УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|GI|1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВТОРОГО ПОРЯДКА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

Назаров Анатолий Андреевич,
д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой теории вероятности и математической статистики Факультета прикладной математики и кибернетики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет», Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Фёдорова Екатерина Александровна,
аспирант Факультета прикладной математики и кибернетики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет», Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: moiskate@mail.ru

Системы массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-системы), моделирующие реальные процессы, возникающие в телекоммуникационных системах, являются новым, активно развивающимся направлением теории массового обслуживания. Однако аналитические формулы получены лишь для систем с входящим простейшим потоком. Большинство же мировых ученых по теории массового обслуживания используют численные методы исследования RQ-систем с входящими не простейшими потоками (например, MMPP, MAP, BMAP). Такие методы имеют естественную границу применимости, связанную с решением систем уравнений большой размерности (система может принимать от 1000 до 500 тыс. состояний). Таким образом, ***актуальность исследования*** *обусловлена необходимостью разработки аналитических методов изучения RQ-систем с входящим MMPP-потоком.*

Цель работы: *найти асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов в RQ-системе MMPP|GI|1 для достаточно большого числа состояний системы.*

Методы исследования: *метод асимптотического анализа второго порядка в условии большой загрузки.*

Результаты. *Получена асимптотическая (второго порядка) характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов в RQ-системе MMPP|GI|1. Приведена формула для построения асимптотического распределения вероятностей. Проведенный численный анализ результатов показал, что предлагаемый метод может быть применен для значений загрузки ρ>0,8, тогда как метод асимптотического анализа первого порядка может применяться лишь при загрузке ρ>0,95. С помощью полученного распределения можно вычислить наиболее важные характеристики системы (например, среднее число заявок в источнике повторных вызовов), которые могут быть использованы при моделировании или оптимизации функционирования реальных экономических и технических систем.*

Ключевые слова:
RQ-система, источник повторных вызовов, MMPP-поток, большая загрузка, метод асимптотического анализа второго порядка.

Введение

В теории массового обслуживания до середины XX в. выделяли 2 класса систем – системы с ожиданием и системы с потерями. Однако при появлении и развитии информационных технологий было показано, что процессы, возникающие в реальных системах передачи данных, сетях сотовой связи и др., не могут моделироваться существующими классами систем массового обслуживания. Это привело к тому, что стали выделять новый класс – системы с повторными вызовами или RQ-системы (Retrial Queueing Systems [1–3]). Отличие таких систем от классических систем массового обслуживания (СМО) состоит в том, что заявки, обнаружившие прибор занятым, не покидают систему или встают в очередь, а идут в источник повторных вызовов, откуда после некоторой случайной задержки снова обращаются к прибору для обслуживания.

Большинство первых работ было посвящено практическим задачам, возникающим в телекоммуникационных системах. Первые работы по RQ-системам были опубликованы Р.И. Вилкинсоном [4] и Дж. Коэном [5]. Описание систем и влияние эффекта повтора было проведено Г. Гоштони [6], А. Элдином [7] и Дж. Л. Джониным [8].

Наиболее полное и глубокое исследование систем с повторными вызовами приведено в монографиях Г.И. Фалина, Дж. Артолехо, А. Гомез-Коррела и Дж. Тэмплетона [1–3].

Большая часть исследований RQ-систем реализуются численно или с помощью имитационного моделирования [9–11]. Аналитические методы получены только в тех случаях, когда модели потока и дисциплина обслуживания относительно просты (например, пуассоновский поток и экспоненциальное распределение закона обслуживания) [1].

RQ-системы с входящими MAP и BMAP-потоками исследуются белорусскими учеными: В.И. Клименок и А.Н. Дудиным [12], которые используют преимущественно матричные методы исследования. Кроме того, матричными методами исследования RQ-систем пользуются такие ученые, как М.Ф. Ньютс, Дж. Арталехо, А. Гомез-Коррел [13], Дж.Е. Даймонд, А.С. Альфа [14] и др.

Исследования RQ-систем в условии большой и малой загрузки проводились Г.И. Фалиным [15], А. Айссани [16] и В.В. Анисимовым [17]. Кроме того, работы С.Н. Степанова посвящены исследованиям систем в условии экстремальной загрузки (интенсивность входящего потока заявок стремиться к бесконечности или к нулю) [18].

В предыдущих исследованиях [19, 20] для однолинейных RQ-систем нами был предложен метод асимптотического анализа в условии большой загрузки. Однако было показано, что этот метод имеет достаточно узкую область применимости: при загрузке ρ>0,95 расстояние Колмогорова Δ≤0,05. В связи с этим было предложено увеличить точность аппроксимации в виде получения асимптотики более высокого порядка. При этом стоит отметить, что данные результаты не вытекают из систем асимптотических уравнений, полученных ранее [19, 20]. Таким образом, для получения асимптотики 2-го порядка необходимо проводить заново исследование рассматриваемой системы.

