013 г.

UDC 681.51.01

DYNAMIC SYSTEMS CAUSALITY INDICES AND THEIR USE IN SCHEMATIC DESIGN AND IN FUNCTIONAL REPRODUCIBILITY ASSESSMENT OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

A.M. Malyshenko

Tomsk Polytechnic University

The author has defined the causality properties essence of input-output systems; it contains qualimetry, using the causality indices suggested before by the author. The paper introduces the information on calculation of these indices by the system digraph, by its adjacency and reachability matrices, as well as for the case of linear dynamic systems where the processes are described by mathematical models with continuous and discrete time, using software developed with the author participation. The way the indices of causality of input and output multidimensional objects can be used in schematic design of control systems (ACS) for them, as well as when estimating strong and weak functional reproducibility of managed objects and ACS is shown.

Key words:
Causality, indices of causality and their definition, input-output dynamic system, automatic control system, schematic design, assessment, strong and weak functional reproducibility.

REFERENCES

1. Feintuch A., Saeks R. *System Theory: A Hilbert Space Approach*. New York, Academic press, 1982. 310 p.
2. Krishtal I.A. *Spektralny analiz kauzsalnykh operatorov*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Spectrum analysis of causality operators. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Voronezh, 2003. 112 p.
3. Youla D.C., Carlin H.L., Castriota L.J. Bounded Real Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory. *IRE Trans. Circuit Theory CT-6*, 1959, pp. 102–124.
4. Willems J.C. Stability, Instability, Invertibility and Causality. *SIAM Journal Control*, 1969, vol. 7, no. 4, pp. 645–671.
5. DeSantis R.M. Causality, Strict Causality and Invertibility for Systems in Hilbert Resolution Space. *SIAM J. Control*, 1974, vol. 12, no. 3, pp. 536–553.
6. Commault C., Lafay J.F., Malabre M. Structure of linear systems. Geometric and transfer matrix approaches. *Kybernetika*, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 170–185.
7. Hammer J. Stabilisation of non-linear systems. *Int. J. Control*, 1986, vol. 44, no. 5, pp. 1349–1381.

8. Hammer J. Robust stabilisation of non-linear systems. *Int. J. Control*, 1989, vol. 49, no. 2, pp. 629–653.
9. Chan J.-T., Wei L.-F. Adaptive multi-channel signal tracking controller for minimum or nonminimum phase systems. *Int. J. Control*, 1989, vol. 50, no. 1, pp. 65–73.
10. Rao S.K., Chen C.-T. Design of minimal-degree compensators with assignable poles or structure. *Automatica*, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 241–245.
11. Lee H.G., Aropostathis A., Mareus S.I. Linearisation of discrete-time systems. *Int. J. Control*, 1987, vol. 45, no. 5, pp. 1803–1822.
12. Roppenecker G., Lohmann B. Full modal synthesis of independent control [Vollstandige Modale Synthese von Entkopplungsregelungen]. *Automatisierungstechnik*, 1988, vol. 36, no. 11, pp. 434– 441.
13. Malyshenko A.M. *Opredelenie indeksov kauzalnosti upravlyaemykh dinamicheskikh system* [Determination of causality indexes of controlled dynamic systems]. *Izvestiya SA USSR. Technical cybernetics*, 1990, no. 1, pp. 32–36.
14. Streits V. *Metod prostranstva sostoyaniy v teorii diskretnykh lineynykh system upravleniya* [Method of state spaces in theory of digital linear control systems]. Moscow, Nauka, 1985. 296 p.
15. Hirschorn R.M., Davis J.H. Global output tracking for nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 1988, vol. 26, no. 6, pp. 1321–1330.
16. Malyshenko A.M. *Sistemy avtomaticheskogo uprevleniya s izbytochnoy razmernostyyu vektora upravleniya* [Automatic control systems with redundant dimension of control vector]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2005. 302 p.
17. Malyshenko A.M., Rybakov E.A., Kochetkova E.A. *Programmnoe obespechenie dlya rascheta indeksov kauzalnosti lineynykh vkhod-vykhodnykh dinamicheskikh sistem* [Software for calculating causality indexes of linear input-output dynamic systems]. State registration certificate of computer program № 2013619662, 2011.
18. Grasse K.A. Sufficient conditions for the functional reproducibility of time-varying, input-output systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 1988, vol. 26, no. 1, pp. 230–249.
19. Wohltmann H.-W. A note Aoki's conditions for path controllability of continuous-time dynamic economic systems. *Review of Economic Studies*, 1984, vol. 51, no. 2, pp. 343–349.
20. Malyshenko A.M. Opredelenie indeksov kauzalnosti, strukturnykh uravlyaemosti, dostizhimosti i vosstanavlevoemosti lineynykh dinamicheskikh system [Definition of causality indices, structural features of controllability, observability, reachability and restorability of linear dynamic systems]. *Siberian Journal of Science*, 2011, no. 1 (1), pp. 374–378. URL: http://sjs.tpu.ru/journal/article/view/77/124 (accessed 12 November 2013).

УДК 621.396.969

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ СОВРЕМЕННЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ В ПАССИВНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Е.В. Рогожников, Д.Н. Ушарова, А.В. Убайчин

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: udzhon@mail.ru

Рассматриваются особенности использования сигналов современных телекоммуникационных систем в пассивных радарах. В качестве зондирующих могут быть использованы сигналы современных систем связи 4-го поколения, WiMAX, LTE, а также сигналы цифрового телевидения по стандарту DVB-T2. Рассмотрена структура кадров перечисленных систем, приведены основные параметры сигналов, такие как полоса, длительность импульса, мощность на выходе передатчика, диапазон частот, в котором работает система. Приведены основные факторы, влияющие на дальность действия системы, а также значения эффективной поверхности рассеяния целей, которые могут быть обнаружены. Получены зависимости дальности действия системы от эффективной поверхности рассеяния цели при работе по сигналам WiMAX, LTE и DVB-T2. Описаны достоинства и недостатки сигналов перечисленных систем при использовании их в пассивных радарах.

Ключевые слова:
Телекоммуникационная система, пассивная радиолокационная система, дальность действия, структура кадра, сигнал синхронизации, эффективная поверхность рассеяния, разрешающая способность по дальности.

Введение

Поверхность планеты окружает огромное множество радиосигналов различного назначения: радиовещание, сотовая связь, телевидение, сигналы спутниковой навигации, сигналы радиорелейных линий связи. Передача телекоммуникационных и других перечисленных сигналов осуществляется по беспроводным каналам связи, в результате чего при распространении сигналы отражаются от множества объектов на трассе распространения. Таким образом, сигналы известных источников могут быть использованы для получения радиолокационной информации в пассивных радиолокационных системах. Для использования в пассивных радиолокационных системах сигналы перечисленных выше источников должны обладать следующими характеристиками:

- для выполнения обнаружения сигналы должны быть известными, для достаточной разрешающей способности по времени сигналы должны иметь полосу более 1 МГц;
- системы, сигналы которых используются в пассивной системе радиомониторинга, должны иметь антенны с широкой диаграммой направленности;