ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАВИГАЦИИ ВНУТРИ ЗДАНИЯ

А.С. Кенжетаева
Томский политехнический университет
ask110@tpu.ru

Введение

Нахождение оптимального маршрута в зданиях со сложным архитектурным планом играет немаловажную роль, так как в крупных зданиях содержатся множество различных маршрутов, и для достижения нужного конечного пункта, до которой порой бывает затруднительно добраться даже по указаниям сотрудников какого-либо здания со сложной планировкой, поэтому существенную помощь в нахождении кратчайшего пути может оказать приложение для навигации внутри здания. Под «оптимальностью пути» понимается не минимальное расстояние, а минимальная затрата времени на прохождение пути.

Цель проекта разработать прототип приложения для навигации внутри здания. Пользователь должен указать начальную и концевую точки внутри здания. Приложение определит кратчайший маршрут, который можно найти по минимальному пути прохождения маршрута с указанием направления движения. За основу данного проекта был взят один из учебных корпусов ТПУ, план которого доступен на сайте ТПУ.

Описание алгоритма

Существует множество алгоритмов построения минимального покрывающего дерева МПД. Перечислим основные из них: алгоритм Прима, алгоритм Краскала, алгоритм Беллмана–Форда, алгоритм Дейкстры [1]. Самый подходящий метод в реализации нахождения оптимального пути является алгоритм Дейкстры. Кратчайший маршрут можно найти либо по минимальной длине пути, либо по минимальному времени прохождения маршрута. Таким образом, задача поиска оптимального пути, в предположении, что критерием оптимизации является длина этого пути, может быть сведена к вычислению данной задачи согласно алгоритму Дейкстры. Главные составляющие маршрутизации — это дорожный граф и алгоритм, который рассчитывает маршрут. Сеть дорог в зданиях со сложным архитектурным планом может быть представлена в виде графа со следующими параметрами: граф является ориентированным графом; в графе нет ребер с отрицательным весом; граф находится в одном компоненте связности; каждое ребро графа имеет различную длину. Согласно алгоритму Дейкстры мы получаем ориентированное дерево кратчайших путей, которое является покрывающим деревом T графа G. Для определения оптимального маршрута использовано модифицированное евклидово (МПД), построенное на вершинах двух типов: конечные вершины и вершины-перекрестки. Модификация МПД заключается в добавлении и удалении ребер. МПД G является покрывающее дерево G такое, что сумма расстояний его ребер минимально среди всех покрывающих деревьев.

Граф $G(V,E,d)$ называется полным, если в нем любые две вершины смежны, то есть,$\forall\, v_i, v_j \in V (v_i, v_j) \in E$. Полный граф определяется числом своих вершин и обозначается K_n, где $n = |V|$. Полный граф имеет максималь-но возможное число ребер: $E = \frac{n(n-1)}{2}$, что следует из леммы Эйлера, поскольку степень любой вершины в полном графе равна $n - 1$. Путь в G будет определяться последовательностью вершин, $v_1, v_2, \dots, v_p$,$p \geq 2$ таких, что для $\forall_1 \leq k < p$: $\{v_k, v_{k+1}\} \in E$ и $v_k \in V$. Путем будем называть движение от вершины v_1 в вершину v_p, а его расстояние может быть вычислено по правилу (евклидово расстояние):

$$\sum_{k=1}^{p-1} d(\{v_k, v_{k+1}\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} \sqrt{(v_k(x) - v_{k+1}(x))^2 + (v_k(y) - v_{k+1}(y))^2}\,, (1)$$

здесь $v_k(x)$ и $v_k(y)$– абсцисса и ордината вершины v_k на декартовой плоскости. Длиной пути будем называть количество ребер в пути, так для последовательности вершин $v_1, v_2, \dots, v_p$ длина равна $p - 1$. Простой путь – путь, все рёбра которого попарно различны, т.е. простой путь не проходит дважды через одно ребро. Кратчайшим расстоянием от вершины v_1 в вершину v_p называется путь из v_1 в v_p, расстояние которого является минимальным среди всех возможных путей. Дерево в графе G является связным подграфом, если удаление любого из ребер в подграфе сделает его несвязным. Пусть $Q \subseteq V$ – любое подмножество вершин в связном подграфе G' графа G, тогда говорят, что G' покрывает Q. Применение указанных выше операций может привести к тому, что в евклидовом МПД будут появляться циклы. Циклом будем называть простой путь длины не менее 1, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.Таким образом, основой математической модели навигации внутри здания будет связный ориентированный взвешенный граф $G = (V, E, d)$, в котором могут быть циклы. Мы будем выполнять последовательно операцию объединения двух графов G_i и G_j, не имеющих общих вершин, из множества

$\{G_1(V_1, E_1, d_1), G_2(V_2, E_2, d_2), \ldots, G_n(V_n, E_n, d_n)\}$,(2) по правилу:

$$G_i + G_j = (V_i \cup V_j, E_i \cup E_j \cup E' \cup V_i \times V_j \cup V_j \times V_i, d_i \cup d_j \cup d'), (3)$$

здесь n количество этажей в одном здании, E' – множество новых (добавленных) ребер и d' – множество соответствующих весов для добавленных ребер.