Математическая модель

Рассмотрим (рисунок) однолинейную RQ-систему с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает MMPP-поток заявок с матрицей условных интенсивностей $\rho\boldsymbol{\lambda}$, где параметр ρ и значения элементов матрицы $\boldsymbol{\lambda}$ будут определены ниже, и матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик цепи Маркова n (t), управляющей MMPP-потоком, время обслуживания каждой заявки имеет произвольную функцию распределения $B(x)$. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

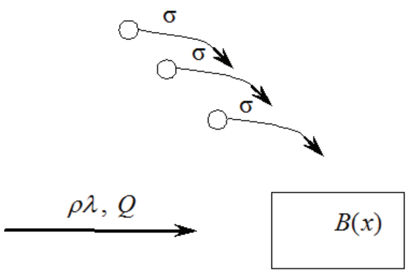

Рисунок. *RQ-система MMPP|GI|1*

Figure. *RQ-system MMPP|GI|1*

Обозначим вектор-столбец $\mathbf{R}$ – стационарное распределение вероятностей значения цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-потоком, которое определяется из следующей системы:

$$\begin{cases} \mathbf{RQ} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{RE} = 1, \end{cases}$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец; $\mathbf{0}$ – вектор-столбец с нулевыми элементами. Очевидно, что интенсивность входящего потока равна $\lambda=\mathbf{R}\cdot\rho\lambda\cdot\mathbf{E}$.

Пусть параметры системы таковы, что выполняется:

$$\mathbf{R}\cdot\lambda\cdot\mathbf{E} = 1/b, \qquad (1)$$

где b – среднее время обслуживания.

Тогда загрузка системы определяется как $\rho=\lambda b=\mathbf{R}\cdot\rho\lambda\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}$.

Для данной системы ставится задача найти распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Пусть $i(t)$ – процесс, характеризующий число заявок в ИПВ. Процесс $i(t)$ не является марковским. Однако его можно марковизировать путем введения дополнительных компонент: $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-потоком; $z(t)$ – оставшееся время обслуживания, а процесс $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом: $k(t)$={1, если прибор занят; 0, если свободен}.

Обозначим $P\{k(t)=0,n(t)=n,i(t)=i\}=P(0,n,i,t)$ вероятность того, что прибор свободен в момент времени t, управляющая MMPP-потоком цепь Маркова находится в состоянии n и в ИПВ находится i заявок; а $P\{k(t)=1,n(t)=n,i(t)=i,z(t)<z\}=P\ (1,n,i,z,t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор занят, управляющая MMPP-потоком цепь Маркова – в состоянии n, в источнике повторных вызовов находится i заявок, и оставшееся время обслуживания меньше z.

Очевидно, что процесс $\{k(t),i(t),n(t),z(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Для получения распределения вероятностей $\{P(0,n,i,t);\ P(1,n,i,z,t)\}$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,n,i,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(1,n,i,0,t)}{\partial z} - \\ -P(0,n,i,t)(\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn}) + \sum\limits_{v\neq n} P(0,v,i,t)q_{vn}, \\ \dfrac{\partial P(1,n,i,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(1,n,i,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,n,i,0,t)}{\partial z} + \\ +(-\rho\lambda_n + q_{nn})P(1,n,i,z,t) + \\ +\rho\lambda_n P(0,n,i,t)B(z) + \rho\lambda_n P(1,n,i-1,z,t) + \\ +\sigma(i+1)\cdot P(0,n,i+1,t)B(z) + \sum\limits_{v\neq n} q_{vn}P(1,v,i,z,t). \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим

$$\mathbf{P}(0,i) = \{P(0,1,i), P(0,2,i), \ldots, P(0,\ N,\ i)\}$$

и

$$\mathbf{P}(1,i,z) = \{P(1,1,i,z), P(1,2,i,z), \ldots, P(1,\ N,\ i,\ z)\},$$

где в стационарном режиме

$$\lim_{t\to\infty} P(k,i,n,t) = P(k,i,n).$$

Тогда система (2) примет матричный вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathbf{P}(1,i,0)}{\partial z}-\mathbf{P}(0,i)(\rho\boldsymbol{\lambda}+i\sigma\mathbf{I})+\mathbf{P}(0,i)\mathbf{Q}=0,\\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,i,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathbf{P}(1,i,0)}{\partial z}-\rho\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}(1,i,z)+\\ +\rho\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}(0,i)B(z)+\rho\boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}(1,i-1,z)+\\ +\sigma(i+1)\mathbf{P}(0,i+1)B(z)+\mathbf{P}(1,i,z)\mathbf{Q}=0,\end{cases} \qquad (3)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Перейдем в системе (3) к частичным характеристическим функциям:

$$\mathbf{H}(1,u,z)=\sum_i e^{jui}\mathbf{P}(1,i,z) \ \text{ и } \ \mathbf{H}(0,u)=\sum_i e^{jui}\mathbf{P}(0,i),$$

