УДК 519.224

МОДЕРНИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОРДА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДВУХСТОРОННИХ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Карпов Иван Георгиевич,
д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Тамбовского государственного технического университета, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106. E-mail: zeratul68@mail.ru

Грибков Алексей Николаевич,
канд. техн. наук, доцент кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» Тамбовского государственного технического университета, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106. E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения точности и упрощения процедуры аппроксимации двухсторонних дискретных законов распределения экспериментальных данных. Дискретные законы распределения находят широкое практическое применение в качестве вероятностных моделей флуктуаций сигналов при решении задач синтеза оптимальных методов приема и обработки информации в оптической локации и связи. При этом зачастую возникает необходимость применения обобщенного дискретного закона распределения, поскольку каждый из известных законов распределения в отдельности может не позволить добиться необходимой степени обобщения данных по флуктуациям оптических сигналов.

***Цель работы**: модернизация разностного уравнения Орда и получение на основе его решения обобщенного закона распределения двухсторонней дискретной случайной величины, а также разработка метода идентификации основных видов дискретных законов распределения, применяемых на практике.*

***Методы исследования:** расчеты с использованием методов теории вероятностей и математической статистики, а также программного продукта MathCAD; методы интегрального и дифференциального исчисления.*

***Результаты:** Произведена модернизация разностного уравнения Орда, и получено его решение в виде обобщенного распределения вероятностей. Показано, что частными случаями полученного распределения являются известные дискретные законы распределения, такие как равномерный, биномиальный, Пуассона, отрицательный биномиальный, гипергеометрический, отрицательный гипергеометрический. Приведена диаграмма двухсторонних законов распределения дискретной случайной величины, где показаны области существования указанных выше дискретных законов распределения. Рассмотрены числовые характеристики полученного обобщенного распределения, а также на его основе разработан метод идентификации основных видов дискретных законов распределения, применяемых на практике.*

Ключевые слова:
Распределения Орда, дискретный закон распределения, аппроксимация законов распределения, плотность распределения вероятностей, дискретная случайная величина.

Постановка задачи

Для решения задач синтеза оптимальных методов приема и обработки информации в оптической локации и связи очень часто используют в качестве вероятностных моделей флуктуаций сигналов дискретные законы распределения. Наиболее широко применяются законы распределения Пуассона, Лагерра, биномиальный, отрицательный биномиальный [1–7]. Однако каждый из этих законов распределения в отдельности зачастую не дает необходимой степени обобщения данных по флуктуациям оптических сигналов, а некоторые из них дублируют друг друга.

В работах [8, 9] было получено выражение для обобщенного дискретного закона распределения односторонней случайной величины, когда она может принимать только положительные значения. Существенным недостатком полученного распределения является то, что оно не позволяет описывать распределения с ненулевым параметром сдвига. Могут также возникать ситуации, когда дискретная случайная величина (СВ) принимает как положительные, так и отрицательные значения, то есть является двухсторонней.

Дж. К. Орд в своих работах [10, 11] в качестве источника дискретных распределений рассматривал разностное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\Delta p(x-1)}{p(x-1)} = \frac{p(x)-p(x-1)}{p(x-1)} = \frac{x-a}{b_2x(x-1)+b_1x+b_0}, \quad (1)$$

где a, b_2, b_1 и b_0 – параметры дискретных законов распределения; x – целочисленная дискретная переменная, принимающая значения на интервале $(-\infty,\infty)$ либо $[0,\infty)$, либо на конечном интервале $[l_1,l_2]$.

В результате решения разностного уравнения (1), при различных корнях квадратного трехчлена знаменателя, Орд получил семейство дискретных распределений. В частности такие распределения, как: биномиальное, гипергеометрическое, Пуассона, отрицательное биномиальное, отрицательное гипергеометрическое и еще несколько других распределений. Однако, из-за сложности идентификации распределений этого семейства по сравнению с непрерывными распределениями Пирсона, распределения Орда используются на практике редко [12, 13].

Основная цель работы – произвести модернизацию разностного уравнения Орда (1) и в результате его решения получить обобщенный закон распределения двухсторонней дискретной случайной величины, а на его основе разработать метод идентификации дискретных законов распределения.

Основные результаты

По аналогии с разностным уравнением Орда (1) весьма разнообразный характер дискретных законов распределения можно задать с помощью разностного уравнения

$$\frac{\Delta p(x)}{p(x)} = \frac{a_1(x-m_1)-a_0}{b_2(x+1-m_1)^2+b_1(x+1-m_1)+b_0}, \qquad (2)$$

где $\Delta p(x)=p(x+1)-p(x)$; a_1, a_0, b_2, b_1 и b_0 – параметры дискретных законов распределения, m_1 – начальный момент 1-го порядка. Необходимо отметить, что уравнение (2) аналогично модернизированному дифференциальному уравнению Пирсона для плотностей вероятностей [14].

