

УДК 621.52+511.52

Д-АНАЛОГ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБОБЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДРАЗИНА, ОСНОВАННЫЙ НА СКЕЛЕТНОМ РАЗЛОЖЕНИИ МАТРИЦЫ

Асланян Гамлет Арменович,

аспирант кафедры информационных технологий и автоматизации
Государственного инженерного университета Армении (Политехник), Ар-
мения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105. E-mail: hamoaslanyan@gmail.com

Симонян Саргис Оганесович,

д-р техн. наук, заведующий кафедрой информационных технологий
и автоматизации Государственного инженерного университета Армении
(Политехник), Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105.
E-mail: ssimonyan@seua.am

Актуальность работы обусловлена широким применением обобщенной обратной матрицы Дразина в теории конечных цепей Маркова, в решении нестационарных линейных систем дифференциальных уравнений, при решении рекуррентных уравнений и задач оптимального управления динамическими системами, при различных вопросах систем автоматического управления и др.

Цель исследования: разработка алгоритма нахождения матричных дискрет однопараметрической обобщенной обратной матрицы Дразина в области дифференциальных преобразований и восстановления оригинала с помощью обратных Д-преобразований.

Методы исследования: теория псевдообратных численных матриц Дразина, теория обобщенных обратных параметрических матриц, скелетное разложение матрицы, прямые и обратные дифференциальные преобразования, линейные преобразования линейного пространства, линейная алгебра, численные расчеты матричных дискрет с использованием программного пакета MATLAB ver. R2011b.

Результаты: Представлен достаточно простой численно-аналитический метод определения однопараметрической обобщенной обратной матрицы Дразина, основанный на прямых и обратных дифференциальных преобразованиях, который легко реализуем средствами современных информационных технологий. Иллюстрация этого метода на одном модельном примере вычисления частного случая обобщенной обратной матрицы Дразина – групповой обратной матрицы, показала его высокую вычислительную эффективность и малую погрешность вычислений.

Ключевые слова:

Однопараметрическая обобщенная обратная матрица Дразина, скелетное разложение матрицы, индекс матрицы, дифференциальные преобразования, информационные технологии.

Введение

Допустим, имеем однопараметрическую квадратную матрицу $A(t)$ с размерами $n \times n$, рангом r (заметим, что параметр t может быть временем,

оператором Лапласа $\left(S \sim \frac{d}{dt} \right)$ или другим параме-

тром), и индекс матрицы равен $k = \text{index}(A(t))$, где k – наименьшее неотрицательное целое число, при котором $\text{rank}(A^{k+1}(t)) = \text{rank}(A^k(t))$. Псевдообратной Дразина $A^D(t)$ к матрице $A(t)$ называется матрица, удовлетворяющая всем нижеприведенным условиям [1] (по аналогии с числовыми матрицами):

$$A^D(t)A(t)A^D(t) = A^D(t),$$

$$A(t)A^D(t) = A^D(t)A(t),$$

$$A^{k+1}(t)A^D(t) = A^k(t).$$

В частном случае, когда $\text{index}(A(t))=1$, обобщенную обратную Дразина назовем групповой обратной $A^*(t)$ [1] (также по аналогии с числовыми матрицами).

Обобщенные обратные матрицы Мура-Пенроуза [1–3] достаточно хорошо изучены [4–7] и нашли широкое применение при решении задач оптимального управления [8, 9], некорректных задач

[10], матричных уравнений [11], при сингулярном разложении [12] и др. Обобщенная обратная матрица Дразина и групповая обратная, с другой стороны, нашли применение в теории типа конечных цепей Маркова [13], в решении нестационарных линейных систем дифференциальных уравнений [14], в модели населения Лесли и ее обратной проекции [1, 15], а также при решении рекуррентных уравнений [1, 16] и др.