где j=$\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда система уравнений (3) для характеристических функций перепишется в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathbf{H}(1,u,0)}{\partial z}+\mathbf{H}(0,u)(\mathbf{Q}-\rho\boldsymbol{\lambda})+j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u}=0,\\ \dfrac{\partial \mathbf{H}(1,u,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathbf{H}(1,u,0)}{\partial z}+\mathbf{H}(1,u,z)\mathbf{Q}+\\ +\mathbf{H}(0,u)\rho\boldsymbol{\lambda}B(z)+(e^{ju}-1)\mathbf{H}(1,u,z)\rho\boldsymbol{\lambda}-\\ -e^{-ju}j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u}B(z)=0.\end{cases} \qquad (4)$$

Решим систему (4) методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, характеризующемся предельным соотношением $\rho\uparrow 1$. Или, введя бесконечно малую величину ε=1−ρ>0, условие большой загрузки может быть описано условием: $\varepsilon\downarrow 0$.

Метод асимптотического анализа второго порядка в условии большой загрузки

В системе (4) выполним замены $u=\varepsilon w$, $\mathbf{H}(0,u)=\varepsilon\mathbf{G}(w,\varepsilon)$, $\mathbf{H}(1,u,z)=\mathbf{F}(w,\varepsilon,z)$. Получим:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathbf{F}(w,\varepsilon,0)}{\partial z}+\varepsilon\mathbf{G}(w,\varepsilon)(\mathbf{Q}-(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda})+\\ +j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{G}(w,\varepsilon)}{\partial w}=\mathbf{0},\\ \dfrac{\partial \mathbf{F}(w,\varepsilon,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathbf{F}(w,\varepsilon,0)}{\partial z}+\mathbf{F}(w,\varepsilon,z)\mathbf{Q}+\\ +(e^{jw\varepsilon}-1)(1-\varepsilon)\mathbf{F}(w,\varepsilon,z)\cdot\boldsymbol{\lambda}+\\ +(1-\varepsilon)\varepsilon\mathbf{G}(w,\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}B(z)-\\ -e^{-jw\varepsilon}j\sigma\dfrac{\partial \mathbf{G}(w,\varepsilon)}{\partial w}B(z)=\mathbf{0}.\end{cases} \qquad (5)$$

Для получения асимптотики второго порядка необходимо рассмотреть следующие разложения функций:

$$\mathbf{G}(w,\varepsilon)=\mathbf{G}(w)+\varepsilon\cdot\mathbf{g}(w)+\varepsilon^2\cdot\mathbf{g}_2(w)+O(\varepsilon^3), \qquad (6)$$

$$\mathbf{F}(w,\varepsilon,z)=$$

$$=\mathbf{F}(w,z)+\varepsilon\cdot\mathbf{f}(w,z)+\varepsilon^2\cdot\mathbf{f}_2(w,z)+O(\varepsilon^3), \qquad (7)$$

где $O(\varepsilon^3)$ – бесконечно малая величина порядка ε^3.

Введем обозначения

$$\mathbf{F}(w)=\lim_{z\to\infty}\mathbf{F}(w,z) \ \text{ и } \ \mathbf{f}(w)=\lim_{z\to\infty}\mathbf{f}(w,z).$$

Тогда асимптотической характеристической функцией второго порядка будем называть функцию

$$h_2(u)=\mathbf{F}\left(\frac{u}{1-\rho}\right)\mathbf{E}+$$

$$+(1-\rho)\left\{\mathbf{G}\left(\frac{u}{1-\rho}\right)\mathbf{E}+\mathbf{f}\left(\frac{u}{1-\rho}\right)\mathbf{E}\right\},$$

где функции $\mathbf{F}(w)$, $\mathbf{G}(w)$ и (w) определяются разложениями (6) и (7), а параметр ε=1−ρ.

Вид функции $h_2(u)$ определяется следующей теоремой.

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция второго порядка имеет вид

$$h_2(u)=\left(1-\frac{ju}{(1-\rho)\beta}\right)^{-\alpha}\times$$

$$\times\left\{1+(1-\rho)\left[\frac{ju}{1-\rho}\mathbf{VE}-j\int_0^{\frac{u}{1-\rho}}\frac{a(y)}{(jy-\beta)}dy\right]\right\}, \qquad (8)$$

где

$$\alpha=1+\frac{\beta}{\sigma b},\ \beta=\left[b\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\frac{1}{b}\mathbf{VE}+\frac{b_2}{2b^3}\right)\right]^{-1}, \qquad (9)$$

