РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАДРОКОПТЕРА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ PARROT MINIDRONE ROLLING SPIDER

А.С. Каширин, А.И. Федотов
А. Ю. Зарницын
Томский политехнический университет
kashirinas@tpu.ru

Введение

В настоящее время использование беспилотных летательных аппаратов в различных сферах жизни человека сильно растёт. Спектр задач может варьироваться от гражданских задач до применения в военных целях.

Поэтому целью данной работы является разработка математической и компьютерной модели в среде MATLAB Simulink реальной модели квадрокоптера Parrot Minidrone Rolling Spider для дальнейшего синтеза ПИД регуляторов двигателей и алгоритмов управления квадрокоптером.

Математическая модель

Математическое описание квадрокоптера начинается с определения переменных состояния. После этого производится представление основных законов кинематики и соотношений между систем координат, которые будут использованы в качестве теоретической базы для описания объекта управления.

Существует несколько подходов для описания динамической системы. Некоторые исследования используют кватернионы в качестве переменных состояния. В данном математическом описании в качестве переменных состояния выбраны пространственные и угловые координаты, как наиболее распространённый способ математического описания квадрокоптера.

Модель квадрокоптера с изображёнными угловыми скоростями вращения роторов, силами тяги, моментами сил и связанной с квадрокоптером системой координат (далее - СК) представлена на рисунке 1. По ориентации системы координат видно, что в рассматриваемой модели используется схема «Крест».

Рис. 1. Модель квадрокоптера Parrot со связанной системой координат

Кинематика квадрокоптера

Квадрокоптер как описываемый объект управления имеет шесть степеней свободы, что в результате позволяет получить систему из шести уравнений. Начало связанной с квадрокоптером СК находится в центре масс летательного аппарата.

Линейные и угловые скорости квадрокоптера представлены системой (1).

$$V_Q = \begin{bmatrix} v_{x,Q} \\ v_{y,Q} \\ v_{z,Q} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \qquad (1)$$

Для описания ориентации квадрокоптера в пространстве используется неподвижная СК и углы Эйлера, изображённые на рисунке 2.

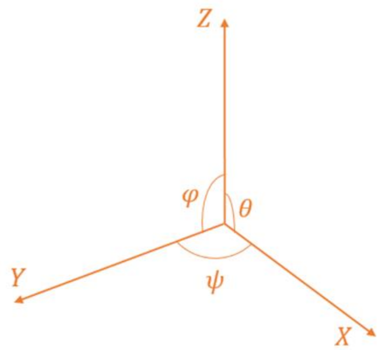

Рис. 2. Система координат, связанная с землёй

Также используется набор векторов, описывающих состояние квадрокоптера в пространстве. Например, линейной положение квадрокоптера в неподвижной СК, угловое положение квадрокоптера.

Для преобразования координат из подвижной СК в неподвижную (R) используют матрицу поворота, которая представляет собой последовательное перемножение матриц перехода по каждой координате.

Данная особенность этого метода является его минусом, так как если последовательность поворота квадрокоптера в пространстве изменить, то есть повернуть сначала не по оси Z, а, например, по оси X, то квадрокоптер придёт в совершенно другое конечное положение. Поэтому, используя данный метод необходимо придерживаться изначального выбора очерёдности вращения по координатным осям.

Связь между линейными скоростями в неподвижной и связанной с квадрокоптером СК определяется выражением (2).

$$\dot{\varepsilon} = RV_Q; \qquad (2)$$

Данный квадрокоптер имеет симметричную структуру с четырьмя винтами, можно положить, что тензор инерции примет вид (3).

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}; \qquad (3)$$

Динамика квадрокоптера

Роторы, совершая вращение с угловой скоростью ω_i, создают силу тяги F_i, направленную по оси вращения ротора. Также при вращении роторов создаётся аэродинамический момент τ_i, направленный в противоположном направлении угловой скорости ротора. Упрощенные выражения для силы тяги и вращающего момента описаны в системе (4):

$$\begin{cases} F_i = b\omega_i^2 \\ \tau_i = b\omega_i^2 + J_m\dot{\omega}_i \end{cases} \qquad (4)$$

где J_m – момент инерции мотора, b – коэффициент подъёмной силы, k – коэффициент вращения, i=1..4.