В работе [1] доказана теорема об определении псевдообратной матрицы Дразина с помощью серий скелетных разложений исходной матрицы. Распространив эту теорему на однопараметрические матрицы, получим:

$$A(t) = B_1(t)C_1(t), C_1(t)B_1(t) = B_2(t)C_2(t), \dots,$$

где $B_i(t)C_i(t)$ – скелетное разложение матрицы $C_{i-1}(t)B_{i-1}(t)$, $i=1,2,\dots$. В этой серии при некоторой $i=k$ либо $[C_k(t)B_k(t)]^{-1}$ будет определена, либо $B_k(t)C_k(t)=0$, при которой $\nexists [C_k(t)B_k(t)]^{-1}$ [1]. В этом случае об индексе матрицы можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \text{index}(A(t)) &= \\ &= \begin{cases} k, & \text{если } \exists [C_k(t)B_k(t)]^{-1}, \\ k+1, & \text{если } C_k(t)B_k(t) = 0 \Leftrightarrow \nexists [C_k(t)B_k(t)]^{-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

При этом обобщенная обратная Дразина представляется в следующем виде:

$$A^D(t) = \begin{cases} B_1(t)B_2(t)\cdots B_k(t)[C_k(t)B_k(t)]^{-(k+1)} \times \\ \times C_k(t)C_{k-1}(t)\cdots C_1(t), & \text{если } \exists (C_k(t)B_k(t))^{-1}, \\ 0, & \text{если } C_k(t)B_k(t) = 0 \Leftrightarrow \nexists [C_k(t)B_k(t)]^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что [1]

$$\begin{aligned} A^D(t) &= A^{n-1}(t)B(t)[C(t)B(t)]^{-2}C(t) = \\ &= B(t)[C(t)B(t)]^{-2}C(t)A^{n-1}(t), \end{aligned}$$

где $A(t) \neq 0$, а $A^n(t) = B(t)C(t)$ – скелетное разложение матрицы $A^n(t)$.

В частном случае, когда $\text{index}(A(t))=1$ и $A(t)=B(t)C(t)$ является скелетным разложением $A(t)$, групповая обратная $A^\#(t)$ равна [1]

$$A^\#(t) = A^D(t) = B(t)[C(t)B(t)]^{-2}C(t). \quad (1)$$

Математический аппарат

Допустим, что $A(t)$ – матрица с аналитическими элементами. Представим алгоритм вычисления скелетного разложения $A^n(t)$:

$$A^n(t) = B(t)C(t),$$

где $B(t)$ – нижнетреугольная матрица с размерами $n \times r$, а $C(t)$ – верхнетреугольная матрица с размерами $r \times n$.

Выберем линейно независимых столбцов матрицы $A(t)$ и составим матрицу $B(t)$. В этом случае столбцы матрицы $C(t)$ вычисляются следующим образом:

$$\downarrow c_j(t) = \overline{B}(t) \downarrow a_j^n(t), \quad j = \overline{1, n},$$

где $\downarrow c_j(t)$ и $\downarrow a_j^n(t)$ – j -е столбцы матриц $C(t)$ и $A^n(t)$ соответственно, а $\overline{B}(t)$ – обобщенная обратная матрица к $B(t)$ (при классификации обобщенных обратных матриц, представленной в работе [17], такая матрица называется (Q) -обратной).

Тогда алгоритм вычисления обобщенной обратной матрицы Дразина можно представить последовательностью следующих операций:

Шаг 1. Вычисляется n -ая степень матрицы $A(t)$, т. е. $A^n(t)$.

Шаг 2. Вычисляется (Q) -обратная матрица $\overline{B}(t)$ к матрице $B(t)$ с помощью алгоритма, представленного в работе [17].

Шаг 3. Вычисляется матрица $C(t)$ с помощью соотношений

$$\downarrow c_j(t) = \overline{B}(t) \downarrow a_j^n(t), \quad \forall j = \overline{1, n},$$

где $\downarrow c_j(t)$ и $\downarrow a_j^n(t)$ – j -е столбцы матриц $C(t)$ и $A^n(t)$ соответственно.

Шаг 4. Обозначив $X(t) = C(t)B(t)$, вычисляется обратная матрица $X^{-1}(t)$.

