14. Burenin A.N. Forvardy, fyuchersy, optsiony, ekzoticheskie i pogodnye proizvodnye [Forwards, futures, options, exotic and annual derivatives]. Moscow, NTO Publ., 2011. 465 p.
15. Burenin A.N. Rynok tsennykh bumag i proizvodnykh finansovykh instrumentov [Equity market and derivatives market]. Moscow, NTO Publ., 2011. 394 p.
16. Chekulaev M. Ekzoticheskie optsiony ili optsionnaya ekzotika? [Exotic options or option exotic?]. Available at: http://fortrader.ru/learn/ekzoticheskie-opciony-ili-opcionnaya-ekzotika.html (accessed 11 September 2013).
17. Novikov A.A. Hedging Options with a Given Probability. *Probability Theory and Applications*, 1999, no. 43 (1), pp. 135–143.
18. Demin N.S., Andreeva U.V. Ekzoticheskie optsiony kupli s ogranicheniem vyplat i garantirovannym dokhodom v modeli Bleka–Shoulza [Exotic call options with a guaranteed income in Black–Shouls model]. *Problemy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 33–39.
19. Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Kvantilnoe khegzhirovanie optsiona kupli na diffuzionnom (B, S)-rynke v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu [Quantile hedging of the call option in diffusion (B, S)-market in case of the dividends payment on risk asset]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4 (13), pp. 61–71.
20. Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Khegzhirovanie optsiona kupli s zadannoy veroyatnostyu na diffuzionnom (B, S)-rynke v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu [Call option hedging with the state probability in diffusion (B, S)-market in case of the dividends payment on risk asset]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1 (14), pp. 22–30.

УДК 517

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЫРАВНИВАНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И МАСШТАБНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ ДРОБНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ДРОБНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ НА ФРАКТАЛАХ

Чуриков Виктор Анатольевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: vachurikov@list.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью проводить преобразования математических моделей, сформулированных в пространствах нецелочисленных размерностей, в пространства с целочисленными размерностями.
***Цель работы**: нахождение преобразований степенных функций, заданных на фракталах при их дробном интегрировании и дробном дифференцировании (дробном интегродифференцировании), в пространствах нецелочисленных размерностей с последующим преобразованием степенных функций в пространства целочисленных размерностей. Ввиду того, что при дробном интегродифференцировании происходят изменения физической размерности и изменение линейных размеров фракталов, эти изменения необходимо корректировать для дальнейшего рассмотрения этих функций в пространствах с целым числом измерений.*
***Методы исследования:** математические преобразования, в основе которых лежит локальный d-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования, действующий в пространстве степенных функций.*
***Результаты:** для согласования физических размерностей в пространствах с нецелочисленной и целочисленной размерностями вводятся коэффициенты выравнивания размерности. Для согласования изменения линейных размеров фракталов при переходах в пространства с целым числом измерений необходимо вводить коэффициенты, которые были названы масштабными коэффициентами. Приводятся важные частные случаи масштабных коэффициентов.*

Ключевые слова:
d-оператор, коэффициент выравнивания физической размерности, корректирующие функции, эффективная плотность фрактала, сопряжённый фрактал, правило сохранения размерности, масштабный коэффициент фрактала.

Введение

В последнее время широко рассматриваются пространства с размерностью нецелочисленных порядков, которые формально будем называть фракталами [1–3]. Кроме этого часто исследуются различные процессы, проходящие во фракталах.

Адекватным математическим аппаратом для описания фракталов и процессов в них считается дробный анализ. В дробном анализе обобщается понятие производных и интегралов на случай любых конечных вещественных или комплексных порядков [4–15]. В этом случае будем говорить о *дробном интегродифференцировании*.

При построении математических моделей для пространств постоянной дробной размерности α необходимо вводить производные и интегралы порядка α.

Фракталы всегда находятся в пространствах целочисленных порядков, например в евклидовых пространствах. В этом случае будем говорить, что *фрактал погружен в пространство целочисленной размерности*. В рассматриваемом случае речь идёт об одномерном евклидовом пространстве, в которое погружен фрактал размерности $0 \le \alpha \le 1$.

