

УДК 550.831.01

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГЕОТЕРМИИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Пятаков Юрий Владиславович,

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных и управляющих систем Воронежского государственного университета инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, д. 19.
E-mail: pyatakovjv@mail.ru

Рассмотрена математическая постановка прямой трехмерной задачи геотермии в стационарной и нестационарной формах. Особенностью рассмотренной постановки задачи является возможность учета неоднородности строения моделируемого объекта по плотностным и теплофизическим параметрам. С этой целью вводится система типовых аппроксимирующих элементов – вертикальных призм с произвольными верхним и нижним основаниями и постоянными значениями плотности, коэффициентов тепло- и температуропроводности, а также плотности тепловыделения, обусловленного распадом радиоактивных элементов осадочных горных пород. На границе моделируемого объема заданы условия смешанного типа: величина теплового потока из основания и температура, определяемая по значениям векового хода температур земной поверхности. В задачах оценки прогнозных ресурсов нефтегазоносных территорий рассматриваемые граничные значения позволяют учитывать палеоклиматические условия генерации нефтяных углеводородов. Решение задачи построено на основе методов теории потенциала и теории линейных интегральных уравнений. Точность и быстродействие алгоритмов демонстрируется расчетами тестовых примеров.

Ключевые слова:

Прямая задача геотермии, радиоактивные элементы, теплофизические параметры, типовой аппроксимирующий элемент, тепловой поток, вековой ход температур земной поверхности, оценка прогнозных ресурсов нефтегазоносных территорий, теория потенциала, теория линейных интегральных уравнений.

Введение

Тепловое поле Земли является одним из важнейших физических полей, способным определять как историю геологического развития планеты, так и особенности формирования месторождений полезных ископаемых.

При прогнозировании и локализации месторождений в комплексе с другими геофизическими методами применяются *геотермические методы*, косвенно указывающие на наличие залежей углеводородов (УВ) [1, 2].

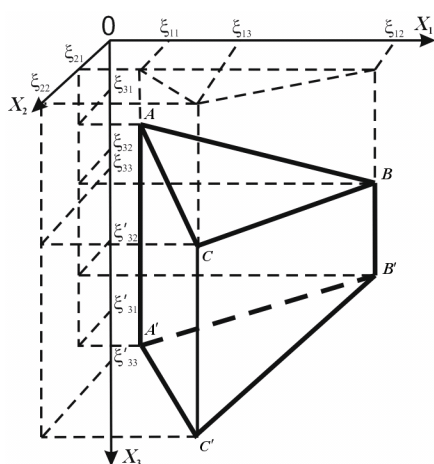


Рис. 1. К решению прямой задачи геотермии. Аппроксимирующая вертикальная треугольная призма. Условные обозначения и пояснения в тексте

В прямых задачах геотермии необходимо определить распределение температуры в моделируемом объеме, неоднородном как по плотностным

параметрам, так и по теплофизическим свойствам (теплоемкости, тепло- и температуропроводности).

Чтобы учесть неоднородность объекта моделирования D , как и в задачах гравиметрии и геодинамики [3, 4], будем полагать его состоящим из N подобластей – вертикальных призм D_n (рис. 1), имеющих постоянные значения плотности и теплофизических параметров.

Задачи геотермии связаны с решением уравнений теплопроводности, которые, как правило, рассматриваются в двух формах: стационарной (когда искомые значения температуры и граничные условия предполагаются не зависящими от времени) и нестационарной. Рассмотрим нестационарную постановку задачи.

Прямая задача геотермии в нестационарной форме

Постановка задачи. В нестационарной форме система уравнений теплопроводности может быть записана следующим образом:

$$\partial \theta(t, \mathbf{x}) / \partial t = a_n \nabla^2 \theta(t, \mathbf{x}) + f_n(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_n, \quad (1)$$

где $\theta(t, \mathbf{x})$ – значение температуры в точке \mathbf{x} в момент времени t ; $a_n = \lambda_n / (\rho_n c_n)$ – коэффициент температуропроводности; ρ_n – плотность; c_n – удельная теплоемкость; λ_n – коэффициент теплопроводности; $f_n(t, \mathbf{x})$ – значение плотности тепловыделения внутренних источников тепла в D_n .

Будем считать известным в начальный момент времени $t=0$ значение температуры:

$$\theta(0, \mathbf{x}) = \theta_n^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_n. \quad (2)$$

Граничные условия в уравнениях теплопроводности в зависимости от решаемых задач могут определяться по-разному: заданным значением

температуры, условием теплообмена с внешней средой и др.

Здесь, в соответствие с работой [2], граничные условия определим следующим образом (рис. 2, а).