Шаг 5. Вычисляется обобщенная обратная матрица Дразина $A^D(t)$ в виде разложения

$$A^D(t) = A^{n-1}(t)B(t)X^{-2}(t)C(t).$$

Теперь рассмотрим Д-аналог метода определения обобщенной обратной матрицы Дразина. С учетом приведенных соотношений алгоритм определения обобщенной обратной матрицы Дразина в области дифференциальных преобразований [18] будет выглядеть следующим образом:

Шаг 1. Вычисляются матричные дискреты

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \sqsubseteq$$

$$\sqsubseteq A(t) = \aleph_1(t, t_v, H, A(K)),$$

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K B(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \sqsubseteq$$

$$\sqsubseteq B(t) = \aleph_1(t, t_v, H, B(K)),$$

$$A^n(K) = A^{n-1}(K) * A(K) = \sum_{l=0}^K A^{n-1}(l) A(K-l),$$

где $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; $A(K)$, $B(K)$ и $A^n(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ – матричные дискреты матричных оригиналов $A(t)$, $B(t)$ и $A^n(t)$ (прямые дифференциальные преобразования), H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации, $\aleph_1(t, t_v, H, A(K))$, $\aleph_2(t, t_v, H, B(K))$ – обратные дифференциальные преобразования, восстанавливающие оригиналы – матрицы $A(t)$ и $B(t)$ соответственно, символ $*$ – знак Т-умножения (свертки), а символ $\sqsubseteq$ – знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [18].

Шаг 2. Вычисляются матричные дискреты $\overline{B}(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ с помощью алгоритма, представленного в работе [17].

Шаг 3. Вычисляются матричные дискреты $C(K)$, для которых

$$\downarrow c_j(K) = \overline{B}(K) * \downarrow a_j^n(K) = \sum_{l=0}^K \overline{B}(l) \downarrow a_j^n(K-l),$$

$$K = \overline{0, \infty}, \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\downarrow c_j(K)$ и $\downarrow a_j^n(K)$ – j -е столбцы матричных дискрет $C(K)$ и $A^n(K)$ соответственно.

Шаг 4. Обозначив $X(t) = C(t)B(t)$, вычисляются матричные дискреты $X^{(-1)}(K)$ с помощью алгоритма, предложенного в работе [19] (заметим, что $X^{(-1)}(K)$ – K -я матричная дискрета обратной матрицы $X^{-1}(t)$, а не обратная матрица K -й матричной дискреты $X(K)$).

Шаг 5. Вычисляются матричные дискреты $A^D(K)$ обобщенной обратной матрицы Дразина $A^D(t)$:

$$A^D(K) = A^{n-1}(K) * B(K) * X^{(-2)}(K) * C(K). \quad (3)$$

Далее, имея матричные дискреты (3), в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием $\aleph(\bullet)$ восстанавливается оригинал – обобщенная обратная матрица Дразина $A^D(t)$.

Пример. Допустим, имеем однопараметрическую матрицу

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & (t^2 - 2) & (3t - t^2) \\ -t & 2t & -3t \\ 0 & (t^2 + 2t - 2) & -t^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

Можно легко убедиться, что ранг матрицы $A(t)$ равен 2, ибо каждый элемент ее третьей строки равен сумме соответствующих элементов первых двух строк, а также, что индекс матрицы $k = \text{index}(A(t)) = 1$, так как $\text{rank}(A^2(t)) = \text{rank}(A(t)) = 2$. Следовательно, вычисляется групповая матрица $A^D(t) = A^*(t)$ с помощью упрощенного соотношения (1). Выбирается матрица $B(t)$:

$$B(t) = \begin{bmatrix} t & (t^2 - 2) \\ -t & 2t \\ 0 & (t^2 + 2t - 2) \end{bmatrix}.$$

Вычисляются следующие матричные дискреты при $t_v = -1, H=1, K=10$:

$$A(0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}, A(1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A(K) = [0], K = \overline{3, \infty};$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B(K) = [0], K = \overline{3, \infty}.$$

С помощью алгоритма, представленного в работе [17], вычисляются матричные дискреты $\bar{B}(K)$ (Q)-обратной матрицы $\bar{B}(t)$:

$$\bar{B}(0) = \begin{bmatrix} -0,667 & 0,333 & 0 \\ -0,333 & -0,333 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(2) = \begin{bmatrix} -0,222 & 0,778 & 0 \\ -0,111 & -0,111 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(4) = \begin{bmatrix} -0,074 & 0,926 & 0 \\ -0,037 & -0,037 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(6) = \begin{bmatrix} -0,025 & 0,975 & 0 \\ -0,012 & -0,012 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(8) = \begin{bmatrix} -0,008 & 0,992 & 0 \\ -0,004 & -0,004 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(10) = \begin{bmatrix} -0,027 & 0,997 & 0 \\ -0,001 & -0,001 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ при } K = 1, 3, 5, 7, 9.$$