Математические модели процессов, которые проходят во фракталах, т. е. в пространствах с нецелочисленной размерностью, формулируются с использованием дробного интегродифференцирования. Но рассматривать эти процессы удобней не во фракталах, а в пространствах с целочисленной размерностью, что более привычно и более удобно.

Поэтому, чтобы рассматривать фрактальные процессы в евклидовых пространствах, необходимо преобразовывать сформулированные математические модели из пространств с нецелочисленной размерностью в пространства целочисленной размерности, т. е. в евклидовы пространства.

Такие преобразования сводятся к необходимости менять физическую размерность степенных функций, с помощью которых задаются физические величины на фракталах, а также преобразовывать коэффициенты, получаемые при дробном интегродифференцировании.

Это приводит к необходимости соответствующим образом менять физическую размерность степенных функций, заданных на фракталах, при их преобразованиях в пространства целочисленных размерностей, а также преобразовывать коэффициенты, получаемые при дробном интегродифференцировании.

Работа посвящена рассмотрению данных преобразований.

Выравнивание физической размерности

При дробном интегродифференцировании вещественного порядка α степенной функции x^β с помощью d-оператора получим для разных случаев показателя степени степенной функции [16]

$$d^{\pm\alpha}x : x^\beta = \mu x^{\beta\pm\alpha} + C_{\pm\alpha}(x);\ \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R};$$
$$x, \alpha, \beta, \mu = \text{const}.$$

Знаки, стоящие перед порядками интегродифференцирования α, определяют тип операции. Если знак положительный, то это соответствует операции дробного интегрирования, а если знак минус, то операции дробного дифференцирования; μ – коэффициент интегродифференцирования, который имеет разное значения для разных сочетаний порядка и показателя степенной функции; $C_{\pm\alpha}(x)$ – полиномы интегродифференцирования.

Коэффициент интегродифференцирования будет

$$\mu = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta\pm\alpha)},$$

когда одновременно не выполняются условия

$$\beta = -1, -2, -3, \ldots \text{ и } \beta\pm\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Если эти условия одновременно выполняются, тогда для $\beta=-m=-1,-2,-3,\ldots$ коэффициенты будут

$$\mu = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-m\pm\alpha+1)}.$$

Если при интегрировании выполняются логарифмические случаи, $\beta\neq-\alpha$; $\alpha>0$, то интеграл будет

$$d^\alpha x : x^{-\alpha} = \ln_\alpha(x) + C_\alpha(x);\quad \alpha \neq 0.$$

Здесь $\ln_\alpha(x)$ – логарифм порядка α.

При дробном интегродифференцировании степенных функций во всех случаях с помощью d-оператора меняется их физическая размерность.

У физической величина x в этом случае меняется физическая размерность $[x^\beta]=X^\beta$ на размерность $[x^{\beta\pm\alpha}]=X^{\beta\pm\alpha}$. Здесь X – физическая размерность величины x. Например, если переменная x, является пространственной переменной, то её физическая размерность будет иметь размерность длины, т. е. $[x]$=L. Если переменная x временная переменная, то у неё будет физическая размерность времени, или $[x]$=T [17].

Изменение физической размерности $\Delta^{\pm\alpha}[x]$ при дробном интегродифференцировании порядка α по переменной x запишем

$$\Delta^{\pm\alpha}[x] = X^{\pm\alpha}.$$

Здесь знак «+» соответствует изменению физической размерности при дробном интегрировании порядка α, а знак «–» – при дробном дифференцировании порядка α.

При использовании дробного анализа необходимо результаты привести в пространство какой-либо одной размерности. Одними из самых удобных и привычных для таких преобразований пространств будут евклидовы пространства с топологическими размерностями 1, 2 и 3.

В классическом анализе изменение физической размерности при интегродифференцировании будет

$$\Delta^{\pm1}[x] = X^{\pm1}.$$

Если в уравнении стоят разные порядки интегродифференцирования, то между слагаемыми будут меняться физические размерности и операции сложения и вычитания, а также отношения сравнения (равенства, больше и меньше) теряют смысл. Поэтому если у разных слагаемых в дифференциальном уравнении стоят производные разных порядков, то после интегродифференцирования в этих случаях необходимо вводить *коэффициенты выравнивания физических размерностей*. Для этого необходимо скорректировать размерность так, чтобы у всех слагаемых после интегродифференцирования была одна физическая размерность.