в котором вектор $\mathbf{V}$ является решением неоднородной системы $\mathbf{VQ}=\mathbf{R}\left(\dfrac{1}{b}\mathbf{I}-\boldsymbol{\lambda}\right)$, функция $a(w)$ определяется выражением:

$$a(w)=-\frac{2}{\beta}-\mathbf{V}E-\frac{2}{\sigma b}-2\eta\frac{jw}{b}+\left(1-\frac{jw}{\beta}\right)^{-1}\times$$

$$\times\frac{\alpha}{\beta}\left[jw\left(2-\frac{2}{\beta}-\mathbf{V}E\right)-(jw)^2\left(\frac{\delta}{b}-\frac{1}{2}+\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{VE}\right)\right],$$

где параметры α и β определяются равенствами (9), постоянные δ и η равны:

$$\delta=\left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{VE}+\frac{b_2}{2b^2}\right)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)-$$

$$-\frac{1}{b}\left(\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2{}^2}{4b^2}\right)+b\mathbf{V}_1E-b^2\mathbf{V}_1\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E},$$

$$\eta=\delta-\frac{b}{2}+\frac{b_2}{2b}+b\mathbf{VE}-\frac{b}{\beta}-$$

$$-\frac{1}{2\sigma}\mathbf{VE}-\frac{1}{\sigma\beta}+\frac{1}{2\sigma}+\frac{b_2}{4\sigma b^2},$$

а вектор $\mathbf{V}_1$ является решением неоднородной системы

$$\mathbf{V}_1\mathbf{Q}=\frac{1}{b\beta}\mathbf{R}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{b}\mathbf{R}\right)-$$

$$-\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{b}\mathbf{V}\right)+\frac{1}{b^2}\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)\mathbf{R}.$$

Доказательство

В системе (5) совершим предельный переход при $\varepsilon\downarrow 0$, обозначив

$$\mathbf{F}(w,z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(w,\varepsilon,z) \text{ и } \mathbf{G}(w)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{G}(w,\varepsilon).$$

Тогда справедливо следующее:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{F}(w,0)}{\partial z}+j\sigma\dfrac{d\mathbf{G}(w)}{dw}=0,\\ \dfrac{\partial\mathbf{F}(w,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathbf{F}(w,0)}{\partial z}(1-B(z))+\mathbf{F}(w,z)\mathbf{Q}=0.\end{cases}\quad(10)$$

Подставим разложения (6), (7) в систему (5), и в результате несложных преобразований можно записать следующую систему дифференциальных уравнения при одинаковых степенях ε:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}+\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda})+j\sigma\dfrac{d\mathbf{g}(w)}{dw}=0,\\ \dfrac{\partial\mathbf{f}(w,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}+\mathbf{f}(w,z)\mathbf{Q}+\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}B(z)+\\ +jw\mathbf{F}(w,z)\boldsymbol{\lambda}+jwj\sigma\dfrac{d\mathbf{G}(w)}{dw}B(z)-\\ -j\sigma\dfrac{d\mathbf{g}(w)}{dw}B(z)=0,\\ \dfrac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}+\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{g}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda})+j\sigma\dfrac{d\mathbf{g}_2(w)}{dw}=0,\\ \dfrac{\partial\mathbf{f}_2(w,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}+\mathbf{f}_2(w,z)\mathbf{Q}-\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}B(z)+\\ +\mathbf{g}(w)\boldsymbol{\lambda}B(z)-\left(jw-\dfrac{(jw)^2}{2}\right)\mathbf{F}(w,z)\boldsymbol{\lambda}+\\ +jw\mathbf{f}(w,z)\boldsymbol{\lambda}-\dfrac{(jw)^2}{2}j\sigma\dfrac{d\mathbf{G}(w)}{dw}B(z)+\\ +jwj\sigma\dfrac{d\mathbf{g}(w)}{dw}B(z)-j\sigma\dfrac{d\mathbf{g}_2(w)}{dw}B(z)=0.\end{cases}\quad(11)$$

Для получения скалярных уравнений суммируем матричные уравнения системы (5), умножим полученное уравнение на единичный вектор-столбец и совершим предельный переход при $z\to\infty$, обозначив $\mathbf{F}(w,\varepsilon)=\lim_{z\to\infty}\mathbf{F}(w,\varepsilon,z)$

$$(1-\varepsilon)\mathbf{F}(w,\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+e^{-jw\varepsilon}j\sigma\frac{\partial\mathbf{G}(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{E}=0.$$

Подставим разложения (6), (7) и выпишем систему уравнений при одинаковых степенях ε:

$$\begin{cases}\mathbf{F}(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+j\sigma\dfrac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E}=0,\\ -\mathbf{F}(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+\mathbf{f}(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{E}-\\ -jwj\sigma\dfrac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E}+j\sigma\dfrac{d\mathbf{g}(w)}{dw}\mathbf{E}=0,\\ -\mathbf{f}(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+\mathbf{f}_2(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{E}+j\sigma\dfrac{(jw)^2}{2}\dfrac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E}-\\ -jwj\sigma\dfrac{d\mathbf{g}(w)}{dw}\mathbf{E}+j\sigma\dfrac{d\mathbf{g}_2(w)}{dw}\mathbf{E}=0.\end{cases}\quad(12)$$

Объединив (10), (11) и (12), получим систему шести матричных и трех скалярных дифференциальных асимптотических уравнений. Решение этой системы будем проводить в несколько этапов.