Пусть $\partial D = S_1 \cup S_2$, при этом

- на поверхности S_1 будем считать заданным значение температуры

$$\theta(t, \mathbf{x}) = \theta^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (3)$$

где $\theta^{(1)}(\mathbf{x})$ определяется, например, значениями *векторного хода температур земной поверхности*. В задачах оценки прогнозных ресурсов нефтегазовых территорий объёмно-генетическим методом условия (3) позволяют учитывать *палеоклиматические условия* генерации нефтяных УВ [2].

- на поверхности S_2 будем считать заданным значение плотности теплового потока $q(t, \mathbf{x})$:

$$\lambda(\mathbf{x}) \partial \theta(t, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{n} = -q(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_2; \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке \mathbf{x} ; $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_p$, $\mathbf{x} \in \partial D_p \cap S_2$ (рис. 2, б), $p=1, 2, \dots, N$. Величины теплового потока из основания осадочного разреза в некоторых случаях практических расчетов могут приниматься постоянными, как, например, начиная с юрского времени для условий центральной части Западно-Сибирской плиты [5].

- на поверхности контактов смежных областей D_n и D_k считаем заданными условия непрерывности значений температуры и теплового потока:

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \theta(t, \mathbf{x}') = \lim_{\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}} \theta(t, \mathbf{x}''), \quad (5)$$

$$\lambda_n \cdot \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \partial \theta(t, \mathbf{x}') / \partial \mathbf{n}' + \lambda_k \cdot \lim_{\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}} \partial \theta(t, \mathbf{x}'') / \partial \mathbf{n}'' = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{x}' \in D_n$, $\mathbf{x}'' \in D_k$; \mathbf{n}' и $\mathbf{n}'' = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – соответственно, значения векторов внешних нормалей к ∂D_p и ∂D_k в точке $\mathbf{x}' \in S_{nk}$; $S_{nk} = \partial D_n \in \partial D_k$ (рис. 2, в).

Под решением прямой задачи будем понимать решение задачи нахождения функции $\theta(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющей соотношениям (1)–(6).

Решение задачи. По определению область D представлена совокупностью аппроксимирующих

тел D_n ($D = \bigcup_{n=1}^N D_n$). Поэтому поверхность S_1 , на которой заданы граничные значения температуры, может быть представлена совокупностью элементарных площадок S_i^1 ($S_1 = \bigcup_{i=1}^{N_1} S_i^1$), каждая из которых является частью границы ∂D_m ($S_i^1 = S_1 \cap \partial D_m$) некоторых аппроксимирующих тел D_m (рис. 3, а). Поставим в соответствие каждой площадке S_i^1 значения теплофизических параметров тела D_m и введем следующие обозначения $\rho_i^{(1)} = \rho_m$, $c_i^{(1)} = c_m$, $a_i^{(1)} = a_m$, $\lambda_i^{(1)} = \lambda_m$. Аналогично поверхность S_2 представим набором элементарных площадок S_i^2 ($S_2 = \bigcup_{i=1}^{N_2} S_i^2$) и определим для них величины $\rho_i^{(2)}$, $c_i^{(2)}$, $a_i^{(2)}$, $\lambda_i^{(2)}$.

Обозначим через S_3 совокупность элементарных

площадок S_i^3 ($S_3 = \bigcup_{i=1}^{N_3} S_i^3$), каждая из которых является

поверхностью контакта некоторых смежных тел D_n и D_k : $S_i^3 = \partial D_n \cap \partial D_k$, $n \neq k$. На площадке S_i^3 выберем произвольным образом одно из двух возможных направлений вектора нормали к S_i^3 и обозначим его через $\mathbf{n}_i^{(3)}$ (рис. 3, б). Пусть D_n – тело, для которого $\mathbf{n}_i^{(3)}$ совпадает с вектором внешней нормали к ∂D_n . Введем обозначения: $\rho_i' = \rho_n$, $\rho_i'' = \rho_k$, $c_i' = c_n$, $c_i'' = c_k$, $\lambda_i' = \lambda_n$, $\lambda_i'' = \lambda_k$, $a_i' = a_n$, $a_i'' = a_k$. Рассмотрим дифференциальный оператор $L(a, \theta(t, \mathbf{x})) = \partial \theta(t, \mathbf{x}) / \partial t - a \nabla^2 \theta(t, \mathbf{x})$. В этом случае уравнение (1) будет иметь вид:

$$L(a_n, \theta(t, \mathbf{x})) = f_n(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_n. \quad (7)$$

