

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. СЛУЧАЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ГРАНИЦЕ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович,

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии
Ошского государственного университета, Республика Кыргызстан, 714000,
г. Ош, ул. Ленина, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

При математическом моделировании процессов конвективно-диффузионного переноса, химической кинетики и др. возникают краевые задачи для уравнений эллиптического типа второго порядка с малым параметром при старших производных. Явное решение этих задач построить в общем случае не удастся, поэтому используют разные асимптотические методы. Основополагающими в этом направлении являются работы А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, С.А. Ломова, В.Б. Бутузова, Л.И. Люстерника, М.И. Вишика, А.М. Ильина. В случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое решение, эти задачи, по терминологии А.М. Ильина, называют бисингулярными. Ранее для построения асимптотики бисингулярно возмущенных задач применялся метод сращивания, а метод пограничных функций не использовался напрямую. В работе предложена модификация метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. Применяя обобщенный метод пограничных функций, построено асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в случае, когда предельное уравнение имеет особенность на граничных точках области. Задача рассматривается в круге.

Ключевые слова:

Асимптотика, бисингулярное возмущение, эллиптическое уравнение, особая точка, задача Дирихле, малый параметр, уравнение Эйри, функции Эйри.

Введение

Как нам известно, многие задачи физики, техники и других наук приводятся к сингулярно возмущенным уравнениям эллиптического типа. Сингулярно возмущенные уравнения эллиптического типа рассматривались многими авторами, например в работах [1–10] и в цитируемых ими работах. Впервые В. Вазов в работе [1] изучил асимптотику решения первой краевой задачи для простейшего эллиптического уравнения внутри области. Левинсон [2] в двумерном случае исследовал асимптотику решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром ε , вырождающейся при $\varepsilon=0$ в задачу Коши для уравнения первого порядка с регулярным полем характеристик. Им был построен для этой цели пограничный слой вблизи соответствующей части границы. Предельный переход в этой задаче с любым полем характеристик проведен в работе С. Л. Каменомостской [8]. А.М. Ильин в работе [10] рассматривал различные задачи, в том числе бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения. А.М. Ильин, применяя метод сращивания асимптотических разложений, построил формальные асимптотические разложения (ФАР) решений и привел их строгие обоснования. В данной работе для построения полного асимптотического разложения мы используем аналог метода погранфункций [11–13] (обобщение метода погранфункций). Обобщенный метод пограничных функций ранее применялся для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота. В работе [11] обобщенным методом пограничных функций построена

асимптотика решения уравнения Лайтхилла первого порядка. В работе [12] построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной точкой поворота в действительной оси. В работе [13] построено равномерное асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя точками поворота в действительной оси.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения

$$\varepsilon \Delta u(x, y) - q(x)u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}, \quad (2)$$

где $f(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$ – заданная функция.

I. Рассмотрим случай, когда $q(x) = (1-x)$. В этом случае уравнение имеет простую точку поворота в точке $(1, 0)$. Для начала рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), (2), которое будем искать в виде:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(x, y), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

после подстановки (3) в (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получим рекуррентную систему уравнений:

$$-(1-x)\tilde{v}_0(x, y) = f(x, y),$$

$$(1-x)\tilde{v}_k(x, y) = \Delta \tilde{v}_{k-1}(x, y), k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда определяются все $\tilde{v}_k(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D} \setminus (1, y))$:

$$\tilde{v}_0(x, y) = -f(x, y)/(1-x),$$

$$\tilde{v}_k(x, y) = \Delta \tilde{v}_{k-1}(x, y)/(1-x), k \in \mathbb{N}, \text{ т. е.}$$

$$V = -\frac{f(x, y)}{(1-x)} + \frac{\varepsilon}{(1-x)^4} F_1(x, y) + \\ + \dots + \frac{\varepsilon^n}{(1-x)^{3n+1}} F_n(x, y) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $F_k(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

В граничной точке $(1, 0)$ все эти функции $\tilde{v}_k(x, y)$ имеют нарастающие особенности:

$$\tilde{v}_k(x, y) = \frac{F_k(x, y)}{(1-x)^{3k+1}}.$$

Построение ФАР решения. Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$u(x, y) = v_0(x, y) + \pi_0(\eta, \phi) + w_{-2}(\tau, \xi) / \mu^2 + \\ + w_{-1}(\tau, \xi) / \mu^1 + w_0(\tau, \xi) + R(x, y), \quad (4)$$

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon = \mu^6$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

Подставляя (4) в (1) получим:

$$\varepsilon \Delta v_0 - (1-x) v_0 + \mu^2 \Delta_{\tau\xi} (w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) - \tau (w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \\ + \varepsilon \Delta_{\eta\phi} \pi_0 - (1 - \cos(\phi) + \lambda \eta \cos(\phi)) \pi_0 + \varepsilon \Delta R - (1-x) R = \\ = f(x, y) - H(y) + H(\xi \mu), \quad (5)$$

где

$$\Delta_{\tau\xi} = \frac{1}{\mu^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right),$$

$$\Delta_{\eta\phi} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{(1-\lambda\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda\eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

Здесь мы ввели новую неизвестную функцию $H(y)$, которую определяем ниже.