Используя общие свойства вероятностей возможных значений $p(x)$, установим правила определения параметров a_1, a_0, b_2, b_1 и b_0, входящих в уравнение (2). Для этого запишем уравнение (2) в следующем виде

$$(x-m_\xi)^n\begin{bmatrix} b_0+b_1(x+1-m_1)+ \\ +b_2(x+1-m_1)^2 \end{bmatrix}\Delta p(x) =$$
$$= (x-m_1)^n[a_1(x-m_1)-a_0]p(x)$$

либо

$$y^n[b_0+b_1(y+1)+b_2(y+1)^2]\Delta p(y) =$$
$$= y^n[a_1 y - a_0]p(y), \qquad (3)$$

где $y=x-m_1$.

Пусть допустимые значения центрированной дискретной СВ ξ_0 заключены в интервале $[l_1,l_2]$. Просуммируем левую часть равенства (3) по частям, используя формулу суммирования по частям [15, 16]

$$\sum_{x=l_1}^{l_2} u(x)\Delta f(x) = [u(x)f(x)]_{l_1}^{l_2+1} - \sum_{x=l_1}^{l_2} f(x+1)\Delta u(x).$$

В результате получим

$$\{(y-1)^n[b_0+b_1 y+b_2 y^2]p(y)\}_{l_1}^{l_2+1} -$$
$$-\sum_{x=l_1}^{l_2}\begin{bmatrix} y^n(b_0+b_1(y+1)+b_2(y+1)^2)- \\ -(y-1)^n(b_0+b_1 y+b_2 y^2) \end{bmatrix}p(y) =$$
$$= \sum_{x=l_1}^{l_2} y^n(a_1 y - a_0)p(y).$$

Выражение в фигурных скобках обращается в нуль на верхней границе интервала суммирования, так как $p(l_2+1)=0$, а на нижней границе интервала суммирования в общем случае равно

$$(l_1-1)^n(b_0+b_1 l_1+b_2 l_1^2)p(l_1).$$

Рассмотрим, при каких условиях оно равно нулю. Если допустимые значения СВ ξ_0 имеют конечное множество значений в интервале $[0,N]$ либо счетное множество значений на неограниченном интервале $[0,\infty)$, то $l_1=-m_1$. При этом можно положить, что

$$b_2 m_1^2 - b_1 m_1 + b_0 = 0. \qquad (4)$$

При всех других интервалах допустимых значений дискретной СВ будем полагать, что

$$p(l_1) = 0. \qquad (5)$$

Используя определение центральных моментов для дискретной СВ [17] и полагая, что выполняется условие (4) либо (5), имеем

$$a_0\mu_n - b_0\vartheta_{n0} - b_1\vartheta_{n1} - b_2\vartheta_{n2} = a_1\mu_{n+1}, \qquad (6)$$

где $\mu_n=\langle y^n\rangle$ – центральный момент n-го порядка;

$$\vartheta_{n0} = \left\langle y^n - (y-1)^n \right\rangle;\ \vartheta_{n1} = \left\langle y^n(y+1) - y(y-1)^n \right\rangle;$$
$$\vartheta_{n2} = \left\langle y^n(y+1)^2 - y^2(y-1)^n \right\rangle.$$

Уравнение (6) позволяет получить рекуррентные соотношения для определения моментов более высокого порядка по моментам более низкого порядка. Последовательно полагая в (6) n=0,1,2,3 и учитывая, что $\mu_0=1$, $\mu_1=0$, $\vartheta_{00}=0$, $\vartheta_{01}=1$, $\vartheta_{02}=1$, $\vartheta_{10}=1$, $\vartheta_{20}=1$, $\vartheta_{11}=0$, $\vartheta_{00}=0$, $\vartheta_{12}=3\mu_2$, $\vartheta_{22}=4\mu_3$, $\vartheta_{21}=4\mu_3-3\mu_2$, $\vartheta_{32}=5\mu_4-2\mu_3+\mu_2$, получим:

$$a_0 - b_1 - b_2 = 0;$$
$$-b_0 - 3b_2\mu_2 = a_1\mu_2;$$
$$a_0\mu_2 + b_0 - 3b_1\mu_2 - 4b_2\mu_3 = a_1\mu_3;$$
$$(a_0 - 4b_1 + 2b_2)\mu_3 - b_0 - (3b_0 - 3b_1 + b_2)\mu_2 =$$
$$= (a_1 + 5b_2)\mu_4. \qquad (7)$$