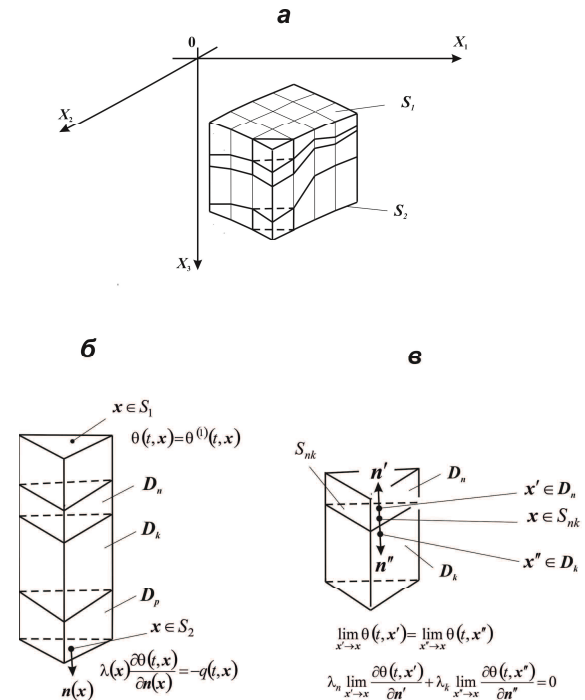


Рис. 2. К постановке прямой задачи геотермии: а) фрагмент моделируемого объема; б) граничные условия задачи; в) контактные условия задачи. Пояснения в тексте

Непосредственной проверкой можно установить справедливость соотношения:

$$\int_0^t \int_{D_n} \left(L(a_n, \theta(\tau, \xi)) G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) - \right. \\ \left. - L(a_n, G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi)) \theta(\tau, \xi) d\xi V d\tau \right) = \\ = - \int_{D_n} \theta_n^{(0)}(\xi) G(a_n, t, \mathbf{x} - \xi) d\xi V - \\ - (\rho_n c_n)^{-1} \int_0^t \int_{\partial D_n} q_n(\tau, \xi) G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) d\xi S d\tau - \\ - a_n \int_0^t \int_{\partial D_n} \partial G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) / \partial \mathbf{n} \cdot \theta(\tau, \xi) d\xi S d\tau. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\xi)$ – вектор внешней нормали к ∂D_n ; $\theta_n^{(0)}(\xi)$ – распределение температуры в области D_n в начальный момент времени $t=0$; $q_n(\tau, \xi) = -\lambda_n \partial \theta(\tau, \xi) / \partial \mathbf{n}$ – величина теплового потока через элемент $d\xi S$ по-

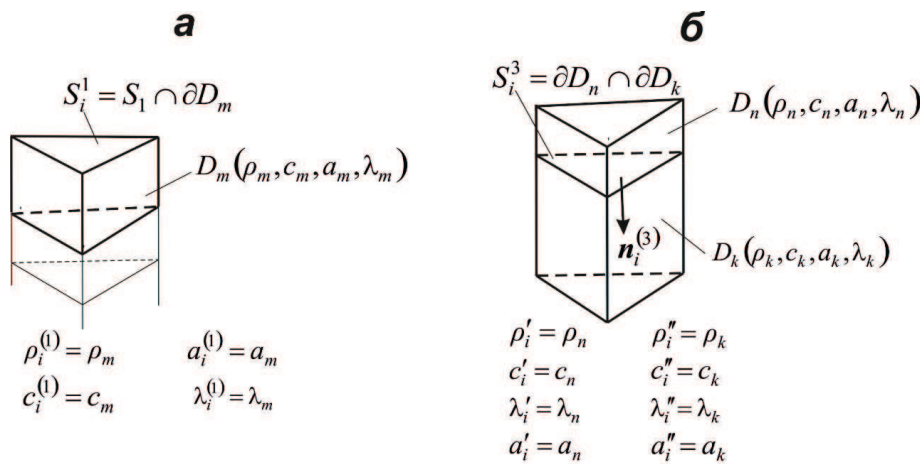


Рис. 3. К решению прямой задачи геотермии. Пояснения в тексте

верхности ∂D_n в точке $\xi \in \partial D_n$ в момент времени τ ; $G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi)$ – функция температурного влияния мгновенного источника тепла [6]:

$$G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) = (2\sqrt{\pi a_n (t - \tau)})^{-3} \times \exp(-R^2(\mathbf{x} - \xi) / (4a_n(t - \tau))),$$

представляющая собой решение фундаментального уравнения

$$L(a_n, G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi)) = \delta(t - \tau)\delta(\mathbf{x} - \xi). \quad (9)$$

$$(B(9) R(\mathbf{x} - \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}).$$

