УДК 517.956.6

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Саадалов Толонбай Ысманович,
ст. преподаватель кафедры информатики Ошского технологического университета им. М.М. Адышева, Кыргызская Республика, 714081, г. Ош, ул. Исанова, 81. E-mail: saadtol_68@mail.ru

Актуальность работы обусловлена доказательством корректности задачи сопряжения для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с младшими членами.
Цель работы: *доказательство существования и единственности решения задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, когда условия сопряжения задаются на не характеристической линии*
Методы исследования: *Методом функции Римана и интегральных уравнений разрешимость задачи эквивалентным образом сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, решение которого устанавливается методом последовательных приближений.*
Результаты: *В работе исследована разрешимость задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с младшими переменными коэффициентами. Установлено, что когда порядок уравнения равен четырем и условия сопряжения задаются на не характеристической линии, то для корректности задачи, вместо обычных двух условий склеивания, необходимо задание четырех условий склеивания. Особенностью данной задачи является то, что условия сопряжения задаются не на координатной оси, а на биссектрисе первой четверти плоскости. С целью определения следа искомой функции и ее производных второго, третьего, четвертого порядков на линии изменения типа уравнений, а также для получения явного представления решения, построены функции Римана для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, определяемые как решения соответствующих сопряженных задач Гурса. Изучены некоторые свойства функции Римана, и получены представления решения задачи Коши для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. Разрешимость задачи сопряжения установлена эквивалентным сведением ее к разрешимости системы четырех линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказаны теоремы существования и единственности решений задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка.*

Ключевые слова:
Задачи сопряжения, гиперболические и псевдопараболические уравнения, краевые и начальные условия, функции Римана, уравнения Вольтерра и Фредгольма.

Постановка задачи

При изучении физико-химических процессов, происходящих в составных телах, часто используются математические модели, которые основаны на сопряжении различных типов уравнений в разных частях рассматриваемой области [1–3]. Задачи сопряжения уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков изучены в работах [4–18].

В работе в области

$$D = \{(x, y) : 0 < x < \ell, 0 < y < \ell\}$$

рассмотрим задачу сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка вида

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + b(x, y)u_{xy} + c_1(x, y)u_x + \\ + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = 0, \ (x, y) \in D_1, \qquad (1)$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \beta(x, y)u_{xy} + \gamma_1(x, y)u_x + \\ + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = 0, \ (x, y) \in D_2, \qquad (2)$$

где b, β, d, δ, c_i, g_i (i=1,2) – заданные функции, а $D_1=D\cap(x<y)$, $D_2=D\cap(x>y)$.

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ (r=0,1,...,n; s=0,1,...,m). Отметим, что линия $y=x$ не является характеристикой уравнения (1) и (2).

Задача 1 (Задача сопряжения). *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D})[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+2}(D_1)]$, *удовлетворяющую уравнениям (1) и (2) соответственно в областях* D_1 *и* D_2, *краевым условиям*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \ 0 \le y \le \ell, \qquad (3)$$

$$u_{xx}(\ell, y) = \varphi_3(y), \ 0 \le y \le \ell, \qquad (4)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \ 0 \le x \le \ell, \qquad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(y-0, y) = u(y+0, y), \\ u_x(y-0, y) = u_x(y+0, y), \ 0 \le y \le \ell, \\ u_{xy}(y-0, y) = u_{xy}(y+0, y), \\ u_{xxy}(y-0, y) = u_{xxy}(y+0, y), \ 0 \le y \le \ell, \qquad (6)$$

где φ_i ($i=\overline{1,3}$) – *заданные функции, причем для них выполняются следующие условия*

$$\varphi_i \in C^2[0, h] \ (i = 1, 2), \ \varphi_3 \in C^1[0, h], \ \ \psi \in C^2[0, \ell], \qquad (7)$$

$$b \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), \ c_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\ c_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), \ d \in C(\bar{D}_1), \qquad (8)$$

$$\beta \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \ \gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \\ \gamma_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \ \delta \in C(\bar{D}_2), \qquad (9)$$

$$\varphi_{i+1}(0)=\psi^{(i)}(0)\,(i=0,1),\ \ \varphi_3(0)=\psi''(\ell). \qquad (10)$$

Уравнения (1) и (2) в области D в силу условиям сопряжения (6) являются уравнениями смешанного типа [19]. Задача 1 в случае b, β, c_i, $\gamma_i\equiv 0$ (i=1,2), d, δ=const изучена в работе [20].