В общем случае слагаемые можно подгонять к разным физическим размерностям, например к любым размерностям дробных порядков, но удобней приводить размерность к целочисленному порядку 1. Это более привычно для восприятия и дальнейшей работы с полученными результатами.

Чтобы удовлетворять указанным условиям, получаемые при интегродифференцирование порядка α степенные функции необходимо умножать на степенную функцию с показателем $1-\alpha$

$$x^{\pm(1-\alpha)}.$$

Здесь знак «+» перед скобками в показателе степени соответствует изменению физической размерности при дробном интегрировании порядка α, а знак «–» – при дробном дифференцировании порядка α.

Функции $x^{\pm(1-\alpha)}$ назовём *корректирующими функциями*, размерности которых будут $[x^{\pm(1-\alpha)}]=X^{\pm(1-\alpha)}$.

Корректирующие функции задаются на множестве точек сопряжённого фрактала.

При умножении степенной функции, получающейся после дробного интегродифференцирования порядка α на соответствующую корректирующую функцию, тогда получим размерности, соответствующие операциям интегродифференцирования в классическом анализе

$$[x^{1-\alpha}][x^{\beta+\alpha}] = [x^{\beta+1}] = X^{\beta+1} = X^{1-\alpha} X^{\beta+\alpha};$$

$$[x^{-(1-\alpha)}][x^{\beta-\alpha}] = [x^{\beta-1}] = X^{\beta-1} = X^{-(1-\alpha)} X^{\beta-\alpha}.$$

Объединив эти два соотношения, получим

$$[x^{\pm(1-\alpha)}][x^{\beta\pm\alpha}] = [x^{\beta\pm1}] = X^{\beta\pm1} = X^{\pm(1-\alpha)} X^{\beta\pm\alpha}.$$

Физический смысл умножения на корректирующую функцию заключается в том, что дробное интегродифференцирование основано на мере $d^{\pm\alpha}x$, которая учитывает приращение только на множестве точек фрактала x_α, который является пространством дробной размерности α. Точки сопряженного пространства $x_{1-\alpha}$ размерности $1-\alpha$ в данном случае игнорируются. В то время как переменная x является объединением множества точек фрактала и точек сопряжённого пространства. Умножение на корректирующую функцию учитывает распространение переменных до всего одномерного пространства x. Фрактал x_α и сопряжённый фрактал $x_{1-\alpha}$ образуют пространство x, в котором оба фрактала находятся

$$x_\alpha \cup x_{1-\alpha} = x; \quad x_\alpha \cap x_{1-\alpha} = \varnothing.$$

Для частного случая интегрирования порядка α степенных функций с показателем $-\alpha$ получаемая физическая размерность будет иметь размерность числа

$$d^\alpha x : x^{-\alpha} = \ln_\alpha(x).$$

Здесь $\ln_\alpha(x)$ – натуральный логарифм порядка α.

Другими словами, для размерности в этом случае получим

$$[d^\alpha x : x^{-\alpha}] = [\ln_\alpha(x)] = X^0.$$

Многие другие, не степенные функции $f(x)$, тоже могут иметь физическую размерность числа, т. е. $[f(x)]=X^0$.

Особенности гомогенных фракталов

Предположим, что в одномерном пространстве, описываемом переменной x, находится фрактал размерности α, или x, $0 \le \alpha \le 1$. Если размерность фрактала постоянна α=const, то такой фрактал называется *гомогенным*. Данный фрактал занимает некоторое множество точек, принадлежащих оси x, которая будет составлять долю αx, которую будем называть *эффективной плотностью фрактала*. Остальные точки оси x буду принадлежать *сопряжённому фракталу* или нескольким фракталам. Для простоты будем считать, что сопряжённый фрактал один, тогда точки фракталов на оси x будут находиться в соотношении [18]

$$x = x_\alpha \cup x_{1-\alpha}; \quad x_\alpha \cap x_{1-\alpha} = \varnothing.$$

Здесь $x_{1-\alpha}$ – сопряженный фрактал, точки которого, как и точки фрактала x_α, лежат оси x.

Дробные размерности фрактала и сопряжённого фрактала будут

$$\dim_\varphi(x) = 1; \quad \dim_\varphi(x_\alpha) = \alpha; \quad \dim_\varphi(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Здесь $\dim_\varphi(...)$ – дробная (фрактальная) размерность фракталов, или размерность Хаусдорфа–Безиковича [1–3] рассматриваемых объектов.