Если функция $\theta(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (7), то, на основании (9), из тождества (8) получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{x})a_n\theta(t, \mathbf{x}) = & a_n \int_0^t \int_{D_n} f_n(\tau, \xi)G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) d\xi V d\tau + \\ & + a_n \int_{D_n} \theta_n^{(0)}(\xi)G(a_n, t, \mathbf{x} - \xi) d\xi V + \\ & + (\rho_n c_n)^{-1} a_n \int_0^t \int_{\partial D_n} q_n(\tau, \xi)G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) d\xi S d\tau + \\ & + (a_n)^2 \int_0^t \int_{\partial D_n} \partial G(a_n, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) / \partial \mathbf{n} \cdot \theta(\tau, \xi) d\xi S d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

где $k_n(x)=1$, при $\mathbf{x} \in D_n$ и $k_n(x)=0$, при $\mathbf{x} \notin D_n$.

Просуммировав соотношения (10) по всем областям D_n , $n=1, 2, \dots, N$, получим выражение для функции $\theta(t, \mathbf{x})$ в виде суммы объемных потенциалов, потенциалов простого и двойного слоя:

$$\theta(t, \mathbf{x}) = a_n^{-1} [\theta_1(t, \mathbf{x}) + \theta_2(t, \mathbf{x}) + \theta_3(t, \mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in D_n, \quad (11)$$

где, с учетом введенных обозначений,

$$\begin{aligned} \theta_1(t, \mathbf{x}) = & \sum_{i=1}^N a_i \int_0^t \int_{D_i} f_i(\tau, \xi)G(a_i, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) d\xi V d\tau + \\ & + a_i \int_{D_i} \theta_i^{(0)}(\xi)G(a_i, t, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{i}}) d\xi V, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t, \mathbf{x}) = & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{N_k} a_i^{(k)} \int_0^t \int_{S_i^k} G(a_i^{(k)}, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) \frac{q_i^{(k)}(\tau, \xi)}{\rho_i^{(k)} c_i^{(k)}} d\xi S d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} \int_0^t \int_{S_i^3} \left[\frac{a_i' G(a_i', t - \tau, \mathbf{x} - \xi)}{\rho_i' c_i'} - \frac{a_i'' G(a_i'', t - \tau, \mathbf{x} - \xi)}{\rho_i'' c_i''} \right] \theta(\tau, \xi) d\xi S d\tau, \\ \theta_3(t, \mathbf{x}) = & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^t \int_{S_i^k} (a_i^{(k)})^2 \frac{\partial G(a_i^{(k)}, t - \tau, \mathbf{x} - \xi)}{\partial \mathbf{n}} \theta_i^{(k)}(\tau, \xi) d\xi S d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} \int_0^t \int_{S_i^3} \left[\frac{(a_i')^2 G(a_i', t - \tau, \mathbf{x} - \xi)}{\partial \mathbf{n}_i^{(3)}} - \frac{(a_i'')^2 G(a_i'', t - \tau, \mathbf{x} - \xi)}{\partial \mathbf{n}_i^{(3)}} \right] q(\tau, \xi) d\xi S d\tau. \end{aligned}$$

Значения $q(t, \mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x} \in S_1$, $\theta(t, \mathbf{x})$, в точках $\mathbf{x} \in S_2$ и $\theta(t, \mathbf{x})$, $q(t, \mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x} \in S_3$ определяются из решения системы интегральных уравнений, получаемых подстановкой (11) в граничные и контактные условия (3)–(6) [7].

Слагаемое $\int_{D_i} \theta_i^{(0)}(\xi)G(a_i, t, \mathbf{x} - \xi) d\xi V$, входящее в выражение (12) для объемного потенциала $\theta_1(t, \mathbf{x})$, обеспечивает выполнение начального условия задачи. Использование данного элемента в задачах геотермии позволяет выполнять оценку нестационарных тепловых эффектов, обусловленных влиянием интрузивных тел (локальных источников) [8].

Слагаемое $\int_0^t \int_{D_i} f_i(\tau, \xi)G(a_i, t - \tau, \mathbf{x} - \xi) d\xi V d\tau$ в (12) позволяет учитывать влияние внутренних источников тепла (тепловыделение распада радиоактивных элементов, содержащихся в осадочных горных породах).

Как отмечено в работе [6], методы теории потенциала, применяемые при решении нестационарных задач теплопроводности, могут быть распространены и на задачи с *подвижными границами* областей. Необходимость в этом возникает в задачах *палеотемпературного моделирования осадочных бассейнов*, требующих определить температурный режим в осадочных слоях в процессе их формирования [2].

Наряду с нестационарной формой постановки задачи геотермии в моделировании могут использоваться стационарные постановки, а также их комбинации [9, 10].