Выразим параметры a_1, a_0, b_2, b_1 и b_0 через центральные моменты μ_2, μ_3, μ_4. Из второго уравнения системы (7) следует, что $b_0 \neq 0$. Поэтому систему уравнений (7) можно решить относительно параметров a_1, a_0, b_2 и b_1. В результате решения системы уравнений (7) и некоторых преобразований получим:

$$b_2 = \frac{b_0(1-K_2)}{(2-K_2)\mu_2};\quad b_1 = \frac{[0,5(K_1+1)+1-K_2]b_0}{(2-K_2)\mu_2};$$
$$a_0 = \frac{0,5b_0(K_1-4K_2+5)}{(2-K_2)\mu_2};\quad a_1 = \frac{b_0(4K_2-5)}{(2-K_2)\mu_2}, \qquad (8)$$

где коэффициенты K_1 и K_2 определяются соотношениями

$$K_1 = \mu_3/\mu_2,\ K_2 = \frac{1,5\mu_3^2 + 6\mu_2^3 - 1,5\mu_2^2}{\mu_2(\mu_4 + 3\mu_2^2 - \mu_2)}. \qquad (9)$$

С целью упрощения выражений для параметров a_1, a_0, b_2 и b_1 положим, что $b_0=(2-K_2)\mu_2$. Тогда из (8) следует

$$b_2 = 1-K_2;\ a_1 = 4K_2-5;\ b_1 = 0,5K_1 + 1,5 - K_2;$$
$$b_0 = (2-K_2)\mu_2;\ a_0 = 0,5(K_1 - 4K_2 + 5). \qquad (10)$$

Следовательно, параметры a_1, a_0, b_2, b_0 и b_1 определяются коэффициентами K_1 и K_2, вычисляемым по формулам (9), а также центральным моментом μ_2.

Решение разностного уравнения (2) в рекуррентной форме с учетом (10) имеет следующий вид

$$p(x)=$$
$$=\begin{cases} C, & x=\mu, \\ \left(1+\dfrac{a_1(x-m_1)-0,5(a_1+K_1)}{(x-m_1)(b_2(x-m_1)+b_1)+b_0}\right)p(x-1), \\ x>\mu, \\ \left(1+\dfrac{a_1(m_1-x)-0,5(a_1-K_1)}{(m_1-x)(b_2(m_1-x)+b_1-K_1)+b_0}\right)\times \\ \times p(x+1),\ \ x<\mu \end{cases} \qquad (11)$$

либо в обычной форме

$$p(x)=$$
$$=\begin{cases} C, & x=\mu \\ C\prod\limits_{k=1+\mu}^{x}\left(1+\dfrac{a_1(k-m_1)-0,5(a_1+K_1)}{(k-m_1)(b_2(k-m_1)+b_1)+b_0}\right), \\ x>\mu, \\ C\prod\limits_{k=x}^{\mu-1}\left(1+\dfrac{a_1(m_1-k)-0,5(a_1-K_1)}{(m_1-k)(b_2(m_1-k)+b_1-K_1)+b_0}\right), \\ x<\mu, \end{cases} \qquad (12)$$

где C – коэффициент нормировки; μ – параметр сдвига.

Рассмотрим основные частные случаи распределения (12), чтобы выяснить, каким образом оно связано с известными уже дискретными законами распределения. Оценку потенциальных возможностей распределения (12) будем производить с помощью коэффициентов K_1 и K_2.

Распределение I. Пусть для коэффициентов K_1 и K_2 выполняются неравенства $-\infty<K_1<\infty$, $1<K_2<1,5$. Положим, что

$$m_1=\mu+\frac{bN}{b+c},\ \ \mu_2=\frac{bcN(b+c+N)}{(b+c)^2(b+c+1)},$$
$$K_1=\frac{(c-b)(2N+b+c)}{(b+c)(b+c+2)},\ \ K_2=\frac{b+c+3}{b+c+2}.$$

При этом (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{(c)_N(N+1-x+\mu)_{x-\mu}(b)_{x-\mu}}{(b+c)_N(N+c-x+\mu)_{x-\mu}()x-\mu!},$$
$$x=\mu,\mu+1,\ldots\mu+N, \qquad (13)$$

где $(a)_k=a\ (a+1)\ldots(a+k-1)$ – символ Похгаммера; $c>0$, $b>0$, $N\geq 2$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры распределения [18].

Частными случаями распределения (13) являются бета-биномиальное распределение при $\mu=0$, дискретный равномерный закон при $b=1$, $c=1$ и отрицательное гипергеометрическое распределение при $b=m$, $c=M-m+1$, $\mu=0$ и $N=S-M$ [13, 19]. На рисунке представлена область существования распределения (13) в координатах K_1 и K_2. Для него справедливо неравенство $1<K_2<1,5$.

