

# МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВАЛУ

О.Ю. Суменков

А.И. Артюнин

Томский политехнический университет

oys5@tpu.ru

## Введение

В ранее проведенных исследованиях [1], [2] экспериментально обнаружено новое явление, заключающееся в том, что для механической системы, включающей в себя двигатель, на валу которого с возможностью свободного вращения установлен маятник, возможен такой режим движения, при котором вал двигателя вращается с заданной угловой скоростью, а частота вращения маятника близка или совпадает с одной из собственных частот колебаний механической системы. Целью настоящей работы является исследование возможности реализации вышеуказанного режима движения на примере модели, изображенной на Рис. 1. Ранее механико-математическое моделирование этого явления не проводилось.

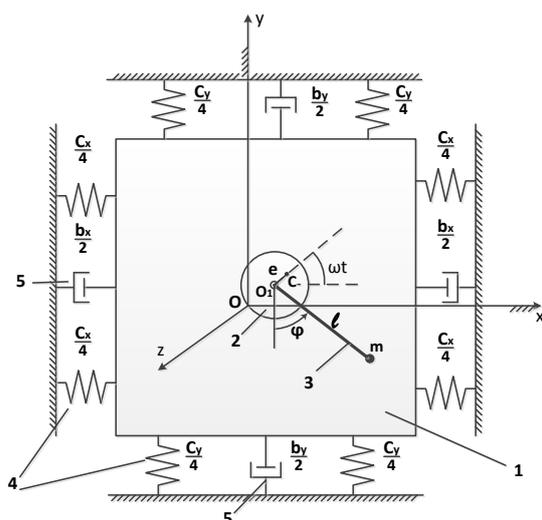


Рис. 1. Механическая модель маятника на вращающемся валу двигателя, установленного в корпусе: 1 – корпус; 2 – ротор с валом (точка С – центр масс ротора); 3 – маятник; 4 – невесомые упругие опоры корпуса; 5 – демпферы корпуса.

## Механико-математическая модель маятника на вращающемся валу

Исследуемая модель представляет собой корпус как симметричное твердое тело кубической формы, который закреплен на неподвижном основании с помощью симметрично расположенных четырех вертикальных и четырех горизонтальных невесомых упругих опор. В корпусе установлен ротор в форме диска, имеющий статическую неуравновешенность  $e$ , а на валу ротора установлен с возможностью вращения относительно вала маятник массой  $m$  и длины  $l$ . Ось вращения ротора проходит

через центр масс корпуса (точка  $O_1$  на Рис. 1). На Рис. 1 также изображены демпферы, условно обозначающие наличие сопротивления пропорционального скорости движения корпуса. Движение модели будем изучать по отношению к неподвижной системе координат  $Oxyz$ , начало которой (точку  $O$ ) совместим с центром масс корпуса в положении его статического равновесия. Будем также считать, что движение вдоль оси  $z$  и повороты вокруг осей  $x, y, z$  отсутствуют. Тогда для описания движения модели можно использовать три обобщенных координаты:  $x_1, y_1$  – перемещение центра масс корпуса  $O_1$  и  $\varphi$  – угол отклонения маятника от его нижнего положения. Для вывода дифференциальных уравнений движения модели используем уравнение Лагранжа 2-го рода в форме [3]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + Q_\varphi, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (q_1 = x_1; q_2 = y_1; q_3 = \varphi)$$

В этом уравнении:  $T$  – кинетическая энергия;  $\Pi$  – потенциальная энергия;  $\Phi$  – функция Релея;

$Q_\varphi = k(\omega - \dot{\varphi})$ . Здесь  $\omega$  – угловая скорость ротора,  $k$  – коэффициент сопротивления относительно вращению маятника на валу ротора.

Кинетическая энергия механической системы  $T$  в нашем случае складывается из кинетической энергии корпуса  $T_k$ , кинетической энергии ротора  $T_p$  и кинетической энергии маятника  $T_m$ , и после преобразований имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + M_p e \omega (-\dot{x}_1 \sin(\omega t) + \dot{y}_1 \cos(\omega t)) + \frac{1}{2} I_p \omega^2 + m l (\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \dot{y}_1 \dot{\varphi} \sin(\varphi)) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad (2)$$

В этом выражении  $M = M_k + M_p + m$ ;  $M_k$  – масса корпуса;  $M_p$  – масса ротора;  $I_p$  – момент инерции ротора.

Потенциальная энергия механической системы  $\Pi$  складывается из потенциальной энергии деформации упругих опор в горизонтальном  $\Pi_x$  и в вертикальном  $\Pi_y$  направлениях и потенциальной энергии сил тяжести корпуса  $\Pi_k$ , ротора  $\Pi_p$  маятника  $\Pi_m$ . После преобразований учета условия статического равновесия выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_x x_1^2 + \frac{1}{2} c_y y_1^2 - m g l \cos(\varphi) \quad (3)$$

Выражение для функции Релея при наличии демпфирования только у корпуса будет иметь вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} b_x \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_y \dot{y}_1^2, \quad (4)$$

где  $b_x, b_y$  – коэффициенты сопротивления движению корпуса в горизонтальном и в вертикальном направлениях.