Рассмотрим стационарную постановку задачи геотермии для трехмерной неоднородной по теплофизическим параметрам среды.

Прямая задача геотермии в стационарной форме

Постановка задачи. В стационарной форме система уравнений теплопроводности имеет вид:

$$\lambda_n \nabla^2 \theta(\mathbf{x}) + \hat{f}_n(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D_n, \quad (13)$$

где $\theta(\mathbf{x})$ – значение температуры в точке \mathbf{x} ; $\hat{f}_n(\mathbf{x}) = c_n \rho_n f_n(\mathbf{x})$; $a_n, \rho_n, c_n, \lambda_n$ – те же, что и в уравнениях (1); $f_n(\mathbf{x})$ – значение плотности внутренних источников тепла в D_n .

Граничные условия определим следующим образом:

- на поверхности S_1 задано значение температуры

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (14)$$

- на поверхности S_2 задано значение теплового потока $q(\mathbf{x})$:

$$\lambda(\mathbf{x}) \partial \theta(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{n} = -q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_2; \quad (15)$$

здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор внешней нормали к поверхности dD в точке \mathbf{x} ; $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_p, \mathbf{x} \in \partial D_p \cap S_2, p = 1, 2, \dots, N$.

- на поверхности контактов смежных областей D_n и D_k считаем заданными условия непрерывности значений температуры и теплового потока:

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}') = \lim_{\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}''), \quad (16)$$

$$\lambda_n \cdot \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \partial \theta(\mathbf{x}') / \partial \mathbf{n}' + \lambda_k \cdot \lim_{\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}} \partial \theta(\mathbf{x}'') / \partial \mathbf{n}'' = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{x}' \in D_n, \mathbf{x}'' \in D_k$; \mathbf{n}' и $\mathbf{n}'' = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – соответственно, значения векторов внешних нормалей к ∂D_n и ∂D_k в точке $\mathbf{x} \in S_{nk}$; $S_{nk} = \partial D_n \cap \partial D_k$.

Под решением прямой задачи геотермии будем понимать решение задачи нахождения температуры $\theta(\mathbf{x})$, удовлетворяющей соотношениям (13)–(17).

Решение задачи. Как и при решении нестационарной задачи, выражение для $\theta(\mathbf{x})$ определим в виде суммы объемных потенциалов, потенциалов простого и двойного слоя:

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} (4\pi\lambda_n)^{-1} [\theta_1(\mathbf{x}) + \theta_2(\mathbf{x}) + \theta_3(\mathbf{x})], & \mathbf{x} \in D_n, \\ 0, & \mathbf{x} \notin D_n, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\theta_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \int_{D_i} f_i(\xi) R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) d\xi V, \quad (19)$$

$$\theta_2(\mathbf{x}) = \int_{S_1} q^{(1)}(\xi) R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) d\xi S + \int_{S_2} q(\xi) R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) d\xi S, \quad (20)$$

$$\theta_3(\mathbf{x}) = \int_{S_1} \theta^{(1)}(\xi) \partial R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) / \partial \mathbf{n}\xi d\xi S + \int_{S_2} \theta^{(2)}(\xi) \partial R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) / \partial \mathbf{n}\xi d\xi S + \int_{S_3} \left((\lambda''(\xi) - \lambda'(\xi)) / (\lambda''\xi) + (\lambda'(\xi)) \theta^{(3)}(\xi) \partial R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) / \partial \mathbf{n}\xi \right) d\xi S \quad (21)$$

Поверхность $S_3 = \bigcup_{i=1}^{N_3} S_i^3$ в (20) представляет со-

бой совокупность площадок, каждая из которых является поверхностью контакта некоторых смежных тел D_n и D_k : $S_i^3 = \partial D_n \cap \partial D_k, n \neq k$; $\lambda'(\xi) = \lambda_n, \lambda''(\xi) = \lambda_k, \xi \in S_i^3$.

Значения функций $q^{(1)}(\xi), \theta^{(2)}(\xi), \theta^{(3)}(\xi)$, входящих в выражения (20), (21) определяются решением системы интегральных уравнений, получаемых подстановкой (19)–(21) в гранично-контактные условия (14)–(17).