Для фрактала и сопряжённого фрактала предполагается справедливым *правило сохранения размерности*

$$\dim_\varphi(x) = \dim_\varphi(x_\alpha \cup x_{1-\alpha}) = 1.$$

Эффективная плотность сопряжённого фрактала будет $(1-\alpha)x$.

Эффективная плотность переменной x, фрактала и сопряженного фрактала находятся в соотношении, в силу правила сохранения размерности

$$x = \alpha x + (1-\alpha)x.$$

Эффективная плотность переменной x совпадает с самой переменной x.

Физическая размерность фрактала и сопряженного фрактала будет

$$[x] = X; \quad [x_\alpha] = X^\alpha; \quad [x_{1-\alpha}] = X^{1-\alpha}.$$

Для физических размерностей будет справедливо

$$[x] = [x_\alpha][x_{1-\alpha}] = X^\alpha X^{1-\alpha} = X.$$

Здесь X – физическая размерность величины x, которая зависит от физической природы переменной x.

Дифференциал по переменной x можно записать как сумму дифференциалов по фракталу и по сопряжённому фракталу порядков α и $1-\alpha$

$$dx = dx_\alpha \cup dx_{1-\alpha} = dx_\alpha + dx_{1-\alpha}.$$

Дифференциалы по фракталу и по сопряжённому фракталу можно выразить через дробные дифференциалы порядков α и $1-\alpha$

$$dx_\alpha = Ax^{1-\alpha} d^\alpha x; \quad dx_{1-\alpha} = Bx^\alpha d^{1-\alpha} x.$$

Переходя от дифференциалов по точкам фрактала и сопряжённого фрактала dx_α и $dx_{1-\alpha}$ к дробным дифференциалам $d^\alpha x$ и $d^{1-\alpha}x$ по точкам всего пространства x, дифференциал dx можно записать как сумму дифференциалов по фракталу и сопряжённому фракталу

$$dx = dx_\alpha + dx_{1-\alpha} = Ax^{1-\alpha} d^\alpha x + Bx^\alpha d^{1-\alpha} x.$$

Здесь A и B – некоторые коэффициенты, обеспечивающие сохранение эффективной толщины и физической размерности фрактала и сопряжённого фрактала. Функции $x^{1-\alpha}$ и x^α являются *корректирующими функциями*.

Данное выражение дифференциала обобщает выражение для случая рассмотрения фракталов для раздельных потоков [19].

Заметим, что физические размерности всех слагаемых будут

$$[dx] = [Ax^{1-\alpha} d^\alpha x] = [Bx^\alpha d^{1-\alpha} x] = X.$$

Дробные размерности всех слагаемых будут

$$\dim_{\varphi}(dx)=1;\ \ \dim_{\varphi}(Ax^{1-\alpha}d^{\alpha}x)=1;$$

$$\dim_{\varphi}(Bx^{\alpha}d^{1-\alpha}x)=1.$$

Масштабный коэффициент при дробном интегрировании константы вдоль фрактала

Проинтегрируем с помощью d-оператора [14, 20] константу 1 вдоль оси x, которую разобьём на фрактал и на сопряжённый ему фрактал, что можно записать

$$dx:1=Ax^{1-\alpha}d^{\alpha}x:1+Bx^{\alpha}d^{1-\alpha}x:1.$$

В эквивалентной записи данный оператор интегрирования можно переписать

$$\int dx=\int dx_{\alpha}+\int dx_{1-\alpha}=Ax^{1-\alpha}\int d^{\alpha}x+Bx^{\alpha}\int d^{1-\alpha}x.$$

После интегрирования случая, когда подынтегральная функция равна 1, получим

$$\int dx=x+C;$$

$$\int dx_{\alpha}=\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}x^{\alpha}+\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}C_{\alpha}(x);$$

$$\int dx_{1-\alpha}=\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha}x^{1-\alpha}+$$

$$+\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha}C_{1-\alpha}(x).$$

Приравняв к нулю полиномы интегрирования $C=C_{1-\alpha}(x)=C_{\alpha}(x)=0$, которые дают неопределённость, получим равенство

$$x=\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}x^{\alpha}+\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha}x^{1-\alpha}.$$

Тогда легко найти коэффициенты A и B исходя из соотношения для эффективных толщин фрактала и сопряжённого фрактала

$$\alpha=\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)};\ \ 1-\alpha=\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}.$$

Тогда получим коэффициенты

$$A=\alpha^{2}\,\Gamma(\alpha);\quad B=(1-\alpha)^{2}\,\Gamma(1-\alpha),$$

которые будем называть соответственно *масштабным коэффициентом фрактала* и масштабным коэффициентом сопряжённого фрактала.