Из равенства (5) имеем:

$$-(1-x) v_0 = f(x, y) - H(y),$$

Отсюда

$$v_0(x, y) = -(f(x, y) - H(y)) / (1-x),$$

и здесь мы определим функцию $H(y)$ так, чтобы $v_0(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$. Пусть $H(y) = f(1, y)$, тогда

$$v_0(x, y) = -\sum_{j=1}^{\infty} f_j(y) (1-x)^{j-1}.$$

Из равенства (5) для π_0 получим задачу:

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \eta^2} - (1 - \cos \phi) \pi_0 = 0,$$

$$\pi_0(0, \phi) = -v_0(1, \phi), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi_0(\eta, \phi) = 0.$$

Отсюда

$$\pi_0(\eta, \phi) = -e^{-\sqrt{1-\cos \phi} \eta} v_0(1, \phi).$$

Для функций $w_{-2}(\tau, \xi)$, $w_{-1}(\tau, \xi)$, $w_0(\tau, \xi)$ составим следующие задачи:

$$\frac{\partial^2 w_{-2}}{\partial \tau^2} - \tau w_{-2} = H_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{-2}(\tau, \xi) = 0, \\ w_{-2}(0, 0) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial \tau^2} - \tau w_{-1} = \xi H_1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{-1}(\tau, \xi) = 0, \\ w_{-1}(0, 0) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \tau w_0 = \xi^2 H_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w_{-2}(\tau, \xi) = 0, \\ w_0(0, 0) = -v_0(0, 0), \quad (8)$$

где $H_k = \frac{1}{k!} H^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2$.

Задачи (6)–(8) имеют следующие решения:

$$w_{-2}(\tau, \xi) = -\pi H_0 \left[\begin{aligned} & Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s) ds + \\ & + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s) ds - \\ & - \sqrt{3} Ai(\tau) \int_0^\infty Ai(s) ds \end{aligned} \right],$$

$$w_{-1}(\tau, \xi) = -\pi H_1 \xi \left[\begin{aligned} & Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s) ds + \\ & + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s) ds - \\ & - \sqrt{3} Ai(\tau) \int_0^\infty Ai(s) ds \end{aligned} \right],$$

$$w_0(\tau, \xi) = -\pi H_2 \xi^2 \left[\begin{aligned} & Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s) ds + \\ & + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s) ds - \\ & - \sqrt{3} Ai(\tau) \int_0^\infty Ai(s) ds \end{aligned} \right] - \\ - v_0(0, 0) \frac{Ai(\tau)}{Ai(0)}.$$

Асимптотику решений задачи (6)–(8) при $\tau \rightarrow \infty$ ищем в виде

$$w_k(\tau, \xi) = a_0(\xi) + \frac{a_1(\xi)}{\tau} + \dots + \frac{a_n(\xi)}{\tau^n} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), имеем:

$$w_k(\tau, \xi) = a_0(\xi) + \frac{a_1(\xi)}{\tau} + \dots + \frac{a_n(\xi)}{\tau^n} + \dots$$

Отсюда

$$a_0(\xi) \equiv 0, \quad a_1(\xi) = -H_0, \quad a_2(\xi) \equiv 0, \quad a_3(\xi) \equiv 0, \quad a_4(\xi) = 2a_1(\xi), \dots$$

Следовательно,

$$w_{-2}(\tau, \xi) = -\frac{H_0}{\tau} \left(a_1 + \frac{1}{\tau^3} a_4 + \dots + \frac{1}{\tau^{3m}} a_{3m+1} + \dots \right).$$

Аналогично получим:

$$w_{-1}(\tau, \xi) = -\frac{H_1 \xi}{\tau} \left(a_1 + \frac{1}{\tau^3} a_4 + \dots + \frac{1}{\tau^{3m}} a_{3m+1} + \dots \right),$$

$$w_0(\tau, \xi) = -\frac{H_2 \xi^2}{\tau} \left(a_1 + \frac{1}{\tau^3} a_4 + \dots + \frac{1}{\tau^{3m}} a_{3m+1} + \dots \right).$$