Для решения задачи 1 введем следующие обозначения:

$$u(y,y)=\tau(y),\qquad u_x(y,y)=\nu(y),$$

$$u_{xy}(y,y)=\mu(y),\ \ u_{xxy}(y,y)=\chi(y),\ 0\le x\le\ell, \qquad (11)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $\chi(x)$ – пока неизвестные функции.

Если удастся определить функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$, $\chi(x)$, то решение задачи 1 сводится к определению решения уравнений (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно.

Решение вспомогательных задач Коши

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+2}(D_1)$ *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению* (1) *и начальным условиям* (11).

Задача 3. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(D{-}_2)\cap C^{3+1}(D_2)$ *удовлетворяющую в области* D_2 *уравнению* (2) *и начальным условиям* (11).

Теорема 1. *Если выполняются условия* (8) *и* $\tau(y)\in C^2[0,\ell]$, $\nu(y)\in C^1[0\ell]$, $\mu(y)\in C^1[0,\ell]$, $\chi(y)\in \tilde{N}[0,\ell]$, *то решение задачи 2 существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,y)=\tau(y)-$$
$$-\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_1(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_1(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_1(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1, \qquad (12)$$

где

$$A_1(x,y;\xi)=\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)+b(\xi,\xi)\vartheta_\eta(x,y;\xi,\xi)+$$
$$+[b_\eta(\xi,\xi)-c_1(\xi,\xi)+c_2(\xi,\xi)]\vartheta(x,y;\xi,\xi),$$
$$B_1(x,y;\xi)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)+b(\xi,\xi)\vartheta(x,y;\xi,\xi),$$
$$C_1(x,y;\xi)=\vartheta_\eta(x,y;\xi,\xi),$$

а $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, определяемая в области

$$D_1^*=\{(\xi,\eta):x<\xi<y,\xi<\eta<y\}$$

как решение следующей задачи Гурса [9]:

$$L_1^*(\vartheta)\equiv\vartheta_{\eta\eta\xi\xi}+(b\vartheta)_{\eta\xi}-(c_1\vartheta)_\xi-(c_2\vartheta)_\eta+d\vartheta=0,$$
$$(x,y)\in D_1^*, \qquad (13)$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\eta-y,$$
$$x\le\eta\le y,$$
$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \ \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\xi-x,$$
$$x\le\xi\le y. \qquad (14)$$

Доказательство. Из уравнения (13), с учетом краевых условий (14), методом интегрирования получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции Римана:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=(\xi-x)(\eta-y)-$$
$$-\int_x^\xi ds\int_y^\eta K(\xi,\eta;s,t)\vartheta(x,y;s,t)dt, \qquad (15)$$

где

$$K(\xi,\eta;s,t)=b(s,t)-(\eta-t)c_1(s,t)-$$
$$-(\xi-s)c_2(s,t)+(\xi-s)(\eta-t)d(s,t),$$

которое допускает единственное решение. Из (12) найдем производные

$$u_x(x,y)=\nu(x)-$$
$$-\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_{1x}(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1x}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_{1x}(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_x(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1, \qquad (16)$$

$$u_{xy}(x,y)=\mu(y)+\tau(y)\int_x^y c_2(s,y)ds-$$
$$\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_{1xy}(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1xy}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_{1xy}(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_{xy}(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1, \qquad (17)$$

$$u_{xxy}(x,y)=\chi(x)+c_2(x,x)\tau(x)-c_2(x,y)\tau(y)-$$
$$-\int_x^y\left[\begin{aligned}&A_{1xxy}(x,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1xxy}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+C_{1xxy}(x,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_{xxy}(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_1. \qquad (18)$$

