# ЗАДАЧА СМЕШАННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПО СООТНОШЕНИЮ ДОХОДНОСТЬ К РИСКУ VAR

Е.А.Малеева
Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. О.Л. Крицкий
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: maleevakatie@gmail.com

# MIXED INTEGER LINEAR PROGRAMMING FORMULATION OF THE OPTIMAL MEAN/VALUE-AT-RISK PORTFOLIO PROBLEM

E.A.Maleeva
Scientific Supervisor: PhD, Associate prof. O.L.Kritski
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin Ave, 30, 634050
E-mail: maleevakatie@gmail.com

**Abstract.** In this paper we consider a modification of the Markowitz model in which the variance was replaced with a value-at-risk (VaR). A new problem of portfolio optimization was formulated. It is shown that the problem can be solved as an integer-programming problem.

**Введение.** Оптимальный выбор активов – это классическая финансовая задача с момента появления портфельной теории Марковица [1]. Она состоит из подбора ценных бумаг с целью максимизации будущих доходов. Существует несколько допущений и следствий, лежащих в основе модели среднего значения/дисперсии Марковица, например, доходность имеет нормальное распределение, так что среднее значение и дисперсия достаточны для полного описания функции распределения доходности портфеля. Но это не всегда так, на практике реальные финансовые данные характеризуются «толстыми» хвостами, что приводит к новым направлениям исследований портфельных моделей. Целью данной работы является формулировка задачи смешанного целочисленного линейного программирования для формирования оптимального портфеля с заменой дисперсии на стоимостную меру предельного риска (VaR).

**Материалы и методы исследования.** Пусть $X$ случайная величина, представляющая будущую относительную доходность инвестиций и пусть $F_X(x)$ его функция распределения. Value-at-Risk с пороговым значением $\alpha$, обозначенным как $VaR_\alpha(X)$, является квантилью распределения. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Значение Value-at-Risk с порогом α для $X$ определяется как $VaR_\alpha(X) = \inf\{x \mid F_X(x) \ge \alpha\}$. В частности, если $F_X(x)$ непрерывна и монотонно возрастает, то $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$.

Предположим, что на финансовом рынке имеется ряд активов числом $K$. Пусть $X$ – случайная переменная, представляющая доходность портфеля, пусть $R_j$ - случайная переменная, представляющая относительную доходность актива $j$, а $\lambda_j$ – доля актива $j$ в этом портфеле. Задача оптимизации портфеля с ограничением VaR может быть сформулирована классически с применением среднего значения и дисперсии, где вместо дисперсии в качестве меры риска используется значение VaR. Управляющий портфелем устанавливает два параметра: квантиль $\alpha_{VaR}$ и относительную доходность портфеля $r_{VaR}$. Он не будет предпринимать никаких действий, если значение Value-at-Risk будет меньше $r_{VaR}$, или, что то же самое, при $P(X \le r_{VaR}) \ge \alpha_{VaR}$ .

Общая формулировка задачи [2] состоит в следующем (Задача 1):

$$\max_{\lambda} E(X)\,, \tag{1}$$

$$P(X \le r_{VaR}) \ge \alpha_{VaR}\,, \tag{2}$$

$$X = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j R_j \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{K} \lambda_j = 1 \tag{4}$$

$$\lambda_j \ge 0 \text{ для любого } j = 1,..,K\,. \tag{5}$$

Ограничение (4) требует, чтобы портфель был диверсифицирован по разным активам, а ограничение (5) препятствует «короткой продаже». Целевая функция (1) должна быть максимизирована по ожидаемой доходности портфеля с установленными значениями параметров $r_{VaR}$ и $\alpha_{VaR}$. Управляющий портфелем соглашается рассматривать только те портфели, для которых вероятность потерь $r_{VaR}$ не превосходит порогового уровня $\alpha_{VaR}$. Это ограничение записано в (2). Нетрудно показать, что $VaR_{\alpha_{VaR}}(X) \ge r_{VaR}$. Поэтому эффект замены дисперсии на VaR будет незначителен, так как VaR определяется теми же вероятностными характеристиками, что и дисперсия [3].

