

**АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ЖИДКОСТЬ-ДЕФОРМИРУЕМОЕ ТЕЛО**

С.В. Белов, А.П. Жуков, А.В. Бельков

Научный руководитель: старший научный сотрудник, д.ф.-м.н. С.В. Пономарев
НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru

CONJUGATE PROBLEM SOLUTION ALGORITHM FOR FLUID-DEFORMABLE BODY SYSTEM

S.V. Belov, A.P. Zhukov, A.V. Belkov

Scientific Supervisor: Dr. S.V. Ponomarev
Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
National Research Tomsk State University Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru

***Abstract.** This paper describes the conjugate problem solution algorithm via subproblems which, in its turn, are based on physical principles, discrete movable boundaries, specific boundary and conjugation conditions.*

Введение. Появление интереса к сопряженным задачам в первую очередь было обусловлено необходимостью дальнейшего совершенствования конструкций твердотопливных ракетных двигателей [1-5]. При постановке сопряженной задачи существуют, по крайней мере, две области пространства, заполненные средами с различным физическим поведением. Для описания состояния таких сред используются различающиеся наборы физических величин, дифференциальных уравнений, граничных условий. На границе раздела среды взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие математически формулируется в виде условий сопряжения, представляющих условия неразрывности на границе сил, температур, тепловых потоков и т.д. Граница раздела сред может перемещаться и деформироваться, что должно учитываться при постановке задачи.

Метод расчета. Для подвижной области жидкости $\Omega_{ж}(t)$, имеющей границу $\partial\Omega_{ж}(t)$, законы сохранения записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{ж}(t)} W(t) d\Omega + \int_{\partial\Omega_{ж}(t)} \bar{Q}_W(t) \cdot d\bar{S} = 0,$$

где $W(t)$ – принимает значения плотности, компонент скорости, энергии; $\bar{Q}_W(t)$ – вектор плотности поток величины W через элемент dS границы $\partial\Omega_{ж}$. Вектор плотности потока $\bar{Q}_W(t) = W(t) \cdot \bar{\nu} \cdot (\bar{\nu} - \bar{\nu}_r) + \bar{\xi}(P, \nu, \mu)$, где $\bar{\nu}, \bar{\nu}_r$ – скорость жидкости и скорость границы; $\bar{\xi}$ – слагаемое, обусловленное граничным взаимодействием, P, μ – давление и вязкость.

При переходе к эйлеровому описанию граница $\partial\Omega_{ж}$ неподвижна. Решение на временном отрезке $[t, t+\Delta t]$ ищется при условиях $\nu = \nu_r$ на $\partial\Omega_{ж}$ и $\frac{d\Omega_{ж}(t)}{dt} = \int_{\partial\Omega_{ж}(t)} \bar{\nu}_r \cdot d\bar{S}$.

Нестационарное напряженно-деформированное состояние твердого тела, занимающего область Ω_T с границей $\partial\Omega_T$ описывается системой уравнений:

$$\rho_T \ddot{u}_i = \left(\sigma_{ij} (\delta_{ij} + u_{i,j}) \right)_{,k}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{l,i} u_{l,j}); \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{lm});$$

где ρ_T – плотность; u – вектор перемещения точки твердого тела; σ и ε – тензоры напряжений и деформаций. На границе $\partial\Omega_T$ ставятся условия Дирихле (перемещения) и условия Неймана (напряжения). В области Ω_T ставятся нулевые начальные условия.

На границе раздела сред Γ ($\Gamma = \partial\Omega_{ж} \cap \partial\Omega_T$) ставятся условия сопряжения

$$v(x,t) = \dot{u}(x,t), \quad x \in \Gamma(t), \quad \sigma_{ж} n = \sigma_T n, \quad x \in \Gamma(t).$$

Для численного решения сопряженной задачи области $\Omega_{ж}$ и Ω_T покрываются сетками. Решения представляются векторами узловых значений V, P, U, \dot{U} , причем $v \rightarrow V, P \rightarrow P, u \rightarrow U, \dot{u} \rightarrow \dot{U}$. Алгоритм решения сопряженной задачи на временном отрезке $[t, t+\Delta t]$ имеет следующий вид:

1. На момент времени t , из предыдущего расчета, известны вектора V^t, P^t, U^t, \dot{U}^t , а также граница Γ^t .