Из формул (12), (16)–(18) легко усмотреть, что начальные условия (11) выполняются.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (9) *и* $\tau(y)\in C^1[0,\ell]$, $\nu(y)\in C^2[0,\ell]$, $\mu(y)\in C^1[0,\ell]$, $\chi(y)\in C[0,\ell]$, *то решение задачи 3 существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,y)=A_2(x,y)\tau(y)+$$
$$+\int_y^x\left[\begin{aligned}&B_2(x,y;\xi)\tau(\xi)+C_2(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\&+w_\xi(x,y;\xi,\xi)\mu(\xi)-w(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{aligned}\right]d\xi,$$
$$(x,y)\in D_2, \qquad (19)$$

где

$$A_2(x,y)=w_{\xi\xi}(x,y;y,y)+\beta(y,y)w(x,y;y,y),$$
$$B_2(x,y;\xi)=w_{\xi\xi\eta}(x,y;\xi,\xi)+\beta(\xi,\xi)w_\eta(x,y;\xi,\xi)+$$
$$[\beta_\eta(\xi,\xi)-\gamma_1(\xi,\xi)+\gamma_2(\xi,\xi)]w(x,y;\xi,\xi),$$
$$C_2(x,y;\xi)=w_{\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)+\beta(\xi,\xi)w(x,y;\xi,\xi),$$

$w(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, определяемая в области

$$D_2^*=\{(\xi,\eta):y<\xi<x,y<\eta<\xi\}$$

как решение задачи Гурса [9]:

$$L_2^*(w)\equiv w_{\xi\xi\xi\eta}+(\beta w)_{\xi\eta}-(\gamma_1 w)_\xi-(\gamma_2 w)_\eta+\delta w=0,$$
$$(x,y)\in D_2^*, \qquad (20)$$

$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \ w_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,$$
$$w_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=1,\ \ y\le\eta\le x,$$
$$w(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\omega(x,y;\xi),\ \ y\le\xi\le x, \qquad (21)$$

а $\omega(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$w_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,y)+[\beta(\xi,y)w(x,y;\xi,y)]_{\xi}-$$
$$-\gamma_2(\xi,y)w(x,y;\xi,y)=0,\ y<\xi<x, \qquad (22)$$

$$w(x,y;\xi,y)\,|_{\xi=x}=0,\ w_{\xi}(x,y;\xi,y)\,|_{\xi=x}=0,$$
$$w_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)\,|_{\xi=x}=1. \qquad (23)$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Задача (20), (21) однозначно определяет функцию Римана $w(x,y;\xi,\eta)$ в области D_2.

Лемма 1. Если

$$\forall y\in[0,\ell]\wedge x\in[y,\ell]:\ \beta(x,y)-$$
$$-\frac{1}{2}(x-y)^2\gamma_2(x,y)\le 0, \qquad (24)$$

то

$$w_{xx}(\ell,y;y,y)\ge 1. \qquad (25)$$

Доказательство. Интегрируя уравнение (22) и с учетом условий (23), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$w(x,y;\xi,y)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2+$$
$$+\int_{\xi}^{x}H(y,\xi;s)w(x,y;s,y)ds,\ y\le\xi\le x, \qquad (26)$$

где

$$H(y,\xi;s)=-(s-\xi)[\beta(s,y)-\frac{1}{2}(s-\xi)^2\gamma_2(s,y)].$$

Дифференцируя дважды уравнение (26), имеем

$$w_{xx}(x,y;\xi,y)=1+\int_{\xi}^{x}H(y,\xi;s)w_{xx}(x,y;s,y)ds. \qquad (27)$$

Полагая $x=\ell$, $\xi=y$ из (27) имеем

$$w_{xx}(\ell,y;y,y)=1+\int_{y}^{\ell}H(y,y;s)w_{xx}(\ell,y;s,y)ds. \qquad (28)$$

При соблюдении условия (24) выполняется неравенство $(y,y;s)\ge 0$. Тогда из (28) заключаем, что неравенство (25) имеет место. Лемма 1 доказано.

