УДК 681.5.011

КВАЛИМЕТРИЯ ДОСТИЖИМОСТИ И ВОЗМУЩАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Воронин

Томский политехнический университет
E-mail: voroninav@tpu.ru

Рассматриваются некоторые существующие количественные оценки управляемости и достижимости, и отмечаются их недостатки с точки зрения применимости данных оценок для решения задач синтеза систем управления. Отмечается, что существующие показатели не учитывают компромиссного характера требований к системе управления, которые включают не только хорошую отработку управляющих воздействий, но и слабую реакцию на возмущения. Отмечено, что для оценки этих свойств необходимо использовать различные количественные и структурные показатели, отражающие взаимосвязь внешних воздействий и реакций системы. С этой целью предложено сформировать на основе граммианов управляемости и достижимости два типа количественных показателей «вход–состояние» исходя из задач терминального управления и задач синтеза слабовозмущаемых систем. Подобный же подход может быть реализован и на основе использования структурных характеристик.

Ключевые слова:
Количественный анализ, управляемость, линейные динамические системы, форма Хессенберга, меры управляемости, структурные индексы.

Введение

Управляемость и достижимость относятся к фундаментальным понятиям современной теории автоматического управления. Анализ этих свойств объекта управления позволяет делать выводы о возможности или невозможности его перевода из одного состояния в другое, т. е. в конечном счете, о возможности реализации заданных процессов в объекте и эффективности управления.

Вместе с тем интуитивно ясно, что объект в целом или отдельное направление в пространстве состояний могут быть не только, например, управляемыми или неуправляемыми, но и «хорошо управляемыми» или «плохо управляемыми», т. е. бинарная оценка указанных выше свойств, при практическом анализе и синтезе систем автоматического управления (САУ), явно недостаточна. Количественные оценки управляемости объекта могли бы быть полезны, например, при сравнительном анализе различных вариантов реализации исполнительных устройств с целью выбора наиболее эффективного.

Известно несколько вариантов количественных показателей управляемости и достижимости линейных объектов [1–3]. Подавляющее большинство исследователей понимают их как характеристики взаимосвязи двух множеств – множества U входных воздействий на систему и множества X ее состояний, т. е. как характеристики «вход–состояние», предполагая в общем случае, что чем теснее (в некотором смысле) связь U и X, тем более управляема либо достижима система. Основные различия предлагаемых показателей кроются как раз в различных способах количественных измерений этих связей. При этом существенными недостатками большинства указанных работ является абсолютизация предлагаемых показателей, а также анализ количественных аспектов рассматриваемых характеристик вне связи с задачами синтеза систем управления.

Количественные меры управляемости и достижимости

Пусть система описывается матричным линейным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad (1)$$

где $x \in X \subset R^n$, $u \in U \subset R^m$ – векторы состояния и управления системы, соответственно. В дальнейшем для данной модели будем использовать достаточно употребительное обозначение $\Sigma(A,B)$.

Введение количественных мер требует уточнения понятий «управляемость» и «достижимость» системы $\Sigma(A,B)$, а также отдельного состояния x_0 в том смысле, как они будут пониматься в дальнейшем.

Будем считать, что система $\Sigma(A,B)$ управляема, если пространство состояний X не содержит неуправляемых состояний. Состояние системы $x_0=x(0)$ управляемо, если из него система может быть переведена в начало координат $x(T)=0$ за конечное время T при конечных затратах энергии управления. Система частично управляема, если X содержит как управляемые, так и неуправляемые состояния.

Следует отметить, что использованное понятие «частичная управляемость» эквивалентно понятию «неуправляемость» в бинарном смысле. Из данного определения следует также, что свойство управляемости системы связано с возможностью решения для нее определенной финитной задачи, т. е. задачи перевода системы из одного состояния в другое.