Окончательно получим для разложения дифференциала в соответствии с d-оператором

$$dx=\alpha^{2}\,\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}d^{\alpha}x+(1-\alpha)^{2}\,\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}d^{1-\alpha}x.$$

Для частных случаев $\alpha=1$ и $\alpha=0$ получим тождественные равенства $dx=dx$.

После интегрирования будут выполняться соотношения

$$x=x_{\alpha}\cup x_{1-\alpha}=\alpha x+(1-\alpha)x.$$

Здесь, исходя из полученных результатов, можно ввести геометрические *преобразования «сжатия» фрактала* и сопряжённого фрактала вдоль оси x до «предельной» плотности

$$x_{\alpha}\to\alpha x;\ \ x_{1-\alpha}\to(1-\alpha)x.$$

Для общего случая преобразований степенной зависимости фракталов будут справедливы соотношения

$$(x_{\alpha})^{g(y)}\to(\alpha x)^{g(y)}=\alpha^{g(y)}x^{g(y)}.$$

Здесь $g(y)$ – некоторая функция, зависящая от некоторой переменной y и не зависящая от переменной x.

Масштабный коэффициент при дробном дифференцировании на фракталах

Найдём аналогичный коэффициент при дробном дифференцировании. Для этого найдём производную переменной x по той же переменной x, которую можно записать как сумму производных фракталу x_{α} и сопряжённого фрактала $x_{1-\alpha}$ по переменной x

$$d^{-1}x:x=d^{-1}x:x_{\alpha}+d^{-1}x:x_{1-\alpha}=$$

$$=\frac{d}{dx}x_{\alpha}+\frac{d}{dx}x_{1-\alpha}=Mx^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x+Nx^{1-\alpha}\frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}}x.$$

Здесь M и N – некоторые коэффициенты, обеспечивающие сохранение эффективной толщины фрактала и сопряжённого фрактала.

Найдём коэффициенты, исходя из условия выполнения равенства

$$\frac{d}{dx}x=1.$$

Кроме этого необходимо учитывать условие для эффективных толщин фрактала и его сопряжённого фрактала

$$1=\alpha+(1-\alpha).$$

После дробного дифференцирования слагаемых получим

$$Mx^{-1+\alpha}\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\alpha+1)}x^{1-\alpha}+Mx^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x)+$$

$$+Nx^{-\alpha}\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-(1-\alpha)+1)}x^{1-1+\alpha}+Nx^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x)=$$

$$=M\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+Mx^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x)+$$

$$+N\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}+Nx^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x).$$

Приравняв к нулю полиномы интегрирования $C_{-\alpha}(x)=C_{-1+\alpha}(x)=0$, получим равенство

$$M\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+N\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}=\alpha+(1-\alpha)=1.$$

Найдём неопределённые коэффициенты M и N

$$M=\alpha\,\Gamma(2-\alpha);\quad N=(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha).$$

Полиномы интегрирования после данных преобразований будут

$$Mx^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x)=\alpha\,\Gamma(2-\alpha)x^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x);$$

$$Nx^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x)=(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)x^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x).$$

Здесь $x^{\alpha-1}$ и $x^{-\alpha}$ – *корректирующие функции*, а $\Gamma(2-\alpha)$ и $\Gamma(1+\alpha)$ – масштабные коэффициенты при дробном дифференцировании по переменной x.