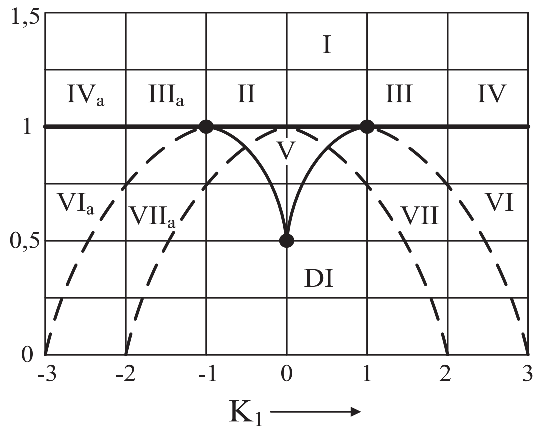

Рисунок. *Диаграмма двухсторонних законов распределения дискретной СВ*

Figure. *Diagram of bilateral laws of random variable distribution*

Распределение II. Пусть для коэффициентов K_1 и K_2 выполняются соотношения $-1<K_1<1$; $K_2=1$. Положим $m_1=\mu+pN$, $\mu_2=pN(1-p)$ и $K_1=1-2p$. Тогда (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{(N+1-x+\mu)_{x-\mu}\,p^{x-\mu}}{(x-\mu)!(1-p)^{x-\mu-N}},$$
$$x=\mu,\mu+1,\ldots,\mu+N, \qquad (14)$$

где $0<p<1$, $N\geq 1$ – параметры распределения. Частным случаем (14) при $\mu=0$ является биномиальное распределение [6, 13].

На рисунке представлена область существования распределения (14). Ей соответствует отрезок прямой II.

Распределение III. Пусть для коэффициентов K_1 и K_2 выполняются соотношения $K_1=1$; $K_2=1$ а $m_1=\mu+\lambda$ и $m_2=\lambda$. При этом (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{\lambda^{x-\mu}}{(x-\mu)!}\exp(-\lambda),\ \ x=\mu,\mu+1,\ldots\infty, \qquad (15)$$

где $\lambda>0$ – параметр распределения.

Частным случаем распределения (15) при $\mu=0$ является распределение Пуассона. На рисунке области существования распределения (15) соответствует точка с координатами $K_1=1$; $K_2=1$.

Распределение IIIa. Пусть для коэффициентов K_1, K_2 выполняются соответственно неравенства $K_1=-1$; $K_2=1$, а $m_1=\mu-\lambda$ и $m_2=\lambda$. При этом (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{\lambda^{\mu-x}}{(\mu-x)!}\exp(-\lambda),\ \ -\infty<x\leq\mu. \qquad (16)$$

На рисунке области существования распределения (16) соответствует точка с координатами $K_1=-1$; $K_2=1$.

Распределение IV. Пусть для коэффициентов K_1 и K_2 выполняются соотношения $K_1>1$, $K_2=1$. Положим

$$m_1=\mu+\frac{\alpha q}{1-q},\quad \mu_2=\frac{\alpha q}{(1-q)^2},\ \ K_1=\frac{1+q}{1-q}.$$

При этом (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{(\alpha)_{x-\mu}}{(x-\mu)!}q^{x-\mu}(1-q)^{\alpha},\ x=\mu,\mu+1,\ldots\infty, \quad (17)$$

где $0<q<1$, $\alpha>0$ – параметры распределения.

Частными случаями распределения (17) являются: отрицательное биномиальное распределение при $\mu=0$, распределение Паскаля при $\alpha=m$, геометрическое распределение при $\alpha=1$ и $\mu=0$; распределение Фарри при $\alpha=1$ и $\mu=1$ [6, 13, 19]. На рисунке представлена область существования распределения (17). Ей соответствует отрезок прямой IV.

Распределение IVa. Пусть для коэффициентов K_1, K_2 выполняются соответственно неравенства $K_1<-1$, $K_2=1$. Положим

$$m_1=\mu-\frac{\alpha q}{1-q},\ \mu_2=\frac{\alpha q}{(1-q)^2}\ \text{ и }\ K_1=-\frac{1+q}{1-q}.$$

При этом (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{(\alpha)_{\mu-x}}{(\mu-x)!}q^{\mu-x}(1-q)^{\alpha},\ -\infty<x\le\mu, \quad (18)$$

где $0<q<1$, $\alpha>0$ – параметры распределения.

На рисунке представлена область существования распределения (18). Ей соответствует отрезок прямой IVa.

Распределение V. Пусть для коэффициентов K_1 и K_2 выполняются неравенства $-1\le K_1\le 0$, $K_2<1$. Введем вспомогательные коэффициенты K_3 и K_4, определяемые соотношениями

$$K_3=\frac{K_1+3-2K_2}{4\sqrt{(1-K_2)(2-K_2)\mu_2}};$$

$$K_4=\frac{K_1-3+2K_2}{4\sqrt{(1-K_2)(2-K_2)\mu_2}}. \quad (19)$$

Если $K_3\ge 1$, $K_4\le -1$, то можно положить, что

$$m_1=\mu+\frac{Nb}{b+c},\ \mu_2=\frac{Nbc(b+c-N)}{(b+c)^2(b+c-1)},$$

$$K_1=\frac{(c-b)(b+c-2N)}{(b+c)(b+c-2)},\ K_2=\frac{b+c-3}{b+c-2}.$$

Тогда распределение (12) преобразуется к виду

$$p(x)=$$

$$=\frac{(1+c-N)_N(N+1-x+\mu)_{x-\mu}(b+1-x+\mu)_{x-\mu}}{(1+b+c-N)_N(1+c-N)_{x-\mu}(x-\mu)!},$$

$$\mu\le x\le\mu+N, \quad (20)$$

где $c\ge N$, $b\ge N$, $N\ge 2$ – параметры распределения.