Сведение задачи к решению системы интегральных уравнений

Используя первое условие (3) из (12), будем иметь

$$\tau(y)=$$
$$=\tau_0(y)+\int_0^y\begin{bmatrix}H_{11}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{12}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{13}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{14}(y,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi, \qquad (29)$$

где

$$H_{11}(y,\xi)=A_1(0,y;\xi),\ H_{12}(y,\xi)=B_1(0,y;\xi),$$
$$H_{13}(y,\xi)=C_1(0,y;\xi),\ H_{14}(y,\xi)=\vartheta(0,y;\xi,\xi),$$

где $\tau_0(y)=\varphi_1(y)$. Из (15) с учетом второго условия (3) имеем

$$\nu(0)-\int_0^y\begin{bmatrix}A_{1x}(0,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1x}(0,y;\xi)\nu(\xi)+\\+C_{1x}(0,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_x(0,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi=$$
$$=\varphi_2(y).$$

Дифференцируя полученное соотношение по y, получим

$$\mu(y)=A_{1x}(0,y;y)\tau(y)+$$
$$+\int_0^y\begin{bmatrix}A_{1xy}(0,y;\xi)\tau(\xi)+B_{1xy}(0,y;\xi)\nu(\xi)+\\+C_{1xy}(0,y;\xi)\mu(\xi)+\vartheta_{xy}(0,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi+\varphi_2'(y),$$

Отсюда с учетом (29) имеем

$$\mu(y)=$$
$$=\mu_0(y)+\int_0^y\begin{bmatrix}H_{31}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{32}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{33}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{34}(y,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi, \qquad (30)$$

где

$$H_{31}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{11}(y,\xi)+A_{1xy}(0,y;\xi),$$
$$H_{32}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{12}(y,\xi)+B_{1xy}(0,y;\xi),$$
$$H_{33}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{13}(y,\xi)+C_{1xy}(0,y;\xi),$$
$$H_{34}(y,\xi)=A_{1x}(0,y;y)H_{14}(y,\xi)+\vartheta_{xy}(0,y;\xi,\xi),$$
$$\mu_0(y)=A_{1x}(0,y;y)\tau_0(y)+\varphi_2'(y).$$

Используя условие (5) в (18), и дифференцируя полученное соотношение, имеем

$$\nu(y)=$$
$$=\nu_0(y)+\int_0^y\begin{bmatrix}H_{21}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{22}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{23}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{24}(y,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi, \qquad (31)$$

$$H_{21}(y,\xi)=-B_{2x}(y,0;\xi),\ H_{22}(y,\xi)=-C_{2x}(y,0;\xi),$$
$$H_{23}(y,\xi)=-w_{\xi x}(y,0;\xi,\xi),\ H_{24}(y,\xi)=w_x(y,0;\xi,\xi),$$
$$\nu_0(y)=\psi'(y)-A_{2x}(y,0)\psi(0).$$

Дифференцируя (29), получим

$$\tau'(y)=\tau_0'(y)+H_{11}(y,y)\tau(y)+\nu(y)+y\mu(y)+$$
$$+\int_0^y\begin{bmatrix}H_{11y}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{12y}(y,\xi)\nu(\xi)+\\+H_{13y}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{14y}(y,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi, \qquad (32)$$

Из (32) с учетом (29)–(31), имеем (33)

$$\tau'(y)=z_0(y)+$$
$$+\int_0^y\begin{bmatrix}H_{01}(y,\xi)\tau(\xi)+H_{02}(y,\xi)\nu(\xi)d\xi+\\+H_{03}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{04}(y,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi, \qquad (33)$$

$$H_{0j}(y,\xi)=H_{11}(y,y)H_{1j}(y,\xi)+$$
$$+H_{2j}(y,\xi)+yH_{3j}(y,\xi)+H_{1jy}(y,\xi),\ j=\overline{1,4},$$
$$z_0(y)=\tau_0'(y)+H_{11}(y,y)\tau_0(y)+\nu_0(y)+y\mu_0(y).$$

Дважды дифференцируя (18) по x, получим

$$u_{xx}(x,y)=A_{2xx}(x,y)\tau(y)+\nu'(x)-$$
$$-\mu(x)+\int_y^x\begin{bmatrix}B_{2xx}(x,y;\xi)\tau(\xi)+\\+C_{2xx}(x,y;\xi)\nu(\xi)+\\+w_{\xi xx}(x,y;\xi,\xi)\mu(\xi)-\\+w_{xx}(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi,$$
$$(x,y)\in D_2. \qquad (34)$$