2. Решается подзадача течения жидкости в области $\Omega_{ж}(t)$ и исходя из V^t, P^t и Γ^t рассчитываются $V^{t+\Delta t}$ и $P^{t+\Delta t}$, используя в качестве условий на Γ^t соответствующие компоненты вектора \dot{U}^t .

3. Из $V^{t+\Delta t}$ и $P^{t+\Delta t}$ находится вектор поверхностных узловых сил $F^{t+\Delta t}$, действующих со стороны жидкости на твердое тело на поверхность Γ^t .

4. Решается подзадача упругости в области $\Omega_T(t)$, использующая в качестве условий Неймана силы $F^{t+\Delta t}$, результатами являются $U^{t+\Delta t}, \dot{U}^{t+\Delta t}$ и граница $\Gamma^{t+\Delta t}$.

5. Если выполняется условие $|X^{t+\Delta t} - X^t| < \varepsilon$, где X – вектора V и P , то решение сопряженной задачи в момент времени $t+\Delta t$ считается найденным. В противном случае делается переход к п.2, причем вектора V, P, U и граница Γ возвращаются к V^t, P^t, U^t и Γ^t , но для \dot{U} сохраняется состояние $\dot{U}^{t+\Delta t}$.

6. Выполняется переход $\Omega_{ж}(t) \rightarrow \Omega_{ж}(t+\Delta t)$ путем корректировки граничных узлов ($\Gamma^t \rightarrow \Gamma^{t+\Delta t}$), последующим смещением внутренних узлов сетки и интерполяцией решения со старой сетки (t) на новую сетку ($t+\Delta t$).

На шестом шаге алгоритма для обновления положений внутренних узлов сетки применялся метод на основе решения эллиптических уравнений. Для этого в области $\Omega_{ж}$ ставилась задача упругости, а на границе $\partial\Omega_{ж}$, которая включает Γ , ставились условия Дирихле в виде перемещений граничных узлов, определенных из решения задачи упругости для области Ω_T (четвертый шаг алгоритма).

Разделение по физическим процессам разрешало проблему совместимости методов описания Эйлера и Лагранжа. Кроме этого такое разделение позволило использовать независимые программные решения, которые связывались между собой процедурой обмена данными.

Численные результаты. Рассматривалось течение жидкости в осесимметричном сосуде (рисунок 1). В наполнителе имеется канал, со стенок которого вдувается жидкость. Геометрические параметры сосуда: длина – 10,45 м; внешний радиус – 1,5 м. Материала стенки сосуда: модуль упругости – $2 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона – 0,3; плотность – 1700 кг/м³. Материала наполнителя: модуль упругости – $0,125 \cdot 10^5$ Па; коэффициент Пуассона – 0,497; плотность – 1800 кг/м³. Жидкая фаза: плотность – 1,4 кг/м³; показатель адиабаты – 1,4; динамическая вязкость – $18 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Скорость вдува

– 0,25 м/с. На рисунке 2 показано рассчитанное распределение компоненты скорости v_z на оси симметрии сосуда (ось Z) в различные моменты времени.

Выводы. При использовании предложенного алгоритма получены качественно непротиворечивые результаты. В дальнейшем необходима количественная проверка данного алгоритма.

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 9.9063.2017/БЧ.