Этап 1. Будем искать $\mathbf{F}(w,z)$ в виде произведения:

$$\mathbf{F}(w,z)=\mathbf{R}\cdot A(z)\cdot\Phi(w).\quad(13)$$

Тогда из 2-го уравнения системы (10) можно записать:

$$A(z)=A'(0)\int_0^z(1-B(x))dx.$$

Найдем $A'(0)$. Так как $A(\infty)=1$, то $A'(0)=\dfrac{1}{b}$.

Тогда получаем:

Из 1-го уравнения системы (10) можно записать:

$$j\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}=-\frac{\partial\mathbf{F}(w,0)}{\partial z}=-\frac{1}{b}\mathbf{R}\cdot\Phi(w).\quad(14)$$

Из условия нормировки для функции $\mathbf{F}(w)\mathbf{E}$:$\mathbf{F}(0)\mathbf{E}=1$, поэтому несложно показать, что $\mathbf{G}(0)\mathbf{E}=0$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{G}(w)=\frac{j}{\sigma b}\mathbf{R}\int_0^w\Phi(v)dv.\quad(15)$$

Этап 2. Выразим из 1-го уравнения системы (11) $\mathbf{g}_2'(w)$:

$$j\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}=-\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}-\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda}).\quad(16)$$

Затем подставим (16) во 2-е уравнение (11). В результате несложных преобразований можно записать следующее равенство:

$$\frac{\partial\mathbf{f}(w,z)}{\partial z}-\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}(1-B(z))+\mathbf{f}(w,z)\mathbf{Q}+ +jw\mathbf{F}(w,z)\cdot\boldsymbol{\lambda}+jwj\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}B(z)+ +\mathbf{G}(w)\mathbf{Q}B(z)=0.\quad(17)$$

Перепишем уравнение (17) при условии $z\to\infty$.

$$\mathbf{f}(w)\mathbf{Q}+jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}+jwj\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}+\mathbf{G}(w)\mathbf{Q}=0.\quad(18)$$

Подставив в (18) выражения (13) и (14), получим

$$\{\mathbf{f}(w)+\mathbf{G}(w)\}\mathbf{Q}=jw\Phi(w)\left(\frac{1}{b}\mathbf{R}-\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}\right).$$

Пусть

$$\{\mathbf{G}(w)+\mathbf{f}(w)\}=jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}+\mathbf{R}\cdot\varphi(w),\quad(19)$$

где $\varphi(w)$ – неизвестная функция, а $\mathbf{V}$ – некоторый вектор, являющийся решением системы:

$$\mathbf{VQ}=\mathbf{R}\left(\frac{1}{b}\mathbf{I}-\boldsymbol{\lambda}\right).$$

Для того чтобы существовало решение такой системы, необходимо, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы $\mathbf{Q}$. Так как определитель $|\mathbf{Q}|=0$, то и ранг расширенной матрицы должен быть меньше размерности системы. Тогда достаточно выполнения следующего условия:

$$\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{b}\mathbf{R}\right)\mathbf{E}=0 \text{ или } \mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}E=\frac{1}{b},$$

что справедливо в силу (1).

Таким образом, из (19) можно записать:

$$\mathbf{f}(w)=jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}+\mathbf{R}\cdot\varphi(w)-\mathbf{G}(w). \tag{20}$$

Этап 3. Рассмотрим уравнение (17), умноженное на единичный вектор-столбец:

$$\frac{\partial\mathbf{f}(w,z)}{\partial z}\mathbf{E}-\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}(1-B(z))+$$
$$+jw\mathbf{F}(w,z)\cdot\boldsymbol{\lambda}E+jwj\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E}B(z)=0.$$

Учтем (13) и (14) и проинтегрируем последнее уравнение:

$$\mathbf{f}(w,z)\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}\int_0^z(1-B(x))dx-$$
$$-\frac{jw}{b}\Phi(w)\int_0^z(A(x)-B(x))dx. \tag{21}$$

Перепишем (21) при условии $z\to\infty$:

$$\mathbf{f}(w)\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}\int_0^\infty(1-B(x))dx-$$
$$-\frac{jw}{b}\Phi(w)\int_0^\infty(A(x)-B(x))dx. \tag{22}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^\infty(A(x)-B(x))dx=b-\frac{b_2}{2b}.$$

Тогда (22) перепишется в следующем виде:

$$\mathbf{f}(w)\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}b-\frac{jw}{b}\Phi(w)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right).$$

Отсюда

$$b\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}=\mathbf{f}(w)\mathbf{E}+\frac{jw}{b}\Phi(w)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right). \tag{23}$$