Частными случаями (20) являются гипергеометрическое распределение при $\mu=0$ либо при $\mu=M$, $c=N+M$ [6, 13, 19]. На рисунке представлена область существования распределения (20). Для нее справедливы неравенства $-1\le K_1\le 0$, $K_2<1$, $K_3\ge 1$, $K_4\le -1$.

Распределение VI. Пусть для коэффициентов K_1, K_2, K_3 и K_4 выполняются неравенства $K_1>0$, $K_2<1$, $K_3>1$, $K_4\ge 1$. Положим, что

$$m_1=\mu+\frac{ab}{c},\ \mu_2=\frac{ab(a+c)(b+c)}{c^2(c-1)},$$

$$K_1=\frac{(2a+c)(2b+c)}{c(c-2)},\ K_2=\frac{c-3}{c-2}.$$

Тогда распределение (12) преобразуется к виду

$$p(x)=$$

$$=\frac{B(a+c+1,b+c+1)(a)_{x-\mu}(b)_{x-\mu}}{B(c+1,a+b+c+1)(a+b+c+1)_{x-\mu}(x-\mu)!},$$

$$x=\mu,\mu+1,\ldots\infty, \quad (21)$$

где $a>0$, $b\ge a$, $c>0$ – параметры распределения; $B(\alpha,\nu)$ – бета-функция [20].

Частными случаями распределения (21) являются отрицательное бета-биномиальное распределение при $\mu=0$ и бета-распределение Паскаля при $\mu=M$, $c=a+b-M$ [6, 13]. На рисунке представлена область существования распределения (21). Для нее справедливы неравенства $K_1>0$, $K_2<1$, $K_3>1$, $K_4\ge 1$.

Распределение VIa. Пусть для коэффициентов K_1, K_2, K_3 и K_4 выполняются неравенства $K_1<-0$, $K_2<1$, $K_3\le -1$, $K_4<-1$. Положим

$$m_1=\mu-\frac{ab}{c},\ \mu_2=\frac{ab(a+c)(b+c)}{c^2(c-1)},$$

$$K_1=-\frac{(2a+c)(2b+c)}{c(c-2)},\ K_2=\frac{c-3}{c-2}.$$

Тогда распределение (12) преобразуется к виду

$$p(x)=$$

$$=\frac{B(a+c+1,b+c+1)(a)_{\mu-x}(b)_{\mu-x}}{B(c+1,a+b+c+1)(a+b+c+1)_{\mu-x}(\mu-x)!},$$

$$-\infty<x\le\mu, \quad (22)$$

где $a>0$, $b\ge a$, $c>0$ – параметры распределения.

На рисунке представлена область существования распределения (22). Для нее справедливы неравенства $K_1<-0$, $K_2<1$, $K_3\ge -1$, $K_4<-1$.

Распределение VII. Пусть для коэффициентов K_1, K_2, K_3 и K_4 выполняются неравенства $K_1>0$, $K_2<1$, $-K_3\le 1$, $-1<K_4<1$. Положим

$$m_1=\mu+\frac{a+b^2}{c},\ \mu_2=\frac{(a+b^2)[(b+c)^2+a]}{c^2(c-1)},$$

$$K_1=\frac{4a+(2b+c)^2}{c(c-2)},\ K_2=\frac{c-3}{c-2}.$$

Тогда распределение (12) преобразуется к виду

$$p(x)=\frac{\left|\Gamma(c+b+1+i\sqrt{a})\right|^2}{\Gamma(c+1)\Gamma(c+2b+1+x-\mu)}\times$$

$$\times\frac{\left|\Gamma(x-\mu+b+i\sqrt{a})\right|^2}{(x-\mu)!\left|\Gamma(b+i\sqrt{a})\right|^2},\ x=\mu,\mu+1,\ldots\infty, \quad (23)$$

где $c>0$, $b\ge -0{,}5c$, $a>0$ – параметры распределения.

На рисунке представлена область существования распределения (23). Для нее справедливы неравенства $K_1>0$, $K_2<1$, $-K_3\geq 1$, $-1<K_4<1$.