Сложение сил тяги даёт суммарную тягу T, которая сонаправлена с осью z_Q. Таким образом получается вектор T_Q, состоящий из единственной компоненты и описывающий вектор сил тяги. Вектор вращающих моментов τ_Q содержит вращающие моменты по всем трем углам Эйлера $(\tau_\varphi, \tau_\theta, \tau_\psi)$.

Для описания динамики квадрокоптера как твёрдого тела используются уравнения Ньютона-Эйлера.

В подвижной СК для описания динамики квадрокоптера используются уравнение вида (5).

$$M(\dot{V}_Q + v \times V_Q) = R^T G + T_Q \qquad (5)$$

где M – масса всего квадрокоптера, $M\dot{V}_Q$ – сила, необходимая для ускорения квадрокоптера, $v \times MV_Q$ – центробежная сила, $R^T G$ – гравитационная сила.

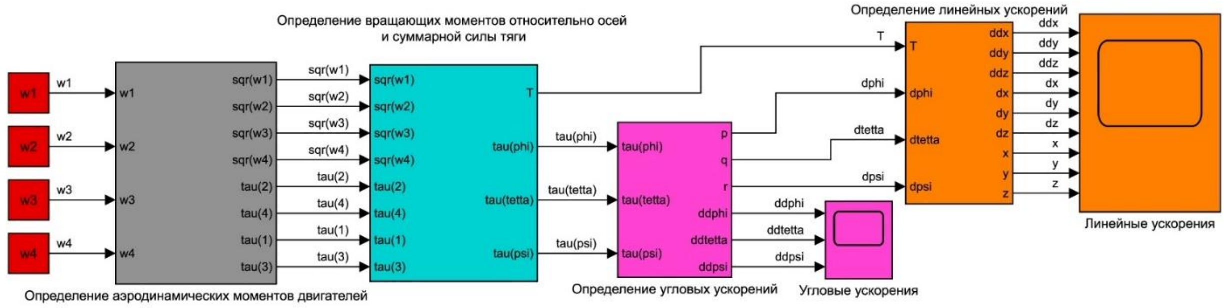

Рис. 3. Компьютерная модель квадрокоптера

В неподвижной СК центробежная составляющая обнуляется. Таким образом на ускорение квадрокоптера влияют только гравитационная составляющая и вектор тяги, который определяется направлением и силой тяги.

После всех преобразований получаем систему уравнений, являющуюся математическим описанием квадрокоптера, без учёта внешних воздействий (6).

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{T}{M}(C_\varphi S_\theta C_\psi + S_\varphi S_\psi) \\ \ddot{y} = \frac{T}{M}(C_\varphi S_\theta S_\psi - S_\varphi C_\psi) \\ \ddot{z} = \frac{T}{M}C_\varphi C_\theta - g \\ \ddot{\varphi} = \frac{(J_{yy}+J_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi}}{J_{xx}} + \frac{\tau_\varphi}{J_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{(J_{zz}+J_{xx})\dot{\varphi}\dot{\psi}}{J_{yy}} + \frac{\tau_\theta}{J_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{(J_{xx}+J_{yy})\dot{\varphi}\dot{\theta}}{J_{zz}} + \frac{\tau_\psi}{J_{zz}} \end{cases}; \qquad (6)$$

Компьютерная модель

Компьютерная модель была составлена в среде MATLAB Simulink. Данный математический пакет предоставляет огромные возможности по созданию, настройки и оптимизации автоматизированных, мехатронных и роботехнических систем. Для описания компьютерной модели воспользуемся раннее выведенными уравнениями (4), (6). Разработанная модель представлена на рисунке 3.

По полученным данным с осциллографа можно сказать, что квадрокоптер удерживает положение равновесия на угловой скорости вращения моторов, равной 1879,25 рад/с.

Заключение

Разработанная упрощённая математическая модель квадрокоптера (7), а также компьютерная модель, представленная на рисунке 3 позволяет в дальнейшем разработать систему управления.

Список использованных источников

1. Зинченко О.Н. БПЛА: Применение в целях аэрофотосъемки для картографирования. «Ракурс», Москва, 2011.
2. Geektimes: Научно-популярный журнал. Классы квадрокоптеров – какие бывают и для чего используются – URL: https://geektimes.ru/company/dronk/blog/269722 (дата обращения 05.08.2018)
3. Шилов К.Е. Разработка системы автоматического управления беспилотным летательным аппаратом мультироторного типа. ТРУДЫ МФТИ. – 2014. – Том 6, №4. УДК 681.5.