Далее вычисляются матричные дискреты $C(K)$ с помощью (2) (представлены только первые 4 матричные дискреты):

$$C(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3,667 \\ 0 & 1 & 0,333 \end{bmatrix}, C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,333 \\ 0 & 0 & -0,667 \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,889 \\ 0 & 0 & 0,444 \end{bmatrix}, C(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,444 \\ 0 & 0 & -0,222 \end{bmatrix}.$$

Согласно шагу 4, вычисляются матричные дискреты $X^{(-1)}(K)$ (представлены только первые 4 матричные дискреты):

$$X^{(-1)}(0) = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,8 \\ -0,067 & -0,067 \end{bmatrix},$$

$$X^{(-1)}(1) = \begin{bmatrix} -0,013 & 0,987 \\ -0,027 & -0,027 \end{bmatrix},$$

$$X^{(-1)}(2) = \begin{bmatrix} -0,019 & 0,981 \\ -0,015 & -0,015 \end{bmatrix},$$

$$X^{(-1)}(3) = \begin{bmatrix} -0,008 & 0,992 \\ -0,008 & -0,008 \end{bmatrix}.$$

Вычисляются матричные дискреты $A^D(K)$ обобщенной обратной матрицы Дразина $A^D(t)$ с помощью свертки (3) (представлены только первые 4 матричные дискреты):

$$A^D(0) = \begin{bmatrix} -0,0044 & 0,2622 & 0,0711 \\ -0,04889 & -0,1156 & -0,2178 \\ -0,05333 & 0,1467 & -0,1467 \end{bmatrix},$$

$$A^D(1) = \begin{bmatrix} 0,0231 & 0,2631 & 0,0035 \\ -0,0524 & -0,0124 & -0,0542 \\ -0,0293 & 0,2507 & -0,0506 \end{bmatrix},$$

$$A^D(2) = \begin{bmatrix} 0,0527 & 0,2524 & 0,0098 \\ -0,0095 & 0,002 & -0,0509 \\ -0,0043 & 0,2544 & -0,041 \end{bmatrix},$$

$$A^D(3) = \begin{bmatrix} 0,0384 & 0,252 & 0,004 \\ -0,008 & -0,0008 & -0,0232 \\ -0,0042 & 0,2512 & -0,0192 \end{bmatrix}.$$

Не вдаваясь в подробности, приведем окончательные результаты: на рисунке (а-и) представлены графики элементов обобщенной обратной матрицы Дразина $A^D(t)$ и оригинала, полученного с учетом вышеприведенных матричных дискрет с помощью дифференциально-падеевских преобразований [18] при $t_v = -1, H=1, K=0,10$. На всех рисунках сплошные линии соответствуют аналитическому решению, а пунктирные – ДП-аналогу.

Замечание. Как видно из рисунка (а-и), все элементы матрицы Дразина обладают горизонтальными и вертикальными асимптотами. Картина вертикальных асимптот обычно наблюдается при определении различных однопараметрических обобщенных обратных матриц из за вырожденно-