Распределение VIIa. Пусть для коэффициентов K_1, K_2, K_3 и K_4 выполняются неравенства $K_1<0$, $K_2<1$, $-1<K_3<1$, $K_4\leq -1$. Положим

$$m_1 = \mu - \frac{a+b^2}{c},\ \mu_2 = \frac{(a+b^2)[(b+c)^2+a]}{c^2(c-1)},$$

$$K_1 = -\frac{4a+(2b+c)^2}{c(c-2)},\ K_2 = \frac{c-3}{c-2}.$$

Тогда распределение (12) преобразуется к виду

$$p(x) = \frac{\left|\Gamma(c+b+1+i\sqrt{a})\right|^2}{\Gamma(c+1)\Gamma(c+2b+1+\mu-x)} \times$$

$$\times \frac{\left|\Gamma(\mu-x+b+i\sqrt{a})\right|^2}{(\mu-x)!\left|\Gamma(b+i\sqrt{a})\right|^2},\ -\infty < x \leq \mu, \qquad (24)$$

где $c>0$, $b\geq -0{,}5c$, $a>0$ – параметры распределения.

На рисунке представлена область существования распределения (24). Для нее справедливы неравенства $K_1<0$, $K_2<1$, $-1<K_3<1$, $K_4\leq -1$.

Распределение DI. Пусть для коэффициентов K_1, K_2, K_3 и K_4 выполняются неравенства $-\infty<K_1<\infty$, $K_2<1$, $-1<K_3<1$, $-1<K_4<1$. Положим

$$m_1 = \mu + \frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{c},\ \mu_2 = \frac{\lambda_1^2c^2+(0{,}25c^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2)^2}{c^2(c-1)},$$

$$K_1 = \frac{4(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{c(c-2)},\ K_2 = \frac{c-3}{c-2}.$$

Тогда распределение (11) преобразуется к виду

$$p(x) = \begin{cases} C, & x=\mu, \\ \dfrac{(x-\mu-0{,}25(c+4))^2+\lambda_2^2}{(x-\mu+0{,}25c)^2+\lambda_1^2}\,p(x-1), & x>\mu, \\ \dfrac{(\mu-x-0{,}25(c+4))^2+\lambda_1^2}{(\mu-x+0{,}25c)^2+\lambda_2^2}\,p(x+1), & x<\mu \end{cases}$$

либо в обычной форме

$$p(x) =$$

$$= \begin{cases} C\dfrac{\begin{bmatrix}\left|\Gamma(x-\mu-0{,}25c+j\lambda_2)\right|^2\times \\ \times\left|\Gamma(0{,}25(c+4)+j\lambda_1)\right|^2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\left|\Gamma(-0{,}25c+j\lambda_2)\right|^2\times \\ \times\left|\Gamma(0{,}25(c+4)+x-\mu+j\lambda_1)\right|^2\end{bmatrix}}, & x\geq\mu, \\ C\dfrac{\begin{bmatrix}\left|\Gamma(\mu-x-0{,}25c+j\lambda_1)\right|^2\times \\ \times\left|\Gamma(0{,}25(c+4)+j\lambda_2)\right|^2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\left|\Gamma(-0{,}25c+j\lambda_1)\right|^2\times \\ \times\left|\Gamma(0{,}25\left(c+4\right)+\mu-x+j\lambda_2)\right|^2\end{bmatrix}}, & x<\mu, \end{cases} \qquad (25)$$

где

$$C = (C_1+C_2-1)^{-1},\ \lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ c>0$$

– параметры распределения;

$$C_1 = {}_3F_2\begin{pmatrix}1,-0{,}25c+j\lambda_2,-0{,}25c-j\lambda_2; \\ 0{,}25\left(c+4\right)+j\lambda_1, 0{,}25\left(c+4\right)-j\lambda_1;1\end{pmatrix};$$

$$C_2 = {}_3F_2\begin{pmatrix}1,-0{,}25c+j\lambda_1,-0{,}25c-j\lambda_1; \\ 0{,}25\left(c+4\right)+j\lambda_2, 0{,}25\left(c+4\right)-j\lambda_2;1\end{pmatrix};$$

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)$$

– обобщенная гипергеометрическая функция [21].

Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то $K_1=0$. При этом (25) преобразуется к виду

$$p(x) = \frac{C\begin{bmatrix}\left|\Gamma(\left|x-\mu\right|-0{,}25c+j\lambda)\right|^2\times \\ \times\left|\Gamma(0{,}25(c+4)+j\lambda)\right|^2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\left|\Gamma(-0{,}25c+j\lambda)\right|^2\times \\ \times\left|\Gamma(0{,}25(c+4)+\left|x-\mu\right|+j\lambda)\right|^2\end{bmatrix}}. \qquad (26)$$

Распределение (26) является симметричным. Его непрерывным аналогом является распределение Стьюдента.

На рисунке представлена область существования распределения (25). Для нее справедливы неравенства $-\infty<K_1<\infty$, $K_2<1$, $-1<K_3<1$, $-1<K_4<1$. Слева она ограничена областью существования частного случая распределения **VIIa** при $b=-0{,}5c$, а справа – областью существования частного случая распределения **VII** при $b=-0{,}5c$.