Оценка остаточного члена $R(x, y)$. Для $R(x, y)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (1-x) R = O(\mu^6), \quad R_\Gamma = 0.$$

Применяя принцип максимума [14], имеем:

$$|R| \leq c\mu \text{ в области } \bar{D}.$$

Нами доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть $f(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $f(1, 0) \neq 0$, тогда для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x, y) = v_0(x, y) + \pi_0(\eta, \phi) + w_{-2}(\tau, \xi)/\mu^2 + \\ + w_{-1}(\tau, \xi)/\mu^1 + w_0(\tau, \xi) + O(\mu),$$

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon = \mu^6$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

II. Пусть $q(x) = (1-x^2)$. В этом случае предельное уравнение имеет особенность в двух граничных точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

Структура внешнего разложения примет вид:

$$V = -\frac{f(x, y)}{(1-x^2)} + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^4} F_1(x, y) + \\ + \dots + \frac{\varepsilon^n}{(1-x^2)^{3n+1}} F_n(x, y) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $F_k(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k \in \mathbb{N}$.

Построение ФАР решения. Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$u(x, y) = v_0(x, y) + \pi_0(\eta, \phi) + g_{-2}(\gamma, \xi)/\mu^2 + \\ + g_{-1}(\gamma, \xi)/\mu^1 + g_0(\gamma, \xi) + w_{-2}(\tau, \xi)/\mu^2 + \\ + w_{-1}(\tau, \xi)/\mu^1 + w_0(\tau, \xi) + R(x, y), \quad (10)$$

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\gamma = (1+x)/\mu^2$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon = \mu^6$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$; $g(\gamma, \xi)$ – обобщенная погранфункция в окрестности точки $(-1, 0)$, а $w(\tau, \xi)$ – обобщенная погранфункция в окрестности точки $(1, 0)$.

Подставляя (10) в (1), получим:

$$\varepsilon \Delta v_0 - (1-x^2)v_0 + \mu^2 \Delta_{\gamma\xi} (g_{-2} + \mu g_{-1} + \mu^2 g_0) - \tau_1 (g_{-2} + \mu g_{-1} + \mu^2 g_0) + \\ + \mu^2 \Delta_{\gamma\xi} (w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) - \tau (w_{-1} + \mu w_1 + \mu^2 w_0) + \\ + \varepsilon \Delta_{\gamma\xi} \pi_0 - (1 - \cos^2(\phi) + 2\lambda\eta \cos^2(\phi) - \lambda^2 \eta^2 \cos^2(\phi)) \pi_0 + \\ + \varepsilon \Delta R - (1-x^2)R = f(x, y) - H(x, y) + H(x, y). \quad (11)$$

Как всегда мы здесь ввели новую функцию $H(x, y)$, которую определим ниже.

Из равенства (11) имеем:

$$-(1-x^2)v_0 = f(x, y) - H(x, y).$$

Тем самым

$$v_0(x, y) = -(f(x, y) - H(x, y))/(1-x^2).$$

Определим неизвестную функцию $H(x, y)$ так, чтобы $v_0(x, y) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$. Пусть

$$H(y) = (f(1, y)(1+x) + f(-1, y)(1-x))/2,$$

тогда

$$v_0(x, y) = -(f(x, y) - (f(1, y)(1+x) + f(-1, y)(1-x))/2)/(1-x^2).$$

Из равенства (11) для π_0 получим задачу:

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \eta^2} - (1 - \cos^2 \phi) \pi_0 = 0, \\ \pi_0(0, \phi) = -v_0(1, \phi), \lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi_0(\eta, \phi) = 0,$$

решение которой имеет вид:

$$\pi_0(\eta, \phi) = -e^{-|\sin \phi| \eta} v_0(1, \phi).$$

Для функции $w_{-2}(\tau, \xi)$, $w_{-1}(\tau, \xi)$, $w_0(\tau, \xi)$, $g_{-2}(\gamma, \xi)$, $g_{-1}(\gamma, \xi)$, $g_0(\gamma, \xi)$ составляются аналогичные (6)–(8) задачи.