В результате производная по фракталу и сопряжённому фракталу будет

$$d^{-1}x : x = d^{-\alpha}x : x_{\alpha} + d^{1-\alpha}x : x_{1-\alpha} =$$
$$= \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x_{\alpha} + \frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}} x_{1-\alpha} =$$
$$= \frac{\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}{x^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x + \frac{(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{x^{\alpha}} \frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}} x =$$
$$= \alpha + C_{-\alpha}(x) + (1-\alpha) + C_{-1+\alpha}(x) =$$
$$= 1 + C_{-\alpha}(x) + C_{-1+\alpha}(x).$$

Для предельных значений α=1 и α=0 получим тождественные равенства $\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x$.

Физические размерности первого и второго слагаемого будут равны

$$\left[\frac{d}{dx}x\right] = \left[\frac{\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}{x^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x\right] =$$
$$= \left[\frac{(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{x^{\alpha}} \frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}} x\right] = \mathrm{X}^{0}.$$

Дробные размерности этих слагаемых будут равны нулю

$$\dim_{\varphi}\left(\frac{d}{dx}x\right) = 0;$$
$$\dim_{\varphi}\left(\frac{\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}{x^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x\right) = 0;$$
$$\dim_{\varphi}\left(\frac{(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{x^{\alpha}} \frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}} x\right) = 0.$$

Заключение

Получены коэффициенты выравнивания физической размерности и масштабные коэффициенты, которые необходимо вводить при переходах из пространств с нецелочисленными размерностями в пространства с целочисленными размерностями. Полученные масштабные коэффициенты являются важными частными случаями, но не являются общими. В дальнейшем предполагается получить более общие масштабные коэффициенты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
2. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – New York: John Wiley, 2003. – 337 p.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
4. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. – 234 p.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies. V. 204. – New York: Elsevier, 2006. – 520 p.
7. Anastassiou G. Fractional differentiation inequalities. – Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer, 2009. – 672 p.
8. Ross B. Fractional Calculus and Its Applications. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975. – 386 p.
9. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures. – 1997. – V. 378. – P. 223–276.
10. Falconer K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. – Chichester: John Wiley & Sons, 2003. – 288 p.
11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
12. Miller K., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – New York: John Wiley & Sons, 1993. – 366 p.
13. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition. – Heidelberg: Springer, 2010. – 247 p.
14. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
15. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – М.; Ижевск: РХД, 2010. – 568 с.
16. Чуриков В.А. Локальный *d*-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.
17. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
18. Чуриков В.А. Эффективная длина гомогенных фракталов, вложенных в одномерное евклидово пространство, и норма на её основе // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: Матер. Республ. конф. с участием учёных из стран СНГ. – Ташкент, 21–23 ноября 2013. – Ташкент: Изд-во НУУ, 2013. – С. 203–205.
19. Чуриков В.А. Замечания о методе разделения потоков без обмена при описании физических процессов на фракталах // Математика и математическое моделирование: Сборник матер. VII Всеросс. молодежной научно-инновационной школы. – Саров, 16–19 апреля 2013. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2013. – С. 54–55.
20. Чуриков В.А. Фрактальная производная и фрактальный неопределённый интеграл на гомогенных фракталах в дробном анализе на основе *d*-оператора // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: матер. Республ. конф. с участием учёных из стран СНГ. – Ташкент, 21–23 ноября 2013. – Ташкент: Изд-во НУУ, 2013. – С. 205–207.

Поступила 09.10.2013 г.

UDC 517

FACTORS OF PHYSICAL DIMENSION ADJUSTMENT AND SCALE FACTORS UNDER FRACTIONAL INTEGRATION AND FRACTIONAL DIFFERENTIATION ON FRACTAL

Viktor A. Churikov,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: vachurikov@list.ru

The urgency of the work is conditioned by a need to transform mathematical models defined in spaces of non-integral dimensions into spaces with integral dimension.
The purpose of the work *is to find out the transformations of sedate functions given on fractals under their fractional integration and fractional differentiation (fractional integrodifferentiation), in spaces of non-integral dimension with the following transformations of sedate functions into integral dimension spaces. Owing to changes in physical dimension and in fractal linear sizes under fractional integrodifferentiation the changes should be corrected for their further consideration in spaces with integer number of measurements.*
The methods of the study*: mathematical transformations based on local d-operator of fractional differentiation and fractional integration, acting in sedate function space.*
The results*: The paper introduces the factors of dimension adjustment to co-ordinate physical dimension in spaces with non-integral and integral dimensions. For co-ordination of changes in fractal linear sizes when turning into spaces with integer number of measurements it is necessary to enter the factors called the scale factors. The paper introduces the important quotient events of scale factor.*

Key words:
d-operator, efficient density of the fractal, associate fractal, rule of the conservation to dimensionality, scale factor of the fractal, efficient density of the fractal, associate fractal, rule of the conservation to dimensionality, scale factor of the fractal.

