КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО С РАДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

А.Е. Кулагин
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

SEMICLASSICAL TRAJECTORY-COHERENT STATES OF THE NONLOCAL GROSS-PITAESVKII EQUATION WITH RADIAL SYMMETRY

A.E. Kulagin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

Abstract*. In this paper the semiclassical formalism is applied to the nonlocal Gross-Pitaevskii equation with radial symmetry. Some aspects of constructing of semiclassically concentrated solutions in polar coordinates are shown. The semiclassical trajectory-coherent states, concentrated on the ring, are obtained. The example of specific physically motivated equation is considered and some properties of its semiclassical trajectory-coherent states are noted.*

Рассмотрим нелокальное уравнение Гросса-Питаевского вида

$$\left\{-i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\hat{p}_\varphi, r, t) + \varkappa\int_0^\infty\int_0^{2\pi} W(r,\rho,t)\,\left|\Psi(\rho,\phi,t)\right|^2 \rho d\rho d\phi\right\}\Psi(r,\varphi,t) = 0, \tag{1}$$

где $\hat{p}_\varphi = -i\hbar\partial_\varphi$, $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}\left(r\frac{\partial}{\partial_r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $\varkappa$ – параметр нелинейности. Применительно к описанию Бозе-Эйнштейновского конденсата (БЭК) квадрат модуля волновой функции $\left|\Psi(r,\varphi,t)\right|^2$ имеет смысл плотности конденсата, оператор $V(\hat{p}_\varphi, r, t)$ описывает потенциальную энергию ловушки, в которой находятся БЭК, в заданной системе координат, а функция $W(r,\rho,t)$ отвечает потенциалу взаимодействия атомов БЭК. Из физической интерпретации функции $W(r,\rho,t)$ вытекает условие $W(r,\rho,t) = F(|r-\rho|,\rho,t)$, поэтому в дальнейшем ограничимся только такими функциями.

После отделения циклической переменной φ система Гамильтона-Эренфеста первого порядка, отвечающая классической траектории уравнения (1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = \frac{1}{m}P_r(t), \\ \dot{P}_r(t) = -V_r\left(P_\varphi, R(t), t\right), \quad P_\varphi = \text{const}. \end{cases}$$

Квазиклассически приближенное с точностью $O(\hbar^{3/2})$ решение уравнения (1) имеет вид $\Psi(r,\varphi,t)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}P_\varphi\varphi+\int_0^t\frac{1}{2m}\frac{P_r(\tau)}{R(\tau)}d\tau\right]\cdot\Phi(r,t)$, где $\Phi(r,t)$ принадлежит классу траекторно-сосредоточенных в точке $(p_r,r)=(P_r(t),R(t))$ фазового пространства функций [1] и является решением следующего линейного уравнения

$$\begin{gathered}\left\{-i\hbar\partial_t+\frac{1}{2m}\left[P_r^2(t)+2P_r(t)\cdot\Delta\hat{p}_r+(\Delta\hat{p}_r)^2\right]+\frac{P_\varphi^2}{2m}\left[\frac{1}{R^2(t)}-\frac{2}{R^3(t)}\cdot\Delta r+\frac{6}{R^4(t)}\cdot(\Delta r)^2\right]+\right.\\ +V(P_\varphi,R(t),t)+V_r(P_\varphi,R(t),t)\cdot\Delta r+\frac{1}{2}V_{rr}(P_\varphi,R(t),t)\cdot(\Delta r)^2+ \qquad (2)\\ \left.+\tilde{\kappa}\left[\mathrm{W}(R(t),R(t),t)+\frac{1}{2}W_{\rho\rho}(R(t),R(t),t)\cdot\alpha^{0,2}(t)+\frac{1}{2}W_{rr}(R(t),R(t),t)\cdot(\Delta r)^2\right]\right\}\Phi(r,t,\varsigma)=0,\\ \Delta r=r-R(t),\quad \Delta\hat{p}_r=-i\hbar\partial_r-P_r(t),\quad \tilde{\kappa}=\kappa\cdot\|\Psi\|^2,\quad \varsigma=\varsigma[\Psi]=\left(\alpha^{0,2}(0)\right).\end{gathered}$$

Здесь $\|\Psi\|^2=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Psi(r,\varphi,t)rdrd\varphi=\mathrm{const}$, а $\alpha^{0,2}(t)$ – дисперсия величины r, которая в квазиклассическом приближении определяется решением системы Гамильтона-Эренфеста второго порядка [2].