В данной работе мы будем модифицировать полученное евклидово МПД. Модификация будет заключаться, во-первых, в добавлении ребер к МПД, а также, во-вторых, в перемонтировке ребер. Операция добавления обусловлена тем, что в здании может быть несколько альтернативных путей из одного помещения в другое, как в рамках одного этажа, так и разных этажей. Перемонтировка заключается в изменении одной из вершин ребра в графе. Например, (рис. 1). Для данного набора вершин построено евклидово МПД, которое содержит два ребра $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$. Действительно, кратчайший путь из вершины 1 в 2 обеспечивает ребро $\{1,2\}$, но на практике такое движение невозможно, т.к. в здании на пути из вершины 1 в 2 находится препятствие (стена). Поэтому мы вынуждены осуществить перемонтировку ребра: при фиксированной вершине 1 вторая вершина ребра заменяется со 2 на 3.

Формат svg (Scalable Vector Graphics) представляет собой язык разметки графики, входящий в подмножество языка разметки XML, который предназначен для описания двумерной графики. В данной работе SVG файл был создан с помощью программы Inkscape. Точки, на основании которых будет построено евклидово МПД, раскрашены в два цвета: черный (промежуточная вершина) и красный (концевая вершина). У промежуточной вершины степень больше единицы (перекресток), степень концевой вершины строго равна единице (начало или конец пути). Каждая вершина имеет свою собственную координату, исходя из этого можно вычислить расстояние между точками по формуле евклидово расстояние между двумя точками.

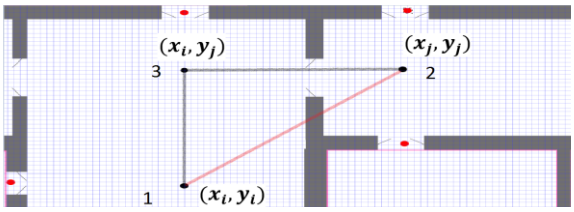

Рис. 1. Пример перемонтировки ребра на основе плана 3-го этажа учебного корпуса №19

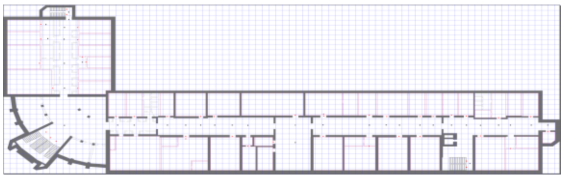

Рис. 2. Пример плана 3-го этажа учебного корпуса №19

Вывод

План данного корпуса можно представить в 3D модели, что значительно упрощает ситуацию, когда предложенный маршрут проходит через несколько этажей. Вся работа была произведена на языке программирования R. Следующим этапом в развитии данного проекта является реализация траектории движения пользователя в плане указания пользователю направления: повороты в каждых последующих шагах на пути к конечному пункту прибытия. Зная координаты местонахождения пользователя, можно вычислить пройденное расстояние, и для сообщения навигатором пользователю точного угла поворота, нужно достроить прямоугольный треугольник, посредством которого можно вычислить угол, использовав тригонометрические формулы: (рис. 3) пользователь, отправляясь из исходной точки 1 в конечную точку 6, должен получить следующие указания: навигатор, оценивая расстояние между точкой отправки и точки назначения, сообщает пользователю точное прохождение пути(вычисляется по формуле евклидово расстояния между двумя точками), сообщает о точном угле поворота(пользователь, достигая последовательно каждую следующую вершину графа, должен быть оповещен об угле поворота, который высчитывается следующим образом: достигая точку 2, кратчайшим путем будет являться ребро $\{2,4\}$, зная вес ребер, можно вычислить угол ($cos\alpha$, равный отношению прилежащего катета к гипотенузе) и т.д.).

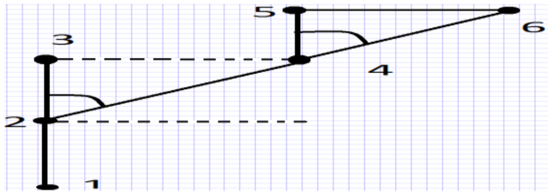

Рис. 3. Пример вычисления угла поворота и пути прохождения

Список использованных источников

1. Буркатовская Ю.Б. Теория графов. Часть 1: учебное пособие, 2014. стр. 50 [2]
2. Kruskal, J. B. On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. // Proc. AMS. 1956. Vol 7, No. 1. p. 48-50.
3. Kolaczyk E. Csardi, G. Statistical Analysis of Network Data with R. Springer, New York 2014