При $\tau \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow \infty$ имеем:

$$w_{-2} = O(\tau^{-1}), w_{-1} = O(\xi \tau^{-1}), w_0 = O(\xi \tau^{-1}), \\ g_{-2} = O(\gamma^{-1}), g_{-1} = O(\xi \gamma^{-1}), g_0 = O(\xi^2 \gamma^{-1}).$$

Оценка остаточного члена $R(x, y)$. Для $R(x, y)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (1-x^2) R = O(\mu^3), R_t = 0.$$

Учитывая результат работы [13] и применяя принцип максимума [14], имеем:

$$|R| \leq c\mu \text{ в области } \bar{D}.$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $q(x) = (1-x^2)$, $f(1, 0) \neq 0$, $f(-1, 0) \neq 0$, тогда для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x, y) = v_0(x, y) + \pi_0(\eta, \phi) + g_{-2}(\gamma, \xi)/\mu^2 + g_{-1}(\gamma, \xi)/\mu^1 + \\ + g_0(\gamma, \xi) + w_{-2}(\tau, \xi)/\mu^2 + w_{-1}(\tau, \xi)/\mu^1 + w_0(\tau, \xi) + O(\mu),$$

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\gamma = (1+x)/\mu^2$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon = \mu^6$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $g(\gamma, \xi)$, $w(\tau, \xi)$ – обобщенные погранфункции, соответственно в окрестности точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

Заключение

Обобщением метода пограничных функций построены асимптотические разложения решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в круге. Рассмотрены два случая: 1) особенность появляется в одной граничной точке; 2) особенность появляется на двух граничных точках. Обобщенный метод пограничных функций можно применять при построении асимптотических разложений решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений. Причем асимптотическое разложение представляется в явном виде по дробным степеням малого параметра ε . Формальное асимптотическое разложение обосновано применением принципа максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wasow W. Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta U + \lambda \partial U / \partial x = \lambda f(x, y)$ // *Duke Math. J.* – 1944. – V. 11. – P. 405–415.
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + A u_x + B u_y + C u = D$ for small ε // *Ann. of Math.* – 1950. – V. 51. – P. 428–445.
3. Eckhaus W., De Jager E.M. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1966. – V. 23. – № 1. – P. 26–86.
4. Eckhaus W. Boundary Layers in Linear Elliptic Singular Perturbation Problems // *SIAM Review*. – 1972. – V. 14. – № 2. – P. 225–270.
5. De Jager E.M. Singular elliptic perturbations of vanishing first order differential operators // *Lecture Notes in Math.* – 1972. – № 280. – P. 73–86.
6. De Groen P.P.N. Turning points in second order elliptic singular perturbation problems // *Lecture Notes in Math.* – 1972. – № 280. – P. 273–278.
7. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem // *SIAM J. Math. Anal.* – 1987. – V. 18. – № 5. – P. 1467–1511.
8. Каменомостская С.Л. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных // *Мат. сб.* – 1952. – № 31 (73):3. – С. 703–708.
9. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН* – 1957. – № 12:5 (77). – С. 3–122.
10. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 334 с.
11. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point // *American J. Math. & Statistics*. – 2013. – V. 3. – № 1. – P. 53–61.
12. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбебаев С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // *Матем. Заметки*. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 483–487.
13. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2013. – № 1 (21). – С. 34–40.
14. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Поступила 12.07.2013 г.

UDC 517.955.8

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE BISINGULAR PERTURBED ELLIPTIC EQUATION. CASE OF A SINGULAR POINT ON THE BOUNDARY

Dilmurat A. Tursunov,

Cand. Sc., Osh State University, Kyrgyz Republic, 714000,
Osh, Lenin street, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

For mathematical modeling the convective-diffusive transport, chemical kinetics the boundary value problems occur for elliptic equations of the second order with a small parameter in the highest derivatives. The explicit solution of these problems can be constructed in a general case using different asymptotic methods. The fundamental work in this direction was done by A.N. Tikhonov, A.B. Vasilyeva, S.A. Lomov, V.B. Butuzov, L.I. Lyusternik, M.I. Vishik, A.M. Ilin. When the corresponding unperturbed equation has a smooth solution these problems are called bisingular in A.M. Ilin terminology. The method of matching was applied before to construct the asymptotic of bisingularly perturbed problems, but the method of boundary functions was not used directly. The author has proposed to modify the method of boundary functions that makes possible the construction of the asymptotic solutions of bisingularly perturbed elliptic equation. The aim of the study is to develop the asymptotic method of boundary functions for bisingularly perturbed equations. Applying the generalized method of boundary functions, the author constructed the asymptotic expansion of the solution for bisingularly perturbed elliptic equation in the case when the limit equation has a singularity at the boundary points of the region. The problem is considered in the circle.

Key words:

Asymptotics, bisingular perturbation, elliptic equation, singular point, Dirichlet problem, small parameter, Airy equation, Airy functions.