Свойство достижимости отличается от свойства управляемости лишь тем, что рассматривается перевод системы из начала координат в состояние $x(T)$. При качественном анализе для непрерывных линейных систем свойства управляемости и достижимости обычно не разделяют, т. к. управляемая система или состояние достижимы и наоборот. При количественном анализе показатели управляемости и достижимости могут принципиально различаться.

Одним из наиболее известных методов количественного оценивания управляемости и достижимости линейных динамических систем является использование граммианов – матриц управляемости $W_u(0,T)$ и достижимости $W_к(0,T)$ первого рода

$$W_u(0,T)=\int_0^T \Phi(0,t)BB^t\Phi^t(0,t)dt; \quad (2)$$

$$W_r(0,T)=\int_0^T \Phi(T,t)BB^t\Phi^t(T,t)dt; \quad (3)$$

Известно, что если рассматривается перевод системы (1) из состояния $(0,x_0)$ в состояние (T,x_1) оптимальным по расходу на управление образом, а именно ставится задача минимизации функционала

$$J_1=\int_0^T u^t(t)u(t)dt, \quad (4)$$

то экстремум функционала (4) при x_1=0 для любого x_0 определяется квадратичной формой

$$J_1=x_0^t W_u^{-1}(0,T)x_0, \quad (5)$$

где $W_u(0,T)$ определяется согласно (2).

В [2] предложено ввести показатель управляемости $\chi(x_0,T)$ состояния x_0 как величину, обратную значению квадратичной формы (5)

$$\chi(x_0,T)=1/x_0^t W_u^{-1}(0,T)x_0. \quad (6)$$

Количественная мера (6), определяющая минимум затрат в смысле (4) на перевод системы из состояния x_0 в начало координат за время T, характеризует именно управляемость системы, так как предполагает решение финитной задачи. Данный показатель может быть вычислен только для полностью управляемой системы, поскольку требует обращения матрицы W_u.

Аналогичным образом качество системы, в смысле затрат на управление при переходе из начала координат пространства состояний в состояние x_0, можно связать со свойствами матрицы достижимости $W_r(t_0,t_1)$. При этом количественный показатель достижимости $\xi(x_0,T)$ состояния x_0, определяется по выражению

$$\xi(x_0,T)=1/x_0^t W_r^{-1}(0,T)x_0. \quad (7)$$

Наличие двух показателей $\xi(x_0,T)$ и $\chi(x_0,T)$ для оценки фактически одного свойства динамической системы требует обоснования их применимости.

Пусть система (1) устойчива, и время велико по сравнению с собственными постоянными времени системы. Ясно, что для такой системы затраты на переход в начало координат стремятся к нулю даже независимо от ее управляемости. Соответственно, показатель управляемости $\chi(x_0,T)$ стремится к ∞ и бесполезен для практического применения, так как не несет информации об эффективности управления. В то же время показатель $\xi(x_0,T)$, рассчитанный по матрице достижимости $W_r(t_0,t_1)$, имеет конечное значение.

Совершенно аналогичный результат может быть получен, если матрица состояния модели (1) имеет правый спектр. В этом случае при увеличении T стремится к ∞ показатель $\xi(x_0,T)$, а показатель $\chi(x_0,T)$ является информативным.

При наличии в спектре матрицы A как левых, так и правых полюсов целесообразным представляется формирование комплексирующего показателя на основе как $\chi(x_0,T)$, так и $\xi(x_0,T)$, например, на основе методики, изложенной в [3].

Если мало, по сравнению с собственными постоянными времени системы, динамика объекта слабо влияет на характер процессов и показатели $\chi(x_0,T)$ и $\xi(x_0,T)$ мало отличаются друг от друга.