Тогда из уравнения (16) получим:

$$j\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}\mathbf{E}=$$
$$=-\frac{1}{b}\mathbf{f}(w)\mathbf{E}-\frac{jw}{b^2}\Phi(w)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)+\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}E. \tag{24}$$

В силу (23) и (24) очевидно, что выполняется:

$$b\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}=\mathbf{f}(w)+\frac{jw}{b}\Phi(w)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)\mathbf{R}, \tag{25}$$

$$j\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}=-\frac{1}{b}\mathbf{f}(w)-$$
$$-\frac{jw}{b^2}\Phi(w)(b-\frac{b_2}{2b})\mathbf{R}-\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda}). \tag{26}$$

Этап 4. Суммируем 1-е и 2-е уравнения системы (12):

$$\mathbf{f}(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+(1-jw)j\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E}+j\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}\mathbf{E}=0.$$

Подставим в это выражение полученные формулы (14), (20) и (24).

$$jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\frac{1}{b}jw\Phi(w)\cdot\mathbf{VE}+$$
$$+\frac{1}{b}\mathbf{G}(w)\mathbf{E}-\frac{1}{b}\Phi(w)+\frac{jw}{b^2}\cdot\Phi(w)\frac{b_2}{2b}=0.$$

Продифференцируем последнее выражение и подставим (20):

$$\Phi'(w)\left[jw\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}-\frac{jw}{b}\mathbf{VE}-\frac{1}{b}-\frac{jw}{b^2}\frac{b_2}{2b}\right]+$$
$$+j\Phi(w)\left[\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}-\frac{1}{b}\mathbf{VE}+\frac{1}{\sigma b^2}+\frac{1}{b^2}\frac{b_2}{2b}\right]=0. \tag{27}$$

Разделим левую и правую часть уравнения на выражение $\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\frac{1}{b}\mathbf{VE}+\frac{b_2}{2b^3}$ и введем обозначения:

$$\beta=\left[b\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\frac{1}{b}\mathbf{VE}+\frac{b_2}{2b^3}\right)\right]^{-1},\ \alpha=1+\frac{\beta}{\sigma b}.$$

Тогда формула (27) примет вид:

$$\Phi(w)\cdot j\alpha=\Phi'(w)\cdot[\beta-jw].$$

Решение такого уравнения имеет вид: $\Phi(w)=C[w+j\beta]^{-\alpha}$. Из условия нормировки можно получить, что значение постоянной C равно $C=[j\beta]^{\alpha}$. Тогда имеем:

$$\Phi(w)=\left(1-\frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha}, \tag{28}$$

где параметры α и β определяются выражением (9).

Возвращаясь к (13) и (15), получим вид искомых функций:

$$\begin{cases}\mathbf{F}(w)=\mathbf{R}\cdot\left(1-\dfrac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha},\\ \mathbf{G}(w)=\mathbf{R}\cdot\left(1-\dfrac{jw}{\beta}\right)\Phi(w).\end{cases} \tag{29}$$

Этап 5. Из 3-го уравнения системы (11) выразим $\mathbf{g}_2'(w)$:

$$j\sigma\frac{d\mathbf{g}_2(w)}{dw}=-\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}-\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{g}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda}). \tag{30}$$

Подставим выражение (30) в 4-е уравнение системы (11):

$$\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,z)}{\partial z}-\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\big(1-B(z)\big)+\mathbf{f}_2(w,z)\mathbf{Q}-$$
$$-\left(jw-\frac{(jw)^2}{2}\right)\mathbf{F}(w,z)\cdot\boldsymbol{\lambda}+jw\mathbf{f}(w,z)\cdot\boldsymbol{\lambda}-$$
$$-\frac{(jw)^2}{2}j\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}B(z)+jwj\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}B(z)+$$
$$+\mathbf{g}(w)\mathbf{Q}B(z)=0. \tag{31}$$

Совершим предельный переход при $z\to\infty$ и подставим выражения (16), (20), (25) и (29), получим:

$$\{\mathbf{f}_2(w)+\mathbf{g}(w)\}\mathbf{Q}= jw\Phi(w)\left[\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{R}\frac{1}{b}\right]-$$

$$-jw\varphi(w)(\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{b}\mathbf{R})+$$

$$+(jw)^2\Phi(w)\begin{bmatrix}\frac{1}{b\beta}\mathbf{R}-\frac{1}{2}(\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{b}\mathbf{R})-\\ -(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{b}\mathbf{V})+\frac{1}{b^2}(b-\frac{b_2}{2b})\mathbf{R}\end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{f}_2(w)+\mathbf{g}(w)=(jw)^2\Phi(w)\cdot\mathbf{V}_1-$$

$$-jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}+jw\varphi(w)\cdot\mathbf{V}+\mathbf{R}\cdot\varphi_2(w), \qquad (32)$$