Используя условие (4) в (34) и дифференцируя полученное соотношение, будем иметь

$$\chi(y)=$$
$$=W(y)\begin{Bmatrix}[A_{2xxy}(\ell,y)-B_{2xx}(\ell,y;y)]\tau(y)+\\ +A_{2xx}(\ell,y)\tau'(y)-C_{2xx}(\ell,y;y)\nu(y)-\\ -w_{\xi xx}(\ell,y;y,y)\mu(y)\end{Bmatrix}+$$
$$+W(y)\int_y^\ell\begin{bmatrix}B_{2xxy}(\ell,y;\xi)\tau(\xi)+\\ +C_{2xxy}(\ell,y;\xi)\nu(\xi)+\\ +w_{\xi xxy}(\ell,y;\xi,\xi)\mu(\xi)-\\ -w_{xxy}(\ell,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi-$$
$$-W(y)\varphi_3'(y), \qquad (35)$$

где $W(y)=1/w(\lambda,y;y,y)$.

С учетом соотношений (29)–(31), (33) из (35) получим

$$\chi(y)=$$
$$=\chi_0(y)+\int_0^\ell\begin{bmatrix}K_{41}(y,\xi)\tau(\xi)+K_{42}(y,\xi)\nu(\xi)+\\ +K_{43}(y,\xi)\mu(\xi)+K_{44}(y,\xi)\chi(\xi)\end{bmatrix}d\xi, \quad (36)$$

$$K_{41}(y,\xi)=\begin{cases}E_1(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\ W(y)B_{2xxy}(\ell,y;\xi),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{42}(y,\xi)=\begin{cases}E_2(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\ W(y)C_{2xxy}(\ell,y;y),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{43}(y,\xi)=\begin{cases}E_3(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\ W(y)w_{\xi xxy}(\ell,y;\xi,\xi),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{44}(y,\xi)=\begin{cases}E_4(y,\xi),\ 0\le\xi<y,\\ -W(y)w_{xxy}(\ell,y;\xi,\xi),\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$

$$E_j(y,\xi)=$$
$$=W(y)\begin{Bmatrix}[A_{2xxy}(\ell,y)-B_{2xx}(\ell,y;y)]H_{1j}(y,\xi)+\\ +A_{2xx}(\ell,y)H_{0j}(y,\xi)-\\ -C_{2xx}(\ell,y;\xi)H_{2j}(y,\xi)-\\ -w_{\xi xx}(\ell,y;y,y)H_{3j}(y,\xi)\end{Bmatrix},$$
$$j=\overline{1,4}.$$

$$\chi_0(y)=$$
$$=W(y)\begin{Bmatrix}[A_{2xxy}(\ell,y)-B_{2xx}(\ell,y;y)]\tau_0(y)+\\ +A_{2xx}(\ell,y)z_0(y)-C_{2xx}(\ell,y;y)\nu_0(y)-\\ -w_{\xi xx}(\ell,y;y,y)\mu_0(y)-\varphi_3'(y)\end{Bmatrix}.$$

Таким образом, задача 1 сведена к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида (29)–(31), (36) относительно функций $\tau(y)$, $\nu(y)$, $\mu(y)$, $\chi(y)$. После определения этих функций решение задачи 1 в области D_2 представляется в виде (19).

Решение системы интегральных уравнений

Систему уравнений (29)–(31), (36) запишем в виде

$$g_i(y)=\rho_i(y)+\sum_{j=1}^4\int_0^\ell K_{ij}(y,\xi)g_j(\xi)d\xi,\ i=\overline{1,4}, \quad (37)$$

где

$$g_1(y)=\tau(y),\ g_2(y)=\nu(y),$$
$$g_3(y)=\mu(y),\ g_4(y)=\chi(y),$$
$$\rho_1(y)=\tau_0(y),\ \rho_2(y)=\nu_0(y),$$
$$\rho_3(y)=\mu_0(y),\ \rho_4(y)=\chi_0(y),$$
$$K_{i1}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i1}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\ 0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{i2}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i2}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\ 0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{i3}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i3}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\ 0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$K_{i4}(y,\xi)=\begin{cases}H_{i4}(y,\xi),\ 0\le\xi\le y,\\ 0,\ y<\xi\le\ell,\end{cases}$$
$$i=\overline{1,3}.$$