Заметим, что, как и при решении задачи геодинамики [4], необходимые *аналитические составляющие, определяющие значение температурного поля $\theta(\mathbf{x})$ в (19), могут быть определены с помощью соответствующих аналитических составляющих решения прямой задачи гравиметрии.*

Действительно, рассмотрим составляющую решения (19), определяющую влияние внутреннего источника тепловыделения, полагая, что его плотность в области D_i имеет постоянное значение f_i (этого всегда с достаточной точностью можно добиться соответствующим разбиением области D_i):

$$\theta(\mathbf{x}) = \hat{f}_i / (4\pi\lambda_n) \int_{D_i} R^{-1}(\mathbf{x} - \xi) d\xi V. \quad (22)$$

Значение интеграла в правой части (22) для принятого аппроксимирующего элемента D_i может быть определено в явном аналитическом виде с помощью формул, приведенных в работе [4].

Для *тестового примера* рассмотрим задачу определения температуры в однородном (имеющем постоянные значения теплофизических параметров a, ρ, c, λ) полупространстве $x_3 > 0$, обусловленном наличием в нем радиоактивного источника с плотностью тепловыделения $f = \hat{f}_n$ при $\mathbf{x} \in D_n$ и $f = 0$ при $\mathbf{x} \notin D_n$. Положим, что на границе $x_3 = 0$ значение температуры равно нулю.

В этом случае, согласно (18)–(21), решение прямой задачи будет иметь вид:

$$\theta(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}),$$

где

$$u(\mathbf{x}) = f / (4\pi\lambda) \int_{D_n} R^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} V,$$

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= (4\pi\lambda)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{(1)}(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3)^2}} d\xi_1 d\xi_2,$$

$q^{(1)}(\boldsymbol{\xi})$ – тепловой поток на границе $x_3=0$.

Выражение для функции $p(x_1, x_2, x_3)$ удобно определить, если воспользоваться формулами (18). Действительно, на основании (18) в точках $x_3 < 0$ $u(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) = 0$, откуда, в силу очевидной симметрии $p(x_1, x_2, x_3)$ относительно плоскости $x_3=0$, получим решение задачи в виде

$$u(\mathbf{x}) = f / (4\pi\lambda) \int_{D_n} R^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} V -$$

$$- f / (4\pi\lambda) \int_{D_n} R'^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d_{\boldsymbol{\xi}} V, \quad (23)$$

где

$$R(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2},$$

$$R'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + \xi_3)^2}.$$

Оба интеграла в (23) вычисляются с помощью формул из работы [4].

Тестирование алгоритма решения прямой задачи геотермии

В качестве элемента аппроксимации в тестовом примере используется *вертикальная треугольная призма*.

Координатное описание тела (м), рис. 1: A ($X_1=0, X_2=0, X_3=0$); B (8000, 0, 2000); C (4000, 6000, 10000); A' (0, 0, 12000); B' (8000, 0, 15000); C' (4000, 6000, 18000).

Значения плотности источника и теплопроводности среды примем, согласно данным работы [2], равными соответственно $f=3,16 \cdot 10^{-6}$ Вт/м³ и $\lambda=1$ Вт/(м/град).

В табл. 1 приведены результаты расчетов, полученных по формулам из работы [4], в сопоставлении с расчетами, полученными методом численного интегрирования правой части (23).

Таблица 1. Результаты расчетов теплового поля, обусловленного влиянием внутреннего источника тепловыделения

Координаты точки расчета, м			Расчет по формулам [4], °C	Расчет методом численного интегрирования
X_1	X_2	X_3		
4000	3000	2000	3,88076790	3,88076790
5000	3000	2000	3,71328241	3,71328241
6000	3000	2000	3,40380048	3,40380048
7000	3000	2000	3,00102212	3,00102212
8000	3000	2000	2,56497475	2,56497475
Время расчета, с			$1,1 \cdot 10^{-4}$	0,7

На рис. 4 приведено распределение температурного поля в плоскости $x_2=3$. Количество точек 6400, время расчета 0,15 с. Среднее время счета алгоритмом по формулам [4] одной точки для одного тела составляет $2,5 \cdot 10^{-5}$ с. Расчеты осуществлялись на ПК, с процессором AMD Phenom II X4 810 (тактовая частота ядра 2,8 ГГц).

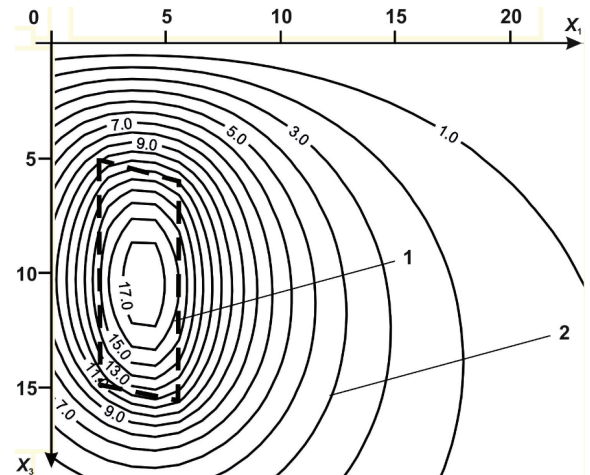


Рис. 4. Расчет температурного поля в плоскости $x_2=3$: 1 – граница источника радиоактивного тепловыделения, 2 – изолинии поля температур, в °C. Оцифровка осей дана в км