Количественные меры возмущаемости линейных систем

Рассмотренная постановка финитной задачи не является единственно возможной в процедурах синтеза систем управления. Альтернативным вариантом является, в частности, синтез систем управления, в которых входные возмущающие сигналы слабо влияли бы на вектор состояния объекта $x(t)$. Решение этой задачи также может быть связано с характеристиками «вход–состояние», однако физический смысл показателя, определяющего данное свойство системы, должен быть иным, хотя и близким по смыслу к показателям управляемости и достижимости. Условно назовем данное свойство системы «возмущаемость», так как, характеризуя взаимодействие «вход–состояние», оно не предполагает перевода системы из одного фиксированного состояния в другое, а лишь определяет ее возможное возмущение входным сигналом. Уже из физического смысла задачи следует, что система или переменная, качественно неуправляемая, может быть хорошо возмущаемой по тому же самому набору входных сигналов.

Рассмотрим модель

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Ef(t), \quad (8)$$

где $f(t)\in F\subset R^k$ – вектор возмущающих воздействий. Учитывая, что количественные показатели взаимодействия X и F для задач синтеза слабовозмущаемых систем должны характеризовать возмущаемость как свойство системы изменять свое состояние под действием внешних сигналов, введем определение данного свойства, причем для системы в целом удобнее определить ее невозмущаемость.

Будем считать, что система $\Sigma(A,E)$ невозмущаема, если X не содержит возмущаемых состояний. Состояние системы x_0 является возмущаемым, если оно может быть изменено входным сигналом $f(t)\in F$. Система является частично возмущаемой, если пространство состояний X включает как возмущаемые, так и невозмущаемые состояния.

В качестве количественной меры возмущаемости $\Sigma(A,E)$ по некоторому направлению, заданному вектором x_0, может быть взят предложенный в [2] показатель, имеющий смысл максимума скалярного произведения $<x_0 z>$ по всем $z\subset X$, которые могут быть достигнуты за время T из нулевого начального состояния при единичных в смысле (4) затратах энергии на управление, т. е.

$$r(x_0,T)=\max\left\{\begin{array}{l}<x_0z>: z=\int_0^T \Phi(T,t)Bu(t)dt;\\ \|x_0\|=1;\ \int_0^T u^t(t)u(t)dt=1\end{array}\right\}.$$

Оптимум данного показателя равен

$$r(x_0,T)=(x_0^tW_r(x_0,T)x_0)^{1/2},$$

где $W_r(0,T)$ определяется согласно (3). Избавившись от квадратного корня, сформируем показатель

$$\xi^*(x_0,T)=r(x_0,T)^2=x_0^tW_r(x_0,T)x_0, \qquad (9)$$

который может считаться еще одним, наряду с (7), вариантом количественного взаимодействия пространств X и F, связанным со свойствами матрицы $W_r(0,T)$. Однако этот показатель не связан с решением финитной задачи и не характеризует управляемость системы (8) в том смысле, как это сформулировано выше.

Для невозмущаемого состояния $\xi^*(x_0)=0$, что означает ортогональность вектора x_0 всем z, которые могут быть достигнуты из точки $x=0$ при заданных ресурсах входных воздействий. Для возмущаемых состояний $\xi^*(x_0)>0$.

Важно отметить, что введенная характеристика возмущаемости не связана обязательно с действием на систему возмущающего воздействия. Она может быть рассчитана по любому входу, как возмущающему, так и управляющему. Сам же термин связан с физическим смыслом той взаимосвязи между множествами X и U, которую она определяет.

Использование квадратичных форм (5) и (9) для формирования количественных оценок управляемости и возмущаемости позволяет ввести геометрическую трактовку этих свойств и сформировать показатели для системы в целом. Будем рассматривать свойства квадратичных форм, исходя из того, что значения вектора состояния x выбираются на сфере единичного радиуса $\{x:\|x\|=1\}$. В этом случае выражения (5) и (9) можно интерпретировать как отражения этой сферы на некоторые поверхности второго порядка.