Рассмотрим эту задачу формирования портфеля. Пусть $r_{ij}$ – наблюдаемая доходность $R_j$ в момент времени $i$. Тогда наблюдаемая доходность портфеля $X$ в момент времени $i$ будет равна $x_i = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j r_{ij}$. Если не делать никаких предположений о функциях распределения $R_j$, $j = 1,..,K$, то для оценки VaR можно использовать порядковую статистику как и в методе исторического моделирования.

Расчет VaR можно легко обобщить на случай, когда известны вероятности $p_i$ появления наблюдения $x_i$. Предположим, что $R_j$, $j = 1,..,K$ представляют собой дискретную совместную функцию распределения, определенную моментами $1,...,T$, что $P\left(\bigcap_{j=1}^{K} (R_j = r_{ij})\right) = p_i$. Тогда задачу (1)-(5) можно переформулировать как задачу смешанного целочисленного линейного программирования.

Пусть $r_{Min}$ – минимальная доходность, которую можно наблюдать на фондовом рынке по данному активу (например, $r_{Min} = -100\%$). Пусть $r_{VaR}$, $\alpha_{VaR}$ - заданные параметры. Задачу формирования портфеля с учетом VaR запишем следующим образом (Задача 2):

$$\max_{\lambda, x, y} \sum_{i=1}^{T} p_i x_i \,, \tag{6}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j r_{ij} \text{ для любого } i = 1,\ldots,T \,, \tag{7}$$

$$x_i \geq r_{Min} + \left(r_{VaR} - r_{Min}\right) y_i \text{ для любого } i = 1,\ldots,T \,, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{T} p_i (1 - y_i) \leq \alpha_{VaR} \,, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{K} \lambda_j = 1 \,, \tag{10}$$

$$y_i \in \{0,1\} \text{ для любого } i = 1,\ldots,T \,, \tag{11}$$

$$\lambda_j \geq 0 \text{ для любого } j = 1,..,K \,, \tag{12}$$

где переменные $x_i$ - это наблюдаемая доходность портфеля в момент времени $i$, целевая функция (6) - это максимум математического ожидания. Ограничение (7) задает $x_i$ как линейную комбинацию $r_{ij}$. Наконец, ограничения (8) и (9) препятствуют формированию таких портфелей, VaR которых ниже фиксированного порога. Каждый раз, когда $x_i$ становится ниже $r_{VaR}$ полагаем $y_i$ равным нулю и $1 - y_i = 1$ в ограничении (9). Следовательно, в (9) суммируются вероятности тех событий $i$, доходность которых ниже порога VaR. Если же результат суммирования больше $\alpha_{VaR}$, то портфель становится нереализуемым.

Для расчетов были выбраны акции индекса ММВБ-10 за 2017 год с интервалом в один день, $\alpha_{VaR} = 0{,}05$.

**Результаты.** Результаты численных расчетов показали, задача разрешима в разумное вычислительное время. Можно сказать, что наша формулировка задачи целочисленного линейного программирования эффективна.

**Заключение.** В этой статье была рассмотрена модификация модели Марковица, в которой дисперсия была заменена на Value-at-Risk. Сформулирована новая задача оптимизации портфеля. Показано, что задачу оптимизации можно сформулировать как задачу целочисленного программирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markowitz, H.M. (1952) *Portfolio selection.* Journal of Finance, V. 25, No.1, P. 71–79.
2. Gaivoronski, A.A. and Pflug, G. (2004) *Value at risk in portfolio optimization: Properties and computational approach*. The Journal of Risk, V. 7, P. 1–31.
3. Benati, S. and Rzzi, R. (2007) *A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem*. European Journal of Operational Research, V. 176, Issue 1, P. 423-434.