REFERENCES

1. Wasow W. Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta U + \lambda \partial U / \partial x = \lambda f(x, y)$. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 405–415.
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + A u_x + B u_y + C u = D$ for small ε . *Ann. of Math.*, 1950, vol. 51, pp. 428–445.
3. Eckhaus W., De Jager E.M. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1966, vol. 23, no. 1, pp. 26–86.
4. Eckhaus W. Boundary Layers in Linear Elliptic Singular Perturbation Problems. *SIAM Review*, 1972, vol. 14, no. 2, pp. 225–270.
5. De Jager E.M. Singular elliptic perturbations of vanishing first order differential operators. *Lecture Notes in Math.*, 1972, no. 280, pp. 73–86.
6. De Groen P.P.N. Turning points in second order elliptic singular perturbation problems. *Lecture Notes in Math.*, 1972, no. 280, pp. 273–278.
7. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 1987, vol. 18, no. 5, pp. 1467–1511.

8. Kamenomostskaya S.L. Ob uravneniyakh ellipticheskogo i parabolicheskogo tipa s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh [On equations of elliptic and parabolic type with a small parameter in the highest derivatives]. *Mat. sb.*, 1952, no. 31 (73): 3, pp. 703–708.
9. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Reguljarnoe vyrozhdzenie i pogranichny sloj dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy s malym parametrom [Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter]. *UMN (Successes of Mathematical Sciences)*, 1957, no. 12:5 (77), pp. 3–122.
10. Ilin A.M. Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach [Matching of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1989. 334 p.
11. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point. *American J. Math. & Statistics*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 53–61.
12. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Obobshchenie metoda pogranfunktsiy dlya resheniya kraevoy zadachi dlya bisingulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [Generalization of the boundary functions for solving boundary value problem for Bisingular perturbed second order differential equation]. *Matem. Zametki (Mat. Notes)*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 483–487.
13. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s dvumya tochkami povorota [Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed second order differential equation with two turning points]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika (Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and mechanics)*, 2013, no. 1 (21), pp. 34–40.
14. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka, 1989. 464 p.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ РАНГА r АФФИННОГО Q_m И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ

Аль-Хассани Мудхар Аббас,

преподаватель кафедры математики Университета Басры, Ирак;
аспирант кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: mudhar73@mail.ru

Лучинин Анатолий Алексеевич,

канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

Актуальность работы вызвана необходимостью дополнительного изучения специального отображения $V_{m,n}^r$ ранга $r < \min(m, n)$ аффинного Q_m и проективного P_n пространств.

Цель работы. В предыдущих работах были рассмотрены отображения $V_{m,n}^r$, когда $r < \min(m, n)$ в случаях $m=n$, $m < n$, $m > n$. В данной работе рассматривается дифференцируемое отображение $V_{m,n}^r$ ранга $r < \min(m, n)$ аффинного пространства Q_m и проективного пространства P_n .

Методы исследования. Основными методами исследования являются метод внешних форм Картана в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева. Эти методы предполагают локальное изучение рассматриваемого объекта и использование функций класса C^c .

Результаты. Рассмотрено регулярное отображение ранга r аффинного и проективного пространств. Дана геометрическая характеристика этого отображения. С отображением $V_{m,n}^r$ инвариантно ассоциируется отображение m -мерного пространства в многообразии невырожденных нуль-пар. Доказано (геометрически и методом Кэлера) существование данного отображения. Изучена аналитически и геометрически структура внутреннего фундаментального геометрического объекта.

Ключевые слова:

Дифференцируемые отображения, многомерные пространства и поверхности, геометрические объекты.

1. Аналитический аппарат

1.1. Как и в [1–3] рассматривается m -мерное аффинное пространство Q_m и n -мерное эквипроективное пространство P_n , отнесенные к подвижному аффинному реперу Q и подвижному эквипроективному реперу P с соответствующими деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$\begin{aligned} Q_m : Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}, d\bar{B} = \Theta^a \bar{\varepsilon}_a, d\bar{\varepsilon}_a = \Theta_a^b \bar{\varepsilon}_b, \\ D\Theta^a = \Theta^b \wedge \Theta_b^a, D\Theta_a^b = \Theta_a^c \wedge \Theta_c^b, (a, b, c = \overline{1, m}); \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n : P = \{\bar{A}_I\}, d\bar{A}_I = \omega_I^J \bar{A}_J, D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J, \\ \omega_K^K = 0, (I, J, K = \overline{0, n}). \quad (2) \end{aligned}$$

Предполагается, что между пространствами существует дифференцируемое отображение

$$V_{m,n} : Q_m \rightarrow P_n. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1) и (2) запишутся в виде

$$\omega_0^i = A_i^a \Theta_a^i, (i, j, k = \overline{1, n}). \quad (4)$$