Управляемость $\chi(x,T)$ каждого направления, задаваемого вектором x в пространстве состояний, определяется как величина, обратная модулю вектора точки пересечения этого направления с данной поверхностью. Если система управляема, то поверхность, описываемая выражением (5), является действительным гиперэллипсоидом. В результате такой интерпретации количественный показатель $\chi(x,T)$ приобретает вполне четкий геометрический смысл. Количественные же показатели для системы в целом могут быть связанными с такими инвариантами матриц W_u, W_u^{-1}, как минимальное собственное значение, след или определитель.

Проанализируем общность и различия двух характеристик $\xi(x_0,T)$ и $\xi^*(x_0,T)$ взаимодействия «вход–состояние» на нескольких элементарных примерах. Пусть модель первого порядка имеет вид

$$\dot{x}=-ax+bu,\ a>0.$$

Тогда

$$W(0,T)=\int_0^T e^{-a(T-t)}bbe^{-a(T-t)}dt=\frac{b^2}{2a}(1-e^{-2aT}).$$

Показатель достижимости переменной $x=1$ и системы в целом вычисляется по выражению

$$\xi(0,T)=\frac{1}{x^tW_r^{-1}(0,T)x}=\frac{b^2}{2a}(1-e^{-2aT}).$$

Легко заметить, что численно точно таким же будет для данной системы и показатель возмущаемости, хотя физический смысл показателей различен. Для достижимости это минимум затрат в смысле интеграла от $u^2(t)$ на перевод объекта в единичное состояние. Для возмущаемости это корень квадратный из максимального отклонения при единичных затратах. Как и следовало ожидать, для системы 1-го порядка эти показатели равнозначны.

Перейдем теперь к системе 2-го порядка, заданной в модальном базисе

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-a_1 & 0\\ 0 & -a_2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}u,\ \ a_1,a_2>0.$$

Система управляема при $a_1\neq a_2$. Матрица достижимости имеет вид

$$W_r(0,T)=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{b_1^2}{2a_1}(1-e^{-2a_1T}) & \frac{b_1b_2}{a_1+a_2}(1-e^{-(a_1+a_2)T})\\ \frac{b_1b_2}{a_1+a_2}(1-e^{-(a_1+a_2)T}) & \frac{b_2^2}{2a_2}(1-e^{-2a_2T})\end{pmatrix}, \qquad (10)$$

обратная матрица достижимости –

$$W_r^{-1}(0,T)=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\frac{b_2^2l_2}{2a_2} & \frac{-b_1b_2l_{12}}{a_1+a_2}\\ \frac{-b_1b_2l_{12}}{a_1+a_2} & \frac{b_1^2l_1}{2a_1}\end{pmatrix}.$$

Здесь приняты обозначения

$$l_1=1-e^{-2a_1T},\ l_2=1-e^{-2a_2T},\ l_{12}=1-e^{-(a_1+a_2)T},$$

$$\Delta=\frac{b_1^2b_2^2}{4a_1a_2}l_1l_2-\frac{b_1^2b_2^2}{(a_1+a_2)^2}l_{12}^2.$$

Показатель достижимости первой моды можно записать в виде

$$\xi_1=\frac{b_1^2l_1}{2a_1}-\frac{2b_1^2a_2}{(a_1+a_2)}\frac{l_{12}^2}{l_2}=\hat{\xi}_1-\Delta\xi_1,$$

где $\hat{\xi}_1$ – показатель достижимости данной моды как отдельной системы 1-го порядка, а элемент $\Delta\xi_1$ является добавкой, обусловленной наличием в системе второго собственного движения. Так как для устойчивой системы величина $\Delta\xi_1$ всегда больше нуля, наличие второй моды может лишь уменьшить достижимость ξ_1 по сравнению с тем значением, которое она бы имела как отдельная система первого порядка. Аналогичные выводы можно сделать и относительно влияния первой моды на достижимость второй, так как обе моды равноправны.

Иная картина имеет место для возмущаемости. Из выражения (10) для $W_r(0,T)$ следует, что наличие в системе второго собственного движения не влияет на возмущаемость первой моды, которая равна

$$\xi_1^* = \frac{b_1^2}{2a_1}(1 - e^{-2a_1T}),$$

и не отличается от возмущаемости системы первого порядка.