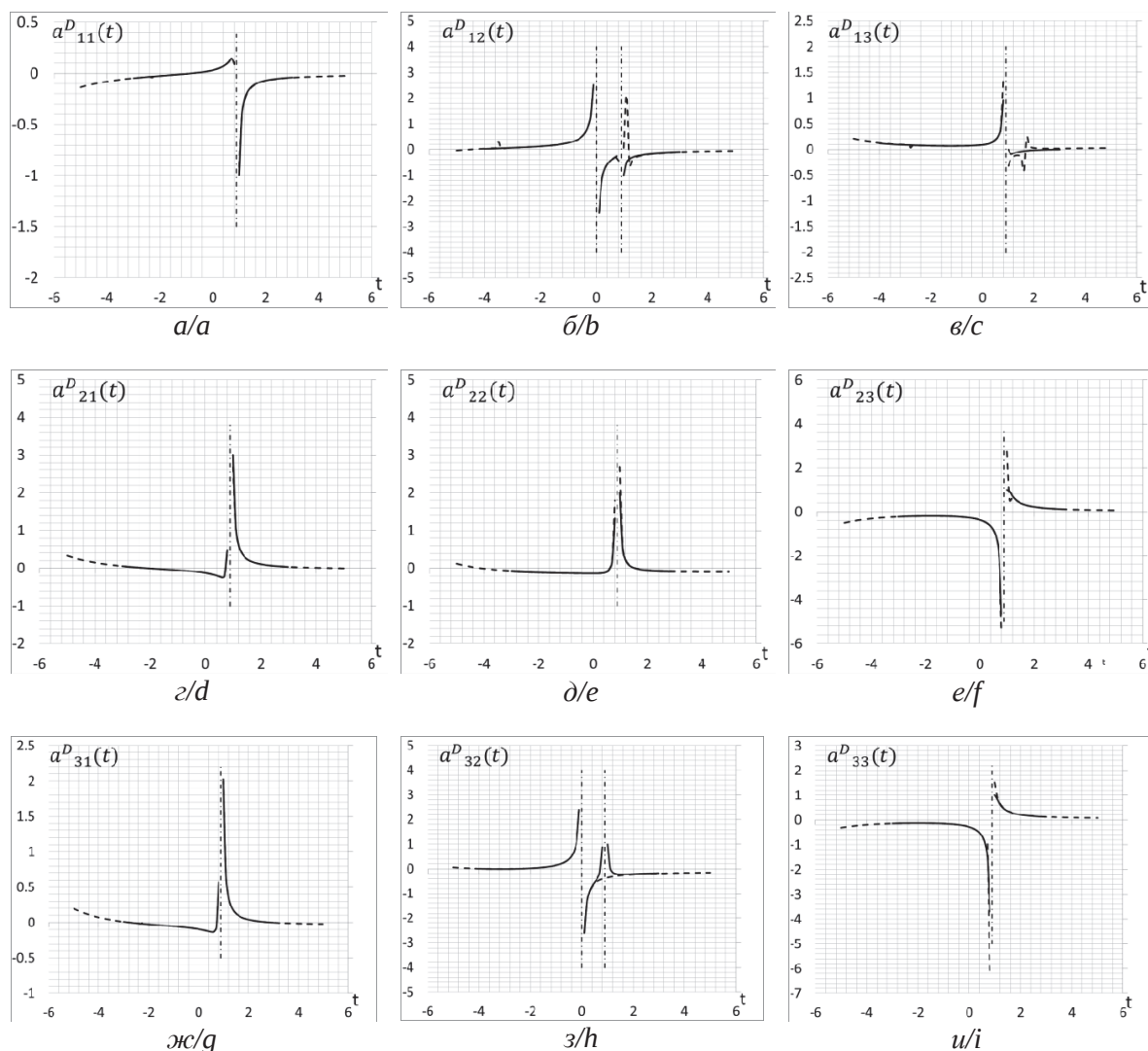


Рисунок. а-и) Временные зависимости элементов $a_{ij}^D(t)$ при $t_v = -1$, $H=1$, $K=\overline{0,10}$

Figure. а-и) Time dependency of elements $a_{ij}^D(t)$ at $t_v = -1$, $H=1$, $K=\overline{0,10}$

сти некоторых матриц, входящих в их аналитические выражения. В конкретном случае $\det(X(t))=0$, $X(t)=C(t)B(t)$, точки $t=-4+2\sqrt{6}$ и $t=-4-2\sqrt{6}$ являются точками вертикальных асимптот для всех элементов матрицы $A^D(t)$, а точка $t=0$ – точкой дополнительных вертикальных асимптот для элементов $a_{12}^D(t)$ и $a_{32}^D(t)$ матрицы $A^D(t)$. Поэтому для обеспечения большей точности вычислений при восстановлении соответствующих оригиналов-элементов матрицы $A^D(t)$ были использованы обратные дифференциально-падеевские преобразования [18], положительные качества которых в рассматриваемом контексте достаточно хорошо известны [7]. Что же касается окончательного аналитического

представления $A^D(t)$, здесь оно не приведено из-за его достаточно высокой сложности (громоздкости).