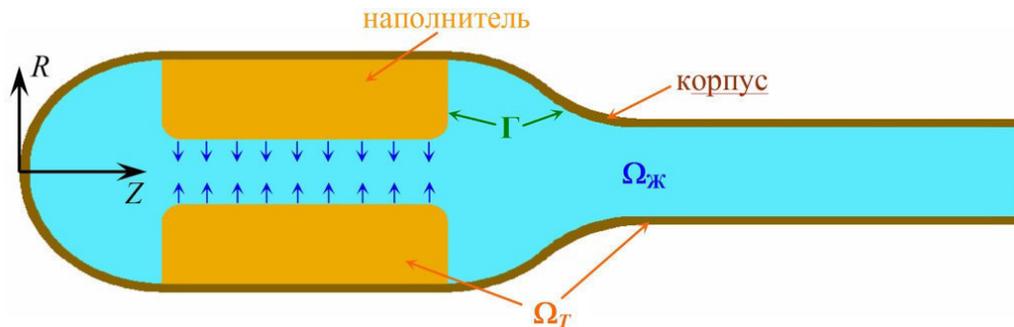


Рис. 1. Сосуд с нежестким наполнителем: $\Omega_{ж}$ – область жидкости; $\Omega_{т}$ – область твердого тела; Γ – граница раздела жидкость-твердое тело

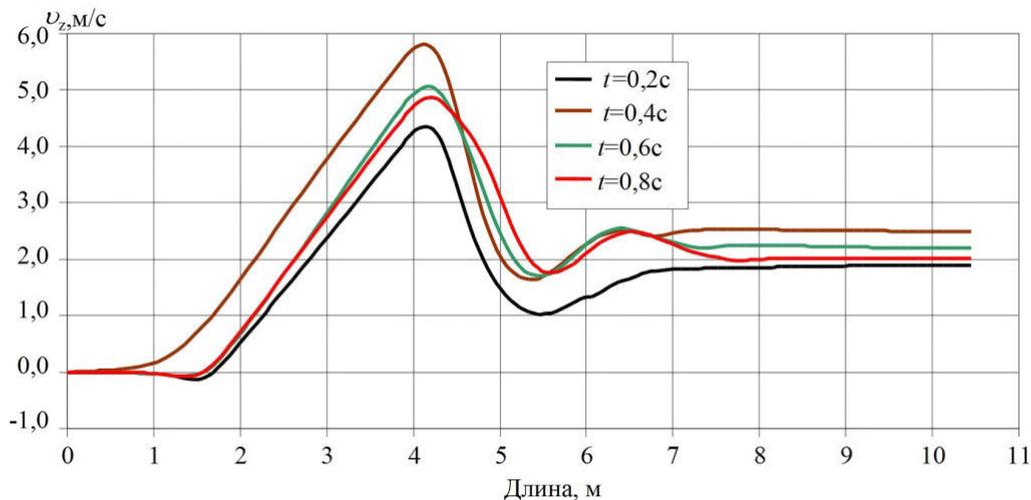


Рис.2. Изменение v_z вдоль оси Z

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kumar M., Kuo K.K., Effect of deformation on flame spreading and combustion in propellant cracks. AIAA Journal, Vol. 19, No. 12, 1981, p. 1580-1589
2. Милехин Ю.М., Ключников А.Н., Попов В.С., Мельников В.П. Сопряженная задача моделирования внутрибаллистических характеристик РДДТ. // Физика горения и взрыва т.48, №1, 2012, с. 38-46
3. Fiedler R., Jiao X., Namazifard A., Haselbacher A., Najjar F., Parson I.D., Coupled fluid-structure 3-D solid rocket motor simulations. // AIAA-2001-3954
4. Fiedler R.A., Breitenfeld M.S., Jiao X., Haselbacher A., Geubelle P., Guoy D., Brandyberry M., Simulations of slumping propellant and flexing inhibitors in solid rocket motors // AIAA-2002-4341
5. Engel M., Griebel M., Flow simulation on moving boundary-fitted grids and application to fluid-structure interaction problems // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2006, 50: 437-468.