Приведенный тестовый пример дает значения температурного эффекта, создаваемого одним аппроксимирующим элементом заданных геометрических размеров. Для того чтобы оценить характер эффекта, создаваемого радиоактивными элементами в осадочных породах, вскрываемых глубокой скважиной, видоизменим пример, увеличив горизонтальные размеры аппроксимирующего тела. Вертикальные координаты вершин верхнего основания положим равными нулю, соответствующие координаты вершин нижнего основания положим равными 10 км. Характерный линейный размер L тела примем равным 1000 км. Таким образом, координатное описание тела на рис. 1 будет иметь вид (км): A ($X_1=0, X_2=0, X_3=0$); B (1000, 0, 0); C (500, 1000, 0); A' (0, 0, 10); B' (1000, 0, 10); C' (500, 1000, 10). Теплофизические параметры оставим прежними. Расчеты проведем вдоль вертикального профиля *гипотетической скважины*, расположенного вблизи центральной части тела в точках с горизонтальными координатами $X_1=500, X_2=500$ и вертикальной координатой, изменяющейся от 0 до 2 км, с шагом 0,2 км.

Результаты, приведенные в табл. 2, свидетельствуют о том, что в этом случае температура среды изменяется с глубиной по закону, близкому к линейному, увеличиваясь приблизительно на 3 °C через каждые 100 м, что имитирует нормальный геотермический градиент осадочного разреза.

Таблица 2. Результаты расчетов теплового поля s

Координаты точки расчета, км			Значение температуры, °C
X_1	X_2	X_3	
500	500	0	0.0
500	500	0,2	6,16270833
500	500	0,4	1,21990563×10 ¹
500	500	0,6	1,81090046×10 ¹
500	500	0,8	2,38925533×10 ¹
500	500	1,0	2,95497026×10 ¹
500	500	1,2	3,50804527×10 ¹
500	500	1,4	4,04848036×10 ¹
500	500	1,6	4,57627556×10 ¹
500	500	1,8	5,09143088×10 ¹
500	500	2,0	5,59394633×10 ¹
Время расчета, с			2,5×10 ⁻⁴

Выводы

1. Рассмотрена математическая постановка, и предложен алгоритм решения прямой задачи

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев В.И., Старостенко В.И. Оценка нефтегазоматеринского потенциала осадочных бассейнов Дальневосточного региона по данным гравиметрии и геотермии // Геофизический журнал. – 2004. – Т. 26. – № 2. – С. 46–61
2. Нефтегазоносность Дальнего Востока и Западной Сибири по данным гравиметрии, геотермии и геохимии / В.И. Исаев, Ю.В. Коржов, Г.А. Лобова, С.А. Попов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 384 с.
3. Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Методы решения прямых задач гравиметрии // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 105–110.
4. Пятаков Ю.В., Исаев В.И., Косыгин В.Ю. Методы теории потенциала при решении прямых задач гравиметрии и геодинамики трехмерных неоднородных сред // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 1. – С. 76–83.

геотермии для трехмерной неоднородной среды. В качестве типового элемента для аппроксимации неоднородности среды по плотностным и теплофизическим параметрам принята вертикальная треугольная призма с произвольными верхним и нижним основаниями.

2. Применение данного аппроксимирующего элемента позволяет универсально использовать методы теории потенциала и удобно моделировать разные геофизические поля при одном общем структурном представлении геологических сред (объектов). Это удобство становится еще ощутимее, если использовать построенные алгоритмы моделирования полей для решения совместной обратной задачи по данным гравиметрии, геодинамики и геотермии.
3. Результаты тестирования, выполненные на модельных примерах, показывают высокую точность и быстроедействие предложенного алгоритма.

5. Ермаков В.И., Скоробогатов В.А. Тепловое поле и нефтегазоносность молодых плит СССР. – М.: Недра, 1986. – 222 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
7. Купрадзе В.Д. О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук. – 1967. – Т. XXII. – Вып. 2 (134). – С. 59–107.
8. Термодинамическая эволюция астенолитов / Р.И. Кутас, А.В. Чекунов, В.И. Лялько, М.М. Митник // Геофизический журнал. – 1993. – Т. 15. – № 4. – С. 3–12
9. Туезов И.К., Епанешников В.Д. Численное моделирование стационарного теплового поля литосферы Охотского моря // Физика Земли. – 1987. – № 7. – С. 94–100.
10. Туезов И.К., Епанешников В.Д. Численное моделирование нестационарного теплового поля литосферы Охотского моря // Тихоокеанская геология. – 1991. – Т. 10. – № 2. – С. 34–42.