Структурные характеристики достижимости и возмущаемости

Еще одна группа количественных показателей взаимосвязи множества U входных воздействий на систему и множества X ее состояний для линейной системы (1) может быть сформирована на основе ее структурного анализа. Полное представление о структуре «вход–состояние», с точки зрения количественных мер управляемости и возмущаемости, дает верхняя каноническая блочная форма Хессенберга (БФХ) [4]. Общий вид системы (1) в верхней БФХ

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_k \\ \dot{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1k} & F_{1k+1} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & F_{2k} & F_{2k+1} \\ 0 & F_{32} & F_{33} & \dots & F_{3k} & F_{3k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_{kk} & F_{kk+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_{k+1k} & F_{k+1k+1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_k \\ e_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u,$$

$$y = (C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \dots \quad C_k \quad C_{k+1}) \times$$
$$\times (z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \dots \quad z_k \quad e_k)^t.$$

где либо F_{kk+1}=0, либо $\dim(e_k)$=0.

Структура БФХ соответствует разделению пространства состояний X на подпространства отличающихся структурой управления. В частности, можно рассматривать X как прямую сумму подпространств $L_0, L_1, L_2, \dots, L_k$,

$$L_0 = sp\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 = sp\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, L_k = sp\begin{pmatrix} 0 \\ e_k \end{pmatrix} = N_k.$$

где

$$\dim(L_0) = r_0,\ \dim(L_1) = r_1, \dots, \dim(L_k) = r_k;$$
$$r_0 = m,\ r_0 + r_1 + \dots + r_k = n.$$

Каждое из подпространств L_i включает элементы, структурно эквивалентные по управлению.

Исходя из представления системы (1) в БФХ по управлению можно ввести индексные показатели, характеризующие структурные достижимость и возмущаемость подпространств либо отдельных состояний. Очевидно, наиболее структурно управляемым является подпространство L_0, так как на него непосредственно воздействуют управляющие сигналы. Далее в порядке убывания структурной управляемости следуют подпространства $L_1, L_2, \dots, L_{k-1}$. Подпространство L_k неуправляемо. Примем, что для подпространства L_0 индексный показатель ρ_0 отношений «вход–состояние» равен 1, для L_1–ρ_1=2 и так далее до $\rho_{k-1}=k$ для L_{k-1}.

Рассмотрим задачу перевода системы (1) из начала координат в некоторое состояние x_0. Как показано выше, смысл этой задачи соответствует понятию «достижимость», но в структурном анализе понятия «достижимость» и «управляемость» эквивалентны. Пусть $x_0=x_{\rho h}\oplus x_{\rho h+1}\oplus\dots\oplus x_{\rho p}$, где $x_{\rho i}\in L_i$ и $\rho_h<\rho_{h+1}<\dots<\rho_p$, т. е. x_0 может быть представлен как прямая сумма элементов подпространств L_i. Учитывая физический смысл решаемой задачи, дадим следующее определение индекса структурной управляемости.

Индексом структурной управляемости $\alpha_\chi(x_0)$ состояния x_0 будем считать ρ_p как максимальный индекс элементов, входящих в прямую сумму $x_0=x_{\rho h}\oplus x_{\rho h+1}\oplus\dots\oplus x_{\rho p}$. Если $\rho_p=k$, то индекс управляемости состояния x_0 совпадает с хорошо известным индексом управляемости системы, который в данном случае равен k. Состояние x_0 тем лучше управляется, чем меньше его структурный индекс ρ_p.

Иная структурная оценка отношения «вход–состояние» для того же x_0 и того же самого входа будет получена, если рассматривать его с точки зрения возмущаемости. Наименее структурно возмущаемым подпространством в X является L_k, и далее возмущаемость возрастает по мере уменьшения индекса подпространства ρ. Введем, по аналогии с индексом управляемости, понятие индекса возмущаемости по x_0.