Уравнение (2) является линейным уравнением Шредингера, квадратичным по импульсу и координате. Его вакуумное состояние может быть найдено в виде $\Phi_0(r,t,\varsigma)=\frac{N_0}{\sqrt{\det C(t)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S(t,\varsigma)+P_r(t)\cdot\Delta r+\frac{1}{2}Q(t)\cdot(\Delta r)^2\right]\right\}$, где $\mathrm{Im}(S(t,\varsigma))=0$, $\mathrm{Im}(Q(t))>0$, а возбужденные состояния определяются формулой $\Phi_n(r,t,\varsigma)=N_n\cdot(W(t))^{n/2}\cdot H_n\left(\Delta r\sqrt{\frac{\mathrm{Im}\,Q}{\hbar}}\right)\cdot\Phi_0(r,t,\varsigma)$, где $H_n(x)$ – полиномы Эрмита, а $W(t)$ – импульсная часть решения системы в вариациях. Тогда для счетного набора функций $\Psi_n(r,\varphi,t)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}P_\varphi\varphi+\int_0^t\frac{1}{2m}\frac{P_r(\tau)}{R(\tau)}d\tau\right]\cdot\Phi_n(r,t,\varsigma_n)$, где $\varsigma_n=\varsigma[\Psi_n]$, выполняется соотношение

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Psi_n(r,\varphi,t)\Psi_k(r,\varphi,t)rdrd\varphi=\begin{cases}\|\Psi_n\|^2,\ n=k,\\ O\left(\sqrt{\hbar}\right),\ n\neq k.\end{cases}$$

Функции $\Psi_n(r,\varphi,t)$ называются квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями уравнения (1).

В качестве примера приведем результаты расчета функции $\Psi_2(r,\varphi,t)$, отвечающей уравнению Гросса-Питаевского вида

$$\left\{-i\hbar\partial_t+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+k_1r^2+k_2r^4+\omega\hat{p}_\varphi+\kappa\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}}\frac{1}{\rho}\exp\left[-\frac{(r-\rho)^2}{\gamma^2}\right]\cdot|\Psi(\rho,\phi,t)|^2\rho d\rho d\phi\right\}\Psi(r,\varphi,t)=0,$$

которое является нелокальным обобщением уравнения, которое использовалось в работе [3] для описания БЭК в ловушке во вращающейся с частотой ω системе отсчета.