Заключение

Предложен численно-аналитический метод определения однопараметрических обобщенных обратных матриц Дразина, который легко реализуем средствами современных информационных технологий [20, 21]. Представленные сравнительные характеристики решения одного модельного примера показывают, что метод обладает высокой вычислительной эффективностью и малой погрешностью вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized Inverses of Linear Transformations. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. – 292 p.
2. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. – NYC: Springer, 2003. – 435 p.
3. Светлаков А.А. Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 388 с.
4. Универсальный метод определения параметрических обобщенных обратных матриц / С.О. Симонян, А.Г. Аветисян, А.С. Симонян, В.Р. Авиный // Вестник ГИУА. Сер. Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2012. – Вып. 15. – № 2. – С. 9–19.
5. Бадалян Л.А. Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Ереван, 2007. – 24 с.
6. Симонян С.О. Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц // Известия Томского политехнического университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – Т. 323. – № 5. – С. 10–15.
7. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.
8. Lewis F.L., Vrabie D., Syrmos V.L. Optimal Control. 3rd edition. – Hoboken: Wiley, 2012. – 552 p.
9. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
10. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 335 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
12. Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. – NYC: Springer, 2011. – 236 p.
13. Markov Chains: Models, Algorithms and Applications. 2nd edition / W.K. Ching, X. Huang, M.K. Ng, T.K. Siu. – NYC: Springer, 2013. – 243 p.
14. Schroers B.J. Ordinary Differential Equations: A Practical Guide. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 128 p.
15. Williams G. Linear Algebra with Applications. 7th edition. – Burlington: Jones & Bartlett Learning, 2009. – 532 p.
16. Haghighi A.M., Mishev D.P. Difference and Differential Equations with Applications in Queuing Theory. – Hoboken: Wiley, 2013. – 424 p.
17. Симонян С.О., Аслабян Г.А. Метод определения параметрических (B)- и (Q)-обобщенно-обратных матриц // Вестник ГИУА. Серия Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2013. – Вып. 16. – № 2. – С. 33–42.
18. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
19. Симонян С.О., Тамазян М.Д. Д-аналог L(t)U(t) разложения для обращения неавтономных матриц // Вестник ГИУА. Серия Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2012. – Вып. 15. – № 1. – С. 35–41.
20. Stroustrup B. The C++ Programming Language. 4th edition. – Boston: Addison-Wesley Professional, 2013. – 1368 p.
21. The MathWorks, Inc., MATLAB The language of technical programming. Using MATLAB Graphics, Version 7.

Поступила 21.06.2014 г.

UDC 621.52+511.52

D-ANALOGUE OF AN ALGORITHM FOR DETERMINING SINGLE-PARAMETRIC DRAZIN GENERALIZED INVERSE MATRIX BASED ON MATRIX FULL RANK FACTORIZATION

Hamlet A. Aslanyan,

State Engineering University of Armenia (Polytechnic), 105, Teryan street, Yerevan, 0009, Armenia. E-mail: hamaaslanyan@gmail.com

Sargis H. Simonyan,

Dr. Sc., State Engineering University of Armenia (Polytechnic), 105, Teryan street, Yerevan, 0009, Armenia. E-mail: ssimonyan@seua.am

The urgency of the research is caused by the wide application of Drazin generalized inverse matrix in the theory of finite Markov chains, in solving linear shifting system of differential equations, difference equations, problems of optimal control of dynamic systems; in several aspects of automated control systems, etc.

The main aim of the study is to develop an algorithm for finding matrix discretizes of single-parametric Drazin generalized inverse matrix in the field of differential transformations and restoring the original using reverse D-transformations.

The methods used in the study: theory of numerical Drazin pseudoinverse matrices, theory of generalized parametric inverse matrices, matrix full rank factorization, direct and reverse differential transformations, linear transformations of vector space, linear algebra, numerical calculations of matrix discretizes using MATLAB ver. R2011b software package.

The results: The paper introduces rather simple numerical-analytical method for determining Drazin single-parametric generalized inverse matrix which can be easily implemented by means of contemporary information technologies. The illustration of the method by a single sample example for determining a special case of Drazin generalized inverse matrix – group inverse matrix, proved its computational efficiency and low computational error ratio.

Key words:

Single-parametric Drazin generalized inverse matrix, full rank factorization of the matrix, differential transformations, information technologies.