где $\varphi_2(w)$ – неизвестная функция, а $\mathbf{V}$ – вектор, являющийся решением системы $\mathbf{VQ}=\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{R}\frac{1}{b}$, $\mathbf{V}_1$ – некоторый вектор, являющийся решением системы:

$$\mathbf{V}_1\mathbf{Q}=\frac{1}{b\beta}\mathbf{R}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{b}\mathbf{R}\right)-$$

$$-\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{b}\mathbf{V}\right)+\frac{1}{b^2}\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)\mathbf{R}.$$

Для того чтобы существовало решение такой системы, необходимо, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы $\mathbf{Q}$. Так как определитель $|\mathbf{Q}|=0$, то и ранг расширенной матрицы должен быть меньше размерности системы. Тогда достаточно выполнения следующего условия:

$$\frac{1}{b\beta}\mathbf{RE}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{b}\mathbf{R}\right)\mathbf{E}-$$

$$-\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{b}\mathbf{V}\right)\mathbf{E}+\frac{1}{b^2}\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)\mathbf{RE}=0.$$

Нетрудно показать, что это условие выполняется. Тогда из (32) следует, что

$$\mathbf{f}_2(w)=(jw)^2\Phi(w)\cdot\mathbf{V}_1-jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}+$$

$$+jw\varphi(w)\cdot\mathbf{V}+\mathbf{R}\cdot\varphi_2(w)-\mathbf{g}(w). \qquad (33)$$

Этап 6. Найдем вид функции $\mathbf{f}(w,z)$. Из выражения (21), нетрудно показать, что выполняется:

$$\mathbf{f}(w,z)=\frac{\partial\mathbf{f}(w,0)}{\partial z}\int_0^z(1-B(x))dx-$$

$$-\frac{jw}{b}\Phi(w)\mathbf{R}\int_0^z(A(x)-B(x))dx.$$

Подставив в последнее выражение формулу (25), получим:

$$\mathbf{f}(w,z)=\frac{1}{b}\mathbf{f}(w)\int_0^z(1-B(x))dx+$$

$$+\frac{jw}{b^2}\Phi(w)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)\mathbf{R}\int_0^z(1-B(x))dx-$$

$$-\frac{jw}{b}\mathbf{R}\Phi(w)\int_0^z(A(x)-B(x))dx. \qquad (34)$$

Этап 7. Умножим уравнение (31) на единичный вектор-столбец:

$$\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,z)}{\partial z}\mathbf{E}-\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}(1-B(z))-$$

$$-\left(jw-\frac{(jw)^2}{2}\right)\mathbf{F}(w,z)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+jw\mathbf{f}(w,z)\,\boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{E}-$$

$$-\frac{(jw)^2}{2}j\sigma\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E}B(z)+jwj\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}\mathbf{E}B(z)=0.$$

Учитывая формулы (13), (14), (20), (26), (34), в ходе несложных преобразований получим следующее равенство:

$$\mathbf{f}_2(w,z)\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}\int_0^z(1-B(x))dx+$$

$$+\frac{2jw}{b}\Phi(w)\int_0^z\left[A(y)-B(y)\right]dy-$$

$$-\frac{jw}{b}\varphi(w)\int_0^z\left[A(y)-B(y)\right]dy-\frac{(jw)^2}{b}\times$$

$$\times\Phi(w)\int_0^z\left[\left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{VE}+\frac{b_2}{2b^2}\right)(A(y)-B(y))-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b}\int_0^y(A(x)-B(x))dx+\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right)A(y)\right]dy.$$

Перепишем выражение при $z\to\infty$:

$$\mathbf{f}_2(w,\infty)\mathbf{E}=\mathbf{f}_2(w)\mathbf{E}=b\frac{\partial\mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\mathbf{E}+$$

$$+2jw\Phi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right)-$$

$$-jw\varphi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right)-\frac{(jw)^2}{b}\times$$

$$\times\Phi(w)\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\\ -\mathbf{VE}+\frac{b_2}{2b^2}\end{pmatrix}\int_0^\infty(A(y)-B(y))dy-\\ -\frac{1}{b}\int_0^\infty\begin{bmatrix}\int_0^y(A(x)-B(x))dx-\\ -\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)A(y)\end{bmatrix}dy\end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Можно показать, что

$$\int_o^\infty\left\{\int_0^y(A(x)-B(x))dx-\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)A(y)\right\}dy=$$

$$=\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2}{2}+\frac{1}{2}\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)\frac{b_2}{b}=\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2{}^2}{4b^2}.$$

Тогда уравнение (35) перепишется в виде:

$$\mathbf{f}_2(w)\mathbf{E} = b\frac{\partial \mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\mathbf{E} + 2jw\Phi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right) - jw\varphi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right) - \frac{(jw)^2}{b}\times$$

$$\times\Phi(w)\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{V}\mathbf{E}+\frac{b_2}{2b^2}\right)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)- \\ -\frac{1}{b}\left(\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2^2}{4b^2}\right)\end{bmatrix}. \quad (36)$$