REFERENCES

1. Feder E. *Fraktaly* [Fractals]. New York, Springer, 1988. 310 p.
2. Falconer K.J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. New York, John Wiley, 2003. 337 p.
3. Mandelbrot B.B. *Fraktalnaya geometriya prirody* [Fractals Geometry of Nature]. New York, Freeman, 1982. 468 p.
4. Oldham K.B., Spanier J. *The fractional calculus*. New York; London, Academic Press, 1974. 234 p.
5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Intergaly i proizvodnye drobnogo poryadka* [Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications]. New York, Gordon and Breach, 1993. 1006 p.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies*. V. 204. New York, Elsevier, 2006. 520 p.
7. Anastassiou G. *Fractional differentiation inequalities*. Dordrecht; Heidelberg; London; New York, Springer, 2009. 672 p.
8. Ross B. *Fractional Calculus and its Applications*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1975. 386 p.
9. Gorenflo R., Mainardi F. *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractal and Fraction a Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures*, 1997, vol. 378. pp. 223–276.
10. Falconer K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Chichester, John Wiley & Sons, 2003. 288 p.
11. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculation and its application]. Moscow, Fizhmatlit, 2003. 271 p.
12. Miller K., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, John Wiley&Sons, 1993. 366 p.
13. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition*. Heidelberg, Springer, 2010. 247 p.
14. Uchaykin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional derivative method]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. 512 p.
15. Tarasov V.E. Modeli teoreticheskoy fiziki s integro-differentsirovaniem drobnogo poryadka [Models of theoretical physics with integro-differentiation of fractional order]. Moscow, RHD, 2010. 568 p.
16. Churikov V.A. Lokalny *d*-operator differencirovaniya i inregrirovaniya konechnykh veshchestvennykh poryadkov dlya drobnogo analiza [Local *d*-operator of the differentiation and final material order for fractional analysis]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2011, vol. 318, no. 2, pp. 5–10.
17. Sedov L.I. Metody podobiya i razmernosti v mekhanike [Analog and dimensional methods in mechanics]. Moscow, Nauka, 1977. 440 p.
18. Churikov V.A. Effektivnaya dlina gomogennykh fraktalov vlozhennykh v odnomernoe evklidovo prostranstvo i norma na ee osnove [Efficient length of homogeneous fractals, embedded in univariate Euclid space and rate on its base]. *Sovremennie problemy differentsialnykh uravneniy i ikh prilozheniya: materialy respublikanskoy konferentsii s uchastiem uchenykh iz stran SNG* [Current problems of differential equations and their applications. Proc. Republic conference with participation of scientists from CIS countries]. Tashkent, 21–23 November 2013. Tashkent, NUU Publ., 2013. pp. 203–205.
19. Churikov V.A. Zamechaniya o metode razdeleniya potokov bez obmena pri opisanii fizicheskikh protsessov na fraktalakh [Remarks on flow division method without changing when describing physical processes on fractals]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie: Sbornik materialov VII vserossiyskoy molodezhnoy nauchno-innovatsionnoy shkoly* [Mathematics and mathematical modeling. Proc. VII All-Russian youth research innovative school]. Sarov, SarFTI NIYaU MIFI, 2013, pp. 54–55.
20. Churikov V.A. Fraktalnaya proizvodnaya i fraktalny neopredelenny integral na gomogennykh fraktalakh v drobnom analize na osnove *d*-operatora [Fractal derivative and fractal vague integral on homogeneous fractals in fractional analysis based on *d*-operator]. *Sovremennye problemy differentsialnykh uravneniy i ikh prilozheniya: materialy respublikanskoy konferentsii s uchastiem uchenykh iz stran SNG* [Current problems of differential equations and their applications. Proc. Republic conference with participation of scientists from CIS countries]. Tashkent, 21–23 November 2013. Tashkent, NUU Publ., 2013, pp. 205–207.