Индексом структурной возмущаемости $\alpha_\chi^*(x_0)$ состояния x_0 будем считать ρ_h как максимальный индекс элементов, входящих в прямую сумму $x_0=x_{\rho h}\oplus x_{\rho h+1}\oplus\dots\oplus x_{\rho p}$. Состояние x_0 тем лучше возмущается, чем меньше его структурный индекс ρ_h.

В литературе известны структурные характеристики, имеющие подобный физический смысл. В частности, в [5] определены индексы каузальности как структурные характеристики «вход–выход» многомерной системы. Легко заметить, что при $x_0=y_i$ смысл индексов каузальности совпадает с введенным выше структурным показателем возмущаемости состояния x_0.

Выводы

Предложенное разделение количественных и структурных мер «вход–состояние» на показатели, имеющие смысл достижимости, и показатели, имеющие смысл возмущаемости, более полно соответствует их роли в процессах управления. Различия между двумя типами показателей становятся особенно заметными при малых интервалах T, когда основную роль начинают играть структурные характеристики – индексы управляемости и возмущаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Muller P.C., Weber H.I. Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems // Automatica. – 1972. – V. 8. – № 3. – P. 237–246.
2. Rhodes I.B. Some quantitative measures of controllability and observability and their implications // Contr. Int. Fed. Autom. Contr. – Kyoto, Japan, 24–28, August 1981. – P. 24–28.
3. Кириллов О.Е., Лисиенко В.Г. Количественный анализ управляемости и его применение к приближенной декомпозиции линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 1. – С. 47–56.
4. Van Dooren P. The generalized eigenstructure problem in linear systems theory // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1981. – V. AC-26. – № 1. – P. 111–129.
5. Малышенко А.М. Определение индексов каузальности управляемых динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 32–36.

Поступила 29.04.2013 г.

UDC 681.5.011

QUALIMETRY OF REACHABILITY AND RESPONSE OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

A.V. Voronin

Tomsk Polytechnic University

The paper considers some existing numerical estimations of controllability and reacability; their disadvantages are stated from the point of view of application of these estimations to solve the control system synthesis tasks. The existing indices do not take into account the compromise character of requirements to the control systems which include not only a good control response attack but weak dynamic response as well. To estimate these features it is necessary to use different quantitative and structural indices which reflect the interaction of external effects and system reactions. The author has proposed to form on the basis of gramians of controllability and reachability two types of «input–state» quantitative indices from the terminal control tasks and the tasks of synthesizing weak-pertubable systems. The similar approach may be implemented as well on the basis of structural characteristic application.

Key words:
Quantitative analysis, controllability, linear dynamic systems, Hessenberg representation, controllability measures, structural indices.

REFERENCES

1. Muller P.C., Weber H.I. Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems. *Automatica*, 1972, vol. 8, no. 3, pp. 237–246.
2. Rhodes I.B. Some quantitative measures of controllability and observability and their implications. *Contr. Int. Fed. Autom. Contr*. Kyoto, Japan, 1981, pp. 24–28.
3. Kirillov O.E., Lisienko V.G. Kolichestvenny analiz upravlyaemosti i ego primeneniye k priblizhennoy dekompozitsii lineynykh dinamicheskikh system [The quantitative analysis of controllability and its application to approximate decomposition of linear dynamic systems]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1997, no. 1, pp. 47–56.
4. Van Dooren P. The generalized eigenstructure problem in linear systems theory. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 1981, vol. AC-26, no. 1, pp. 111–129.
5. Malyshenko A.M. Opredeleniye indeksov kauzalnosti upravlyaemykh dinamicheskikh system [Definition of causality indices of operated dynamic systems]. *Bulletin of the AS of the USSR. Technical cybernetics – Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1990, no. 1, pp. 32–36.