На основе соотношения (4) можно получить выражения для параметра сдвига μ при различных значениях параметров K_1, K_2, K_3 и K_4. Причем, если $1<K_2<1{,}5$, то

$$\mu = m_1 + \frac{3+K_1-2K_2}{4(K_2-1)} -$$

$$-\sqrt{\left[\frac{3+K_1-2K_2}{4(K_2-1)}\right]^2+\mu_2\frac{2-K_2}{K_2-1}}.$$

При $K_2=1$

$$\mu = \begin{cases} m_1-2\mu_2/(1+K_1), & K_1>-1; \\ m_1+2\mu_2/(1-K_1), & K_1\leq -1. \end{cases}$$

Если $K_2<1$, то

$$\mu = m_1-\sqrt{\mu_2\frac{2-K_2}{1-K_2}}(K_3-\sqrt{K_3^2-1})$$

$$\text{при } K_3\geq 1,\ -\infty<K_4<\infty;$$

$$\mu = m_1-K_1/4(1-K_2)$$

$$\text{при } -1<K_3<1,\ -1<K_4<1;$$

$$\mu = m_1-\sqrt{\mu_2\frac{2-K_2}{1-K_2}}(K_4+\sqrt{K_4^2-1})$$

$$\text{при } -\infty<K_3<1,\ K_4\leq -1.$$

Выводы

Таким образом, произведена модернизация разностного уравнения Орда и получено его решение в виде обобщенного распределения вероятностей (12). Показано, что частными случаями распределения (12) являются известные дискретные законы распределения, такие как равномерный, биномиальный, Пуассона, отрицательный биномиальный, гипергеометрический, отрицательный гипергеометрический. Рассмотрены числовые характеристики обобщенного распределения (12), а также на его основе разработан метод идентификации основных видов дискретных законов распределения с помощью коэффициентов K_1, K_2 и вспомогательных коэффициентов K_3, K_4, определяемых при помощи формул (9) и (19) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шереметьев А.Г. Статистическая теория лазерной связи. – М.: Связь, 1971. – 264 с.
2. Гальярди Р.М., Карп Ш. Оптическая связь. – М.: Связь, 1978. – 424 с.
3. Курикша А.А. Квантовая оптика и оптическая локация. – М.: Советское радио, 1973. – 184 с.
4. Основы импульсной лазерной локации / под. ред. В.Н. Рождествина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 512 с.
5. Хименко В.И., Тигин Д.В. Статистическая акустооптика и обработка сигналов. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 292 с.
6. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 296 с.
7. Китаева А.В. Рекуррентное оценивание функции интенсивности пуассоновского процесса // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 5. – С. 5–9.
8. Карпов И.Г. Обобщенный дискретный закон распределения флуктуаций оптических сигналов // Радиотехника. – 2002. – № 4. – С. 70–75.
9. Карпов И.Г., Карпов М.Г., Проскурин Д.К. Методы обобщенного вероятностного описания и идентификации негауссовских случайных величин и процессов. – Воронеж: ВГУ, 2010. – 172 с.
10. Ord J.K. On a system of discrete distributions // Biometrika. – 1967. – V. 54. – № 3–4. – P. 649–656.
11. Ord J.K. Approximations to distribution functions which are hyprgeometric series // Biometrika. – 1968. – V. 55. – № 1. – P. 243–248.
12. Бостанджиян В.А. Пособие по статистическим распределениям. – Черноголовка: Редакционно-издательский отдел ИПХФ РАН, 2000. – 1007 с.
13. Джонсон Н.Л., Коц С., Кемп А. Одномерные дискретные распределения. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 560 с.
14. Карпов И.Г., Грибков А.Н. Модернизация распределений Пирсона для аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 5–10.
15. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985. – 216 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
17. Гнеденко Б.В. Курс теории вепоятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1984. – 800 с.
19. Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
21. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Поступила 27.11.2013 г.

UDC 519.224

MODERNIZATION OF ORD DISTRIBUTION FOR APPROXIMATION OF THE BILATERAL DISCRETE DISTRIBUTIONS OF EXPERIMENTAL DATA

Ivan G. Karpov,
Dr. Sc., Tambov state technical university, 106, Sovetskaya street, Tambov, 392000, Russia. E-mail: zeratul68@mail.ru

Aleksey N. Gribkov,
Cand. Sc., Tambov state technical university, 106, Sovetskaya street, Tambov, 392000, Russia. E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

The urgency of considered issue is caused by the need to improve the accuracy and to simplify the approximation of experimental discrete data laws for bilateral distribution. Discrete distribution laws have wide practical application of probabilistic models as signal fluctuations in solving the synthesis of optimal methods for receiving and processing information in optical radar and communications. It is often necessary to use a generalized discrete distribution law, as each of the known laws of distribution alone can not achieve the necessary degree of integration of data with respect to fluctuations of optical signals.