REFERENCES

1. Campbell S.L., Meyer C.D. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. 292 p.
2. Ben-Israel A., Greville T.N.E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. NYC, Springer, 2003. 435 p.
3. Svetlakov A.A. *Obobshchennye obratnye matritsy: nekotorye vo-prosy teorii i primeneniya v zadachakh avtomatizatsii upravleni-ya protsessami* [Generalized inverse matrices: several aspects of the theory and its application in problems of process control auto-mation]. Tomsk, NTL Publ., 2003. 388 p.
4. Simonyan S.H., Avetisyan A.G., Simonyan A.S., Avinyan V.R. Universalny metod opredeleniya parametricheskikh obobshchen-nykh obratnykh matrits [Universal Method for Determining Mo-re-Penrouse's Parametric Generalized Inverse Matrices]. *Vest-nik GIUA. Seriya informatsionnye tekhnologii, elektronika, ra-diotekhnika – Proceedings of State Engineering University of Ar-menian. Series Information Technologies, Electronics, Radio Engi-neering*, 2012, Iss. 15, no. 2, pp. 9–19.
5. Badalyan L.A. *Razrabotka metodov opredeleniya pseudoobrat-nykh nestatsionarnykh matrits i avtomatizatsiya vychislitelnykh protsedur. Avtoreferat diss. kand. tekhn. nauk* [Development of methods to determine pseudoinverse nonsteady matrices and computer procedure automation. Cand. Diss. Abstract]. Yerevan, 2007. 24 p.
6. Simonyan S.H. Parallelnye vychislitelnye metody opredeleniya parametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits [Parallel Computing Methods to Determine Parametric Generalized Inverse Matrices]. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 5, pp. 10–15.
7. Simonyan S.H., Avetisyan A.G. *Prikladnaya teoriya defferentsi-alnykh preobrazovany* [Applied Theory of Differential Trans-forms]. Yerevan, Chartaraget Publ., 2010. 361 p.
8. Lewis F.L., Vrabie D., Syrmos V.L. *Optimal Control*. Hoboken, Wiley, 2012. 3rd ed., 552 p.
9. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchen-ko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 392 p.
10. Beklemishev D.V. *Dopolnitelnye glavy lineynoy algebry* [Additi-onal Chapters of Linear Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 335 p.
11. Gantmakher F.R. *Teoriya Matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Fiz-matlit Publ., 2010. 560 p.
12. Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. *Projection Matrices, Generaliz-ed Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. NYC, Springer, 2011. 236 p.
13. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K. *Markov Chains: Mo-dels, Algorithms and Applications*. NYC, Springer, 2013. 2nd ed., 243 p.
14. Schroers B.J. *Ordinary Differential Equations: A Practical Gui-de*. Cambridge, Cambridge University Press, 2011. 128 p.
15. Williams G. *Linear Algebra with Applications*. Burlington, Jones & Bartlett Learning, 2009. 7th ed., 532 p.
16. Haghighi A.M., Mishev D.P. *Difference and Differential Equa-tions with Applications in Queueing Theory*. Hoboken, Wiley, 2013. 424 p.
17. Simonyan S.H., Aslanyan H.A. Metod opredeleniya paramet-richeskikh (B)- i (Q)-obobshchenno-obratnykh matrits [Method For Determining (B)- and (Q)- Types of Parametric Generalized Inverses]. *Vestnik GIUA. Seriya informatsionnye tekhnologii, elektronika, radiotekhnika – Proceedings of State Engineering University of Armenia. Series Information Technologies, Electro-nics, Radio Engineering*, 2013, Iss. 16, no. 2, pp. 33–42.
18. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya funktsiy i uravne-niy* [Differential transformations of functions and equations]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984. 420 p.
19. Simonyan S.H., Tamazyan M.J. D-analog $L(t)U(t)$ razlozheniya dlya obrashcheniya neavtonomnykh matrits [D-Analogue of $L(t)U(t)$ for Inversion of Nonautonomous Matrices]. *Vestnik GIUA. Seriya informatsionnye tekhnologii, elektronika, radiotekhnika – Proceedings of State Engineering University of Armenia. Series Information Technologies, Electronics, Radio Engineering*, 2012, Iss. 15, no. 1, pp. 35–41.
20. Stroustrup B. *The C++ Programming Language*. Boston, Addi-son-Wesley Professional, 2013. 4th ed., 1368 p.
21. *The MathWorks, Inc., MATLAB The language of technical pro-gramming. Using MATLAB Graphics, Version 7*.

Received: 21 June 2014.