Пусть $M=\max\limits_{0\le i\le 4}\left\{\sum\limits_{j=1}^4\max\limits_{0\le y,\xi\le\ell}|K_{ij}(y,\xi)|\right\}$. Если выполняется условие

$$M\ell<1, \qquad (38)$$

тогда система уравнений (37) имеет единственное решение, представимое в виде

$$g_i(y)=\rho_i(y)+\sum_{j=1}^4\int_0^\ell R_{ij}(y,\xi)g_j(\xi)d\xi,\ i=\overline{1,4},$$

где

$$R_{ij}(y,\xi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}K_{ij}^{(n)}(y,\xi),$$
$$K_{ij}^{(1)}(y,\xi)\equiv K_{ij}(y,\xi),\ i,j=\overline{1,4},$$
$$K_{ij}^{(n)}(y,\xi)=$$
$$=\int_0^\ell\begin{bmatrix}K_{i1}^{(1)}(y,s)K_{1j}^{(n-1)}(s,\xi)+K_{i2}^{(1)}(y,s)K_{2j}^{(n-1)}(s,\xi)+\\ +K_{i3}^{(1)}(y,s)K_{3j}^{(n-1)}(s,\xi)+K_{i4}^{(1)}(y,s)K_{4j}^{(n-1)}(s,\xi)\end{bmatrix}ds,$$
$$i,j=\overline{1,4},\ n=2,3,\ldots$$

Таким образом, доказано

Теорема 3. *Если выполняются условия* (7)–(10), (24) *и* (38), *то решение задачи* 1 *существует и единственно.*

Заключение

Из теорем 1, 2 следует, что построением функции Римана для сопряженных задач (задачи Гурса) удается получить представления решения вспомогательных задач, которые существенно используются при решении задачи сопряжения. Условия (24) обеспечивает достаточное условие Фредгольмовости системы (37). Из теоремы 3 вытекает корректность задачи сопряжения. Через функции Римана получены представления решения задачи в явном виде в областях D_1 и D_2 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, С.В. Лемешевский, П.П. Матус // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т. 39. – № 4. – С. 954–962.
2. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. Сер. ФМН. – 2006. – Вып. 42. – С. 11–34.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
4. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан., 2000. – 144 с.
5. Кожобеков К.Г. О разрешимости задач сопряжений для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 2. – С. 9–12.
6. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Нелокальная задача с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка // Вестник КРСУ. – 2010. – Т. 10. – С. 150–153.
7. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Краевые задачи для смешанного парaболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя линиями изменения типа // Вестник КНУ. Спец. выпуск. – 2011. – С. 136–138.
8. Sopuev A., Arkabaev N.K. Problems of interface for linear preudoparabolic equations of the third order // Book of Abstracts. The 4th congress of the TWMS. – Baku, Azerbaijan, 1–3 July, 2011. – P. 276.
9. Молдояров У.Д. Нелокальная задача с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 14–17.
10. Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике // Вестник Ошского государственного университета. Серия естественных наук. – 2012. – № 3. – С. 114–121.
11. Сопуев А., Сатаров А.Э. Задачи сопряжений для уравнений в частных производных четвертого порядка с различными действительными характеристиками // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С. 124–133.
12. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболическо-го уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области // Вестник ОшГУ. Серия естественных наук. – 2012. – № 3. – Вып. III. – С. 122–128.
13. Сопуев А., Сатаров А.Э. Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Серия естественных наук. – 2012. – № 3. – Вып. III. – С. 128–138.
14. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 1 (21). – С. 16–23.
15. Сопуев А., Сатаров А.Э. Об одной задаче сопряжения для нелинейных уравнений гиперболического типа четвертого порядка // Вестник Ошского государственного университета. Серия естественных наук. – 2013. – № 1. – С. 252–259.
16. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболических уравнений четвертого порядка // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их проблемы: Тезисы докл. Респ. науч. конф. с участием ученых из стран СНГ. – Ташкент, 21–23 ноября 2013 г. – Ташкент: НУУ им. М. Улукбека, 2013. – С. 105–106.
17. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М: Наука, 1970. – 296 с.
18. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. Об одной задаче сопряжения для псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка // актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Междунар. юбил. науч. конф., посвящ. 20-летию КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова: Тезисы докл. – Бишкек, 5–7 сентября 2013 г. – Бишкек: КРСУ, 2013. – С. 114–115.
19. Сопуев А., Саадалов Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдрпараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения // Известия Ошского технологического университета. – 2012. – № 1. – С. 55–59.
20. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

Поступила 24.06.2014 г.

