МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ – ПРОЕКТОРОВ

П.С. Бондаренко
О.Н. Вылегжанин
Томский политехнический университет
Psb8@tpu.ru

Введение

Задача линейного программирования (ЛП) активно используется для решения задач оптимизации с линейными ограничениями, возникающими в различных проблемных областях [1][2]. Обычно для решения задачи ЛП используется, разработанный Данцигом симплекс - метод [3], в основе которого лежит последовательное применение модифицированных преобразований Гаусса-Жордана [4] для перемещения рабочей точки по вершинам многогранника допустимых значений, определяемого множеством ограничений - неравенств задачи ЛП. В настоящей работе предлагается несколько иной подход, в котором перемещение рабочей точки осуществляется на основе применения операторов – проекторов.

Постановка задачи ЛП:

Стандартная постановка задачи ЛП сводится к отысканию экстремума целевой функции задачи вида [5]

$f(x) = < c, x >$, *(1)*

где c – вектор – столбец коэффициентов

x – вектор – столбец неизвестных

при наличии множества ограничений равенств вида $A_1 x = b_1$ и ограничений - неравенств вида $A_2 x \leq b_2$. В описываемом методе решения предлагается, на основе ограничений - равенств сократить размерность пространства, в котором определено решение задачи ЛП, до величины $m = n - k$, где:

n – исходная размерность пространства

k – ранг матрица A_1

Для такого сокращения из исходной матрицы A_1 выделяется множество столбцов, образующих базисный набор для всех столбцов матрицы A_1. Количество таких столбцов равно k и они образуют матрицу $\overline{A}_1$. Процедура выделения новой матрицы описана в работе [6]. А обоснованием этой процедуры является следующая теорема:

<u>*Теорема 1.*</u> *Если A_1 – матрица ограничений – равенств ранга k (rk A = k), и первые k столбцов A_1 образуют базисный набор, то*

$\hat{x} = \hat{A}^{+}(b - \overline{A} * \overline{x})$ *(2)*

Где $\hat{x}$ – вектор первых k элементов, $\overline{x}$ – вектор остальных элементов x, а $\hat{A}^{+}$ – матрица, псевдообратная к первым k столбцам

$\overline{A}_1$

При этом целевая функция задачи преобразуется в соответствии с теоремой: [7]

<u>*Теорема 2.*</u> *Если <c,x> - линейная форма, то при наличии ограничений - равенств вида $A_1 x = b_1$ она преобразуется к форме*

$$c^T * x = \hat{c}^T * \hat{A}^{+} * b + \left(\overline{c}^T - \hat{c}^T * \hat{A}^{+} * \overline{A}\right) * \overline{x}$$

Где $\hat{c}$ и $\overline{c}$ – компоненты вектора коэффициентов, соответствующие компонентам $\hat{x}$ и $\overline{x}$ вектора x.

Алгоритм выше описанного преобразования приведен в статье [7]. Кроме того, в соответствии с выше описанным преобразованием, переопределяется и набор ограничений - неравенств таким образом, что размерность пространства в котором определен многогранник допустимых решений, сокращается до m.

Для получения базисного решения выполняется последовательность преобразований[7], выделяющих линейное подпространство, образованное пересечением подпространств размерности m-1, определяемых двумя, тремя и т.д. строками системы неравенств ограничений $A_2 x \leq b_2$. Базисное решение получается, как пересечение n-k строк матрицы ограничений - неравенств. Обоснованием этих преобразований является следующая теорема:

<u>*Теорема 3*</u>. *Если точка x_k принадлежит пересечению k плоскостей, заданных множеством строк матрицы A_2 , то её проекция на пересечение плоскости, заданной строкой a_j с пересечением плоскостей, заданных строками матрицы A_2 есть:*

$x_{k+1} = x_k + \frac{b_j - a_i^T * x_k}{a_i^T * R * a_i} * a_i^T * R$ *(3)*

Где $R = (I - A_k^{+} * A_k)$ – оператор – проектор на пространство, перпендикулярное пространству, натянутому на строки матрицы A_2.

Описание алгоритма решения задачи:

Алгоритм перемещения рабочей точки[8], принадлежащей линейному пространству размерности 0, из базисного решения в точку оптимума осуществляется путем продвижения вдоль линейного пространства размерности 1, имеющего максимальную проекцию на градиент целевой функции. Вычисления соответствующего оператора - проектора, осуществляется рекуррентным методом псевдообращения Гревиля [9].

После каждого перемещения рабочей точки проверяются выполнения условий Куна-Таккера [11]. Точка в которой выполняются все условия Куна-Таккера является решением задачи ЛП. Напомним, что условия Куна-Таккера для задачи ЛП имеют вид:

1. $x^* \in M$, где x^* – решение задачи,
2. $\lambda^i * (b_i - a_i * x_i) = 0, \ i = 1, \dots, n$
3. $c + A^T \lambda = 0$

Где λ_i – вектор неизвестных, неотрицательных коэффициентов (коэффициентов Лагранжа), a_i – строки матрицы ограничений – неравенств, а М – область выполнения ограничений – неравенств (область допустимых решений).

Причем первое (принадлежность точки оптимума многограннику допустимых решений) и третье (градиент функции Лагранжа) условия выполняется по построению.

Заключение:

Описанный алгоритм обладает на наш взгляд следующими преимуществами перед обычно применяемым симплекс – методом:

1. За счет анализа ограничений - равенств, существенно сокращается размерность пространства решения задачи.
2. В обычно применяемом методе Данцига каждое ограничение - равенство вида $a^T x = b$ преобразуется в два ограничения - неравенства ($a^T x \le b,\ a^T x \ge b$), что приводит к увеличению числа вершин, которое равно числу сочетаний из n по k, где n – число ограничений неравенств, а k - размерность пространства решения задачи. Увеличение числа вершин многогранника допустимых значений, в свою очередь, может привести к увеличению числа шагов перемещения рабочей точки в точку оптимума.
3. Увеличение числа шагов в поиске оптимума, в свою очередь, приводит к увеличению ошибки округления решения задачи.

Список использованных источников

1. Лекция 1.Примеры задач линейного программирования. [Электронный ресурс].URL: https://studfiles.net/preview/1722609/ (дата обращения 14.11.2018).
2. Области применения и ограничения использования линейного программирования для решения экономических задач – Линейное программирование в экономике [Электронный ресурс]. – URL: https://otherreferats.allbest.ru/economy/0065264_0.html (дата обращения 17.11.2018).
3. Дж. Данциг. Линейное программирование, его обобщения и применения. М.: «Прогресс», 1966. с. 96 - 115.
4. В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов. Высшая математика для технических университетов. Часть I. Линейная алгебра. Т.: «Томский политехнический университет», 2014. с. 76 – 82.
5. Г. Стренг. Линейная алгебра и ее применения. М.: «Мир», 1980 с. 353 – 407.
6. Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И. Учет ограничений равенств при решении оптимизационных задач с линейными ограничениями // Известия Томского политехнического университета. – 2008. с. 76 – 78
7. Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И. Сравнительная оценка двух методов выбора наилучших линейных регрессоров 1988. – С. 18–22.
8. Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И. Решение задачи линейного программирования с использованием оператора-проектора. // Известия Томского политехнического университета. – 2009. с. 37 – 40
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 559 с.
10. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация — М.: «Мир», 1985. — 509 с., ил.