The main aim of the study: *modernization of the Ord difference equation and getting on basis of its solving the distribution law for generalized two-way discrete random variable, and development of the method for identifying the main types of discrete distribution laws applied in practice.*
The methods used in the study: *calculations using methods of the probability theory and statistics, as well as the software MathCAD; methods of integral and differential calculus.*
The results: *The authors have modernized the Ord difference equation and have received its solution in the form of generalized probability distribution. It was shown that the known discrete distribution laws, such as uniform, binomial, Poisson, negative binomial, hypergeometric, negative hypergeometricparticular are the particular cases of the obtained distribution. The paper introduces the diagram of the bilateral distribution laws of discrete random variable, which shows the existence areas of the above discrete distribution laws. The authors considered numerical characteristics of the generalized distribution and on its basis developed the method of identifying the main types of discrete distribution laws applied in practice.*

Key words:
Ord distribution, discrete distribution law, approximation of distribution laws, density of probabilities distribution, discrete random variable.

REFERENCES

1. Sheremetev A.G. *Statisticheskaya teoriya lazernoy svyazi* [Statistical theory of laser communication]. Moscow, Svyaz Publ., 1971. 264 p.
2. Galyardi R.M., Karp Sh. *Opticheskaya svyaz* [Optical communications]. Moscow, Svyaz Publ., 1978. 424 p.
3. Kuriksha A.A. *Kvantovaya optika i opticheskaya lokatsiya* [Quantum optics and optical location]. Moscow, Sovetskoe radio publ., 1973. 184 p.
4. *Osnovy impulsnoy lazernoy lokatsii* [Basics pulsed laser location]. Ed. by V.N. Rozhdestvin. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Press, 2006. 512 p.
5. Khimenko V.I., Tigin D.V. *Statisticheskaya akustooptika i obrabotka signalov* [Statistical acoustooptics and signal processing]. St. Petersburg, S.-Petersburg university Press, 1996. 292 p.
6. Vadzinskiy R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* [Handbook of probability distributions]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2001. 296 p.
7. Kitaeva A.V. Rekurrentnoe otsenivanie funktsii intensivnosti puassonovskogo protsessa [Recurrent estimation of the Poisson process function intensity]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2008, vol. 312, no. 5, pp. 5–9.
8. Karpov I.G. Obobshchenny diskretny zakon raspredeleniya fluktuatsiy opticheskikh signalov [Generalized discrete distribution law of optical signals fluctuations]. *Radiotekhnika*, 2002, no. 4, pp. 70–75.
9. Karpov I.G., Karpov M.G., Proskurin D.K. *Metody obobshchennogo veroyatnostnogo opisaniya i identifikatsii negaussovskikh sluchaynyykh velichin i protsessov* [Methods of generalized probabilistic description and identification of non-Gaussian random variables and processes]. Voronezh, VGU Press, 2010. 172 p.
10. Ord J.K. On a system of discrete distributions. *Biometrika*, 1967, vol. 54, no. 3–4, pp. 649–656.
11. Ord J.K. Approximations to distribution functions which are hyprgeometric series. *Biometrika*, 1968, vol. 55, no. 1, pp. 243–248.
12. Bostandzhiyan V.A. *Posobie po statisticheskim raspredeleniyam* [Manual on statistical distributions]. Chernogolovka, IPHF RAN Publ. Dep., 2000. 1007 p.
13. Dzhonson N.L., Kots S., Kemp A. *Odnomernye diskretnye raspredeleniya* [Dimensional discrete distributions]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2010. 560 p.
14. Karpov I.G., Gribkov A.N. Modernizatsiya raspredeleniy Pirsona dlya approksimatsii dvukhstoronnihh zakonov raspredeleniya eksperimentalnykh dannykh [Modernization of Pearson distribution for approximation of the bilateral distribution laws of experimental data]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 5–10.
15. Nikiforov A.F., Suslov S.K., Uvarov V.B. *Klassicheskie ortogonalnye polinomy diskretnoy peremennoy* [Classical orthogonal polynomials of a discrete variable]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 216 p.
16. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonalnyie mnogochleny* [Higher transcendental functions. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 296 p.
17. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [Course on probability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 448 p.
18. Prudnikov A.P., Bryichkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary function]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 800 p.
19. *Veroyatnost i matematicheskaya statistika: entsiklopediya* [Probability and mathematical statistics: Encyclopedia]. Ed. by Yu.V. Prohorov. Moscow, Bolshaya Rossiyskaya entsiklopediya Publ., 1999. 910 p.
20. Prudnikov A.P., Bryichkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryadyi. Spetsialnyie funktsii* [Integrals and series. Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 750 p.
21. Prudnikov A.P., Bryichkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryadyi. Dopolnitelnye glavy* [Integrals and series. Additional functions]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 800 p.

Received: 27 November 2013.