После процедуры составления дифференциальных уравнений движения модели, используя уравнения Лагранжа 2-го рода в форме (1) и выражения (2), (3), (4), получим систему трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$1) \quad M\ddot{x}_1 + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi) = M_p e \omega^2 \cos(\omega t) + ml\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - c_x x_1 - b_x \dot{x}_1;$$

$$2) \quad M\ddot{y}_1 + ml\ddot{\varphi}\sin(\varphi) = M_p e \omega^2 \sin(\omega t) - ml\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) - c_y y_1 - b_y \dot{y}_1;$$

$$3) \quad ml^2\ddot{\varphi} + ml\dot{x}_1 \cos(\varphi) + ml\dot{y}_1 \sin(\varphi) = k(\omega - \dot{\varphi}) - mg l \sin(\varphi).$$

(5)

#### Исследование влияния массы маятника на его закон движения на вращающемся валу

Численное интегрирование уравнений (5) осуществлялось в среде MATLAB с помощью функции `ode15i` при следующих исходных данных:  $M_k = 8$  кг;  $M_p = 2$  кг;  $m = 0,02$  кг;  $b_x = b_y = 25$  Нс/м;  $c_x = 4 \times 10^5$  Н/м;  $c_y = 1 \times 10^5$  Н/м;  $e = 0$ ;  $k = 1 \times 10^{-4}$  Нм/рад.,  $l = 0,05$  м. При этих данных исследуемая механическая система имеет две собственные частоты колебаний:  $k_1 = \sqrt{c_y/M} = 100$  рад/с;  $k_2 = \sqrt{c_x/M} = 200$  рад/с. Примем, что при  $0 \leq t \leq 10$  с. ротор разгоняется по закону  $\omega = 30t$ , а при  $t > 10$  с угловая скорость ротора  $\omega = 300$  рад/с.

Суть численного эксперимента заключалась в исследовании закона разгона маятника при различных его массах и при неизменных других исходных данных. Установлено, что при изменении массы маятника в диапазоне:

$0,0204 \leq m \leq 0,0614$  (кг) через 8 секунд после начала движения ротора, маятник разгоняется и начинает вращаться с угловой скоростью  $\dot{\varphi} = 100$  рад/с, которая равна первой собственной частоте колебаний механической системы  $k_1 = 100$  рад/с (кривая 2 на Рис. 2). При изменении массы маятника в диапазоне:  $0,0053 \leq m < 0,0204$  (кг), маятник через 8 секунд начинает вращаться с угловой скоростью  $\dot{\varphi} = 200$  рад/с, которая равна второй собственной частоте колебаний механической системы  $k_2 = 200$  рад/с (кривая 3 на Рис. 2). При массе маятника  $m < 0,0053$  кг он разгоняется до угловой скорости  $\dot{\varphi} = 300$  рад/с, то есть до скорости вращения ротора  $\omega = 300$  рад/с и вращается вместе с ротором (кривая 4 на Рис. 2). На этом же рисунке показан закон разгона ротора (прямая 1).

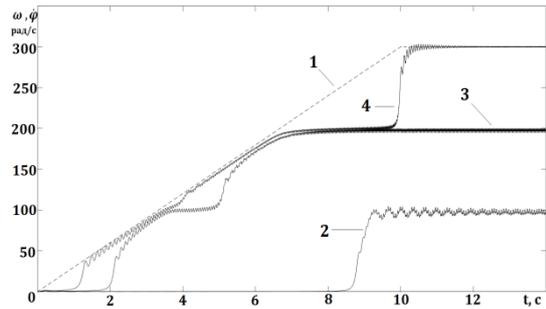


Рис. 2. Законы движения маятника при разной его массе: 2 – при  $0,0204 \leq m \leq 0,0614$  (кг); 3 – при  $0,0053 \leq m < 0,0204$  (кг); 4 –  $m < 0,0053$  (кг); 1 – закон разгона ротора.

Таким образом, результаты численного эксперимента при моделировании движения маятника на вращающемся валу ротора двигателя, закрепленного в корпусе на упругих опорах, подтвердили результаты натурального эксперимента в работах [1], [2], что при одной и той же угловой скорости вращения ротора угловая скорость вращения маятника в зависимости от его массы может совпадать с одной из собственных частот колебаний механической системы.

#### Заключение

В результате моделирования движения маятника на вращающемся валу ротора двигателя, закрепленного в корпусе на упругих опорах, установлено, что при изменении массы маятника возможен такой режим движения, когда ротор вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость вращения маятника равна одной из собственных частот колебаний механической системы. Это явление в работах [1], [2], названо эффектом «застревания» маятника.

#### Список использованных источников

1. Артюнин А.И. Обобщенная модель вибрационной нелинейной механики и эффект «застревания» маятника на резонансных частотах механической системы / Артюнин А.И., Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. // Научный журнал. Машиностроение и инженерное образование, 2015. – № 1. – 61-67 с.
2. Артюнин А.И. Экспериментальные исследования эффекта «застревания» маятника на резонансных частотах механической системы / Артюнин А.И., Ермошенко Ю.В., Попов С.И. // Научный журнал. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2015. – № 2. – 20-25 с.
3. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: учебник / Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. // М.: Наука, 1983. – Т2. – 640с.