UDC 517.956.6

THE CONJUGATE PROBLEM FOR HYPERBOLIC AND PSEUDOPARABOLIC FOURTH-ORDER EQUATIONS

Tolonbai Y. Saadalov,
Osh Technological University named after M. Adyshev, 81, Isanova street,
Osh, 714081, the Kyrgyz Republic. E-mail: saadtol_68@mail.ru

Relevance of the research is considered by the proof of correctness of the conjugation problem for linear hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations with low figures.
***The main aim of the research** is to prove the existence and uniqueness of solution for conjugation problem for hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations when matching conditions are specified not on a characteristic line.*
***The methods used in the study:** Using Riman's function and integral equations methods and equivalent model the solution of the problem is reduced to the solution of the Fredgolm integral equations system of the second order where the solution is attained by the consequent approximation method.*
***The results:** The author has studied the solvability of the conjugation problem for hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations with low variable coefficients. It was ascertained that when the equation order equals four, and matching conditions are specified not on the characteristic line, four gluing conditions should be specified for the problem correctness instead of usual two gluing conditions. The peculiarity of the problem is that the matching conditions are set not on the coordinate axis but on the bisector of the plane first quarter. In order to determine the unknown function trace and its derivatives of the second, third and fourth orders of changes in the line-type equations, as well as to obtain an explicit solution representation, Riemann functions were constructed for linear hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations that are defined as solutions of the corresponding Goursat conjugate problems. The author studied some properties of the Riemann function and obtained the solution representations for the Cauchy problem for linear hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations with variable coefficients. Solvability of the conjugation problem was obtained by its equivalent reduction to the solvability of the system of four linear Fredholm integral equations of the second kind. The theorems of existence and uniqueness of solutions of the conjugation problem for hyperbolic and pseudoparabolic fourth-order equations were proved.*

Key words:
Conjugate problem, hyperbolic and pseudoparabolic equations, boundary and initial conditions, the Riemann functions, the Volterra and Fredholm equations.

REFERENCES

1. Samarsky A.A., Vabishchevich P.N., Lemeshevsky S.V., Matus P.P. Raznostnye skhemy dlya zadachi o sopryazhenii uravneny giperbolicheskogo i parabolicheskogo tipov [Difference schemes for the problem of conjugating hyperbolicand and parabolic type equations]. *Sibirsky matematichesky zhurnal*, 1998, vol. 39, no. 4, pp. 954–962.
2. Nakhusheva V.A. Ob odnoy matematicheskoy modeli teploobmena v smeshannoy srede s idealnym kontaktom [On a mathematical heat transfer model in a mixed environment with perfect contact]. *Vestnik SamGTU. Ser. FMN*, 2006, Iss. 42, pp. 11–34.
3. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1995. 301 p.
4. Dzhuraev T.D., Sopuev A. *K teorii differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka* [To the theory of the differential equations in private derivatives of the fourth order]. Tashkent, Fan Publ., 2000. 144 p.
5. Kozhobekov K.G. O razreshimosti zadach sopryazheniy dlya nelineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh tretego poryadka [On conjugation problem solvability for nonlinear partial differential equations of the third order]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2009, vol. 315, no. 2, pp. 9–12.
6. Sopuev A., Arkabaev N.K. Nelokalnaya zadacha s integralnym usloviyem dlya nelineynogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh tretego poryadka [Nonlocal problem with integral condition for linear partial differential equation of the third order]. *Vestnik KRSU*, 2010, vol. 10, pp. 150–153.
7. Sopuev A., Arkabaev N.K. Kraevye zadachi dlya smeshannogo giperbolicheskogo uravneniya tretogo poryadka s dvumiy lineiymi izmeneniy tipa [Boundary value problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation of the third order with two lines of type changing]. *Vestnik KNU*, 2011, Spec. Iss., pp. 136–138.
8. Sopuev A., Arkabaev N.K. Problems of interface for linear preudoparabolic equations of the third order. *Book of Abstracts. The 4th congress of the TWMS*. Baku, Azerbaijan, 1–3 July, 2011. pp. 276.
9. Moldoyarov U.D. Nelokalnaya zadacha s integralnymi usloviyami dlya nelineynogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh tretego poryadka [Nonlocal problem with integral conditions for non-linear partial differential equation of the third order]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 2, pp. 14–17.
10. Saadalov T.Y. Kraevye zadachi dlya smeshannogo psevdoparabolo-giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s nelokalnym usloviem sopryazheniya v krivolineynom treugolnike [Boundary tasks for the mixed psevdoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with non local condition of interface in a curvilinear triangle]. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya estestvennykh nauk*, 2012, no. 3, pp. 114–121.
11. Sopuev A., Satarov A.E. Zadachi sopryazheniy dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka s razlichnymi deystvitelnymi kharakteristikami [Conjugation problem for partial differential equations of the fourth order with different valid characteristics]. *Issledovaniy po integro-differentsialnym uravneniym* [Studying in integro-differential equations]. Biskkek, Ilim, 2012. Iss. 44, pp. 124–133.
12. Sopuev A., Saadalov T.Y. Kraevye zadachi dlya smeshannogo psevdoparabolo-giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s nelokalnym usloviem sopryazheniya v krivolineynoy oblasti [Boundary tasks for the mixed psevdoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with non local condition of interface in curvilinear area]. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya estestvennykh nauk*, 2012, no. 3, pp. 122–128.
13. Sopuev A., Satarov A.E. Zadacha sopryazheniya dlya nelineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka

[Conjugation problem for nonlinear partial differential equations of the fourth order]. *Vestnik OshGU. Seriya estestvennykh nauk*, 2012, no. 3, pp. 128–138.

14. Sopuev A., Arkabaev N.K. Zadachi sopryazheniya dlya lineynykh psevdoparabolicheskikh uravneniy tretego poryadka [Conjugation problems for pseudo-parabolic linear equations of the third order]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 1 (21), pp. 16–23.
15. Sopuev A., Satarov A.E. Ob odnoy zadache sopryazheniya dlya nelineynykh uravneniy giperbolicheskogo tipa chetvertogo poryadka [On a conjugate problem for nonlinear hyperbolic type equations of the fourth order]. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya estestvennykh nauk*, 2013, no. 1, pp. 252–259.
16. Sopuev A., Saadalov T.Y. O zadache sopryazheniya dlya giperbolicheskikh uravneniy chetvertogo poryadka [On conjugation problem for hyperbolic equations of the fourth order]. *Sovremennye problemy differentsialnykh uravneniy i ikh problemy. Tezisy dokladov Respublikanskoy nauchnoy konferentsii s uchastiem uchenykh iz stran SNG* [Modern problems of differential equations and their problems. Proc. of the Republic conference with participation of the scientists from CIS countries]. Tashkent, 21–23 November 2013, NUU im. M. Ulukbeka 2013. pp. 105–106.
17. Smirnov M.M. *Uravneniya smeshannogo tipa* [The mixed type equations]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 296 p.
18. Sopuev A., Saadalov T.Y. Ob odnoy zadache sopryazheniya dlya psevdoparabolo-giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka [On a conjugate problem for psevdoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order]. *Aktualnye problemy teorii upravleniya, topologii i operatornykh uravneniy. Tezisy dokladov vtoroi mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, posvyashchennoy 20-letiyu KRSU i 100-letiyu professora Ya.V. Bykova* [Urgent problems of control theory, topology and operator equations. Proc. of the 2[d] International conference devoted to twentieth anniversary of KRSU and 100 anniversary of professor Ya.V. Bykov]. Bishkek, 5–7 September 2013, KRSU. pp. 114–115.
19. Sopuev A., Saadalov T.Y. Kraevye zadachi dlya smeshannogo psevdoparabolo-giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s nelokalnym usloviem sopryazheniya [Boundary tasks for the mixed psevdoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with non local condition]. *Bulletin of the Osh technological university*, 2012, no. 1, pp. 55–59.
20. Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya uravneniy parabola- giperbolicheskogo tipa [Boundary tasks for equations of parabolic-hyperbolic type]. Tashkent, Fan Publ., 1986. 220 p.

Received: 24 June 2014.