Поступила 22.07.2013 г.

UDC 550.831.01

SOLUTION OF GEOTHERMY DIRECT PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS MEDIUM

Yury V. Pyatakov,

Cand. Sc., Voronezh State University of Engineering Technology,
Russia, 394036, Voronezh, Pr. Revolyutsii, 19. E-mail: pyatakovjv@mail.ru.

The paper considers the mathematical formulation of geothermy direct three-dimensional problem for stationary and nonstationary forms. The particularity of the considered formulation is the possibility of accounting heterogeneity structure of the modeled object by density and thermophysical parameters. The author introduces the system of typical approximating elements – vertical prisms with arbitrary upper and lower bases and constant values of density, coefficients of thermal conductivity and thermal diffusivity, as well as the density of heat generation caused by the decay of radioactive elements of sedimentary rocks. On the border of the simulated volume the conditions of mixed type: the value of heat flux from the base and the temperature detected by the values of the secular variation of the Earth's surface temperature were set. In the problems of estimation of predicted resources for the oil and gas regions the considered boundary values allow taking into account paleoclimatic conditions for generation of petroleum hydrocarbons. The theory of potential and the theory of linear integral equations are used as methods for solving this problem. The accuracy and speed of the algorithms are shown by the calculations of test examples.

Key words:

Direct problem of Geothermy, radioactive elements, thermal parameters, typical element of approximation, heat flux, secular variation of the Earth's surface temperature, estimation problems of predicted resources for the oil and gas regions, theory of the potential, theory of linear integral equations.

REFERENCES

1. Isaev V.I., Starostenko V.I. Otsenka neftegazomaterinskogo potentsiala osadochnykh basseynov Dalnevostochnogo regiona po dannym gravimetrii i geotermii [Rating petroleum potential of sedimentary basins of the Far Eastern region by the gravitation and geothermic data]. *Geophysical journal*, 2004, vol. 26, no. 2, pp. 46–61.
2. Isaev V.I., Korzhov Yu.V., Lobova G.A., Popov S.A. Neftegazonosnost Dalnego Vostoka i Zapadnoy Sibiri po dannym gravimetrii, geotermii i geokhimii [Petroleum potential of the Far East and Western Siberia by gravity data, geothermic and Geochemistry]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ. house, 2011. 384 p.
3. Pyatakov Yu.V., Isaev V.I. Metody resheniya pryamykh zadach gravimetrii [Methods for solving direct problems of gravimetry]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 320, no. 1, pp. 105–110.
4. Pyatakov Yu.V., Isaev V.I., Kosygin V.Yu. Metody teorii potentsiala pri reshenii pryamykh zadach gravimetrii i geodinamiki trekhmernykh neodnorodnykh sred [The methods of potential theory for solving direct problems gravimetry and geodynamics of three-dimensional inhomogeneous media]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 1, pp. 76–83.
5. Ermakov V.I., Skorobogatov V.A. *Teplovoe pole i neftegazonosnost molodykh plit SSSR* [Thermal field and Petroleum young plates of the USSR]. Moscow, Nedra, 1986. 222 p.
6. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Urvneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, MSU, 1999. 799 p.
7. Kupradze V.D. O priblizhenom reshenii zadach matematicheskoy fiziki [On the approximate solution of problems in mathematical physics]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1967, vol. XXII, Iss. 2 (134), pp. 59–107.
8. Kutas R.I., Chekunov A.V., Lyalko V.I., Mitnik M.M. Termodinamicheskaya evolyutsiya astenolitov [Thermodynamic evolution of asthenolith]. *Geophysical journal*, 1993, vol. 15, no. 4, pp. 3–12.
9. Tuezov I.K., Epaneshnikov V.D. Chislennoe modelirovanie stacionarnogo teplovogo polya litosfery Okhotskogo morya [Numerical modeling of stationary thermal field of the lithosphere of the Okhotsk Sea]. *Physics of the Solid Earth*, 1987, no. 7, pp. 94–100.
10. Tuezov I.K., Epaneshnikov V.D. Chislennoe modelirovanie nestacionarnogo teplovogo polya litosfery Okhotskogo morya [Numerical modeling of nonstationary thermal field of the lithosphere of the Okhotsk Sea]. *Geology of the Pacific Ocean*, 1991, vol. 10, no. 2, pp. 34–42.