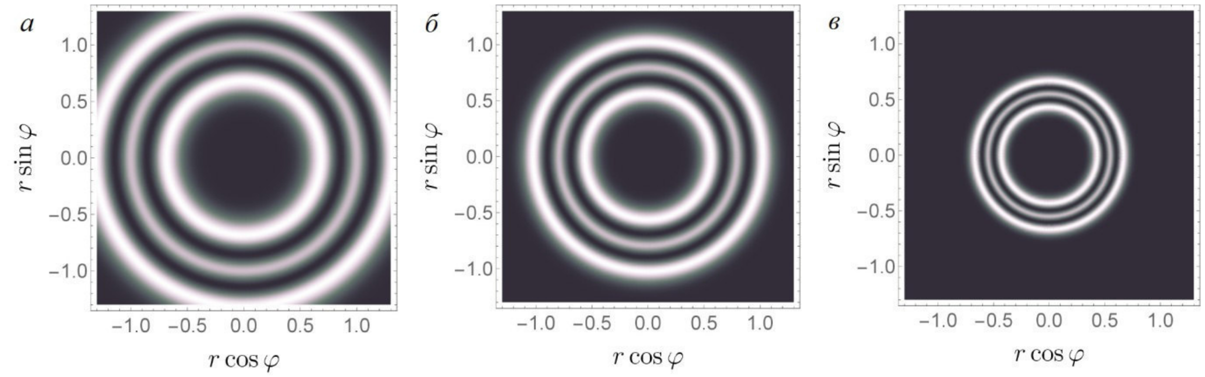

Рис. 1. Зависимость $\left|\Psi_2(r,\varphi,t)\right|^2$ *от* r,φ *для* $t=0$ *(а);* $t=0{,}8$ *(б);* $t=1{,}2$ *(в)*

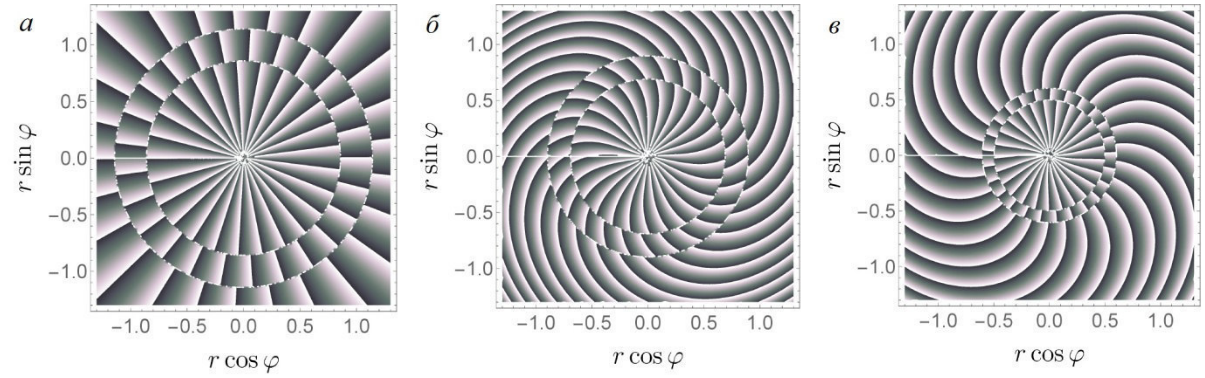

Рис. 2. Зависимость $\arg\left(\Psi_2(r,\varphi,t)\right)$ *от* r,φ *для* $t=0$ *(а);* $t=0{,}8$ *(б);* $t=1{,}2$ *(в)*

Для n-ого квазиклассического траекторно-когеретного состояния характерно наличие $(n+1)$ колец в $O\left(\sqrt{\hbar}\right)$-окрестности окружности $r=R(t)$, на которых функция $\left|\Psi_n(r,\varphi,t)\right|^2$ достигает максимальных значений (см. рис. 1). Также в фазе волновых функций $\arg\left(\Psi_n(r,\varphi,t)\right)$ присутствуют n колец, на которых происходит скачок фазы на π (см. рис. 2).

Построенный счетный набор асимптотических решений $\Psi_n(r,\varphi,t)$ непрерывно зависит от параметра нелинейности κ. Поэтому при $\kappa=0$ мы получаем набор асимптотических решений линейного уравнения. Однако в рамках рассмотренного формализма нельзя перейти к пределу $\gamma\to 0$, который соответствует локальному уравнению Гросса-Питаевского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулагин А.Е., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазичастицы, описываемые уравнением Гросса-Питаевского в квазиклассическом приближении. // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58 – № 5. – С. 20–29.
2. Lisok A.L., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. he evolution operator of the Hartree-type equation with a quadratic potential. // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2004. – Т. 37. – № 16. – С. 4535–4556.
3. Kasamatsu K., Tsubota M., Ueda M. Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate. // Physical Review A. – 2002. – Т. 66. – № 5.