Из выражения (33) известно:

$$\mathbf{f}_2(w)\mathbf{E} = b\frac{\partial \mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\mathbf{E} + 2jw\Phi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right) - jw\varphi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}\right) - \frac{(jw)^2}{b}\times$$

$$\times\Phi(w)\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{V}\mathbf{E}+\frac{b_2}{2b^2}\right)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)- \\ -\frac{1}{b}\left(\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2^2}{4b^2}\right)\end{bmatrix}. \quad (37)$$

Приравнивая правые части формул (36) и (37), получим

$$b\frac{\partial \mathbf{f}_2(w,0)}{\partial z}\mathbf{E} = -jw\Phi(w)\left(2-\frac{b_2}{b^2}+\mathbf{V}E\right) + jw\varphi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{V}E\right)+\varphi_2(w) - \mathbf{g}(w)E+\frac{(jw)^2}{b}\times$$

$$\times\Phi(w)\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{V}\mathbf{E}+\frac{b_2}{2b^2}\right)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)- \\ -\frac{1}{b}\left(\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2^2}{4b^2}\right)+b\mathbf{V}_1E\end{bmatrix}. \quad (38)$$

Подставим (38) в уравнение (30):

$$j\sigma\frac{d\mathbf{g}_2(w)}{dw}\mathbf{E} = \mathbf{g}(w)\left(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+\frac{\mathbf{E}}{b}\right) - \mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} - \frac{\varphi_2(w)}{b} + \frac{jw}{b}\Phi(w)\left(2-\frac{b_2}{b^2}+\mathbf{V}E\right) - \frac{jw}{b}\varphi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{V}E\right) - \frac{(jw)^2}{b^2}\times$$

$$\times\Phi(w)\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{V}\mathbf{E}+\frac{b_2}{2b^2}\right)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right)- \\ -\frac{1}{b}\left(\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2^2}{4b^2}\right)+b\mathbf{V}_1E\end{bmatrix}.$$

Этап 8. Подставляя все найденные выражения в последнее уравнение системы (12), получим следующее уравнение.

$$-\mathbf{f}(w)\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + j\sigma\frac{(jw)^2}{2}\frac{d\mathbf{G}(w)}{dw}\mathbf{E} - jwj\sigma\frac{d\mathbf{g}(w)}{dw}\mathbf{E} - \mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E} + \mathbf{g}(w)\frac{1}{b}\mathbf{E} + \frac{jw}{b}\times$$

$$\times\Phi(w)\left(2-\frac{b_2}{b^2}+\mathbf{V}E-b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) - \frac{jw}{b}\varphi(w)\left(1-\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{V}E-b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) - \frac{(jw)^2}{b^2}\Phi(w)\delta = 0,$$

где

$$\delta = \left(\frac{1}{2}+2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{V}\mathbf{E}+\frac{b_2}{2b^2}\right)\left(b-\frac{b_2}{2b}\right) - \frac{1}{b}\left(\frac{b_3}{6b}-\frac{b_2^2}{4b^2}\right)+b\mathbf{V}_1E-b^2\mathbf{V}_1\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}.$$

Учтем выражения (20) и (24)

$$-\frac{1}{b}\varphi(w) - jw\mathbf{G}(w)(vE+\frac{1}{b}\mathbf{E}) + \mathbf{g}(w)\frac{1}{b}\mathbf{E} + \frac{jw}{b}\Phi(w)\left(2-\frac{b_2}{b^2}+\mathbf{V}E-2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) - \frac{jw}{b}\varphi(w)\left(-\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{V}E-b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) - \frac{(jw)^2}{b^2}\Phi(w)\left(\delta-\frac{b}{2}+\frac{b_2}{2b}+b\mathbf{V}\mathbf{E}\right)=0.$$

Продифференцируем последнее уравнение

$$-\frac{1}{b}\varphi'(w) - j\mathbf{G}(w)(\boldsymbol{\lambda}E+\frac{1}{b}\mathbf{E}) - jw\mathbf{G}'(w)(\boldsymbol{\lambda}E+\frac{1}{b}\mathbf{E}) + \mathbf{g}'(w)\frac{1}{b}\mathbf{E} + \frac{j}{b}\Phi(w)\left(2-\frac{b_2}{b^2}+\mathbf{V}E-2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) +$$

$$+\frac{jw}{b}\Phi'(w)\left(2-\frac{b_2}{b^2}+\mathbf{V}E-2b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) - \frac{j}{b}\varphi(w)\left(-\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{V}E-b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) - \frac{jw}{b}\varphi'(w)\left(-\frac{b_2}{2b^2}+\mathbf{V}E-b\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E\right) -$$

$$-\frac{2j^2w}{b^2}\Phi(w)\left(\delta-\frac{b}{2}+\frac{b_2}{2b}+b\mathbf{V}\mathbf{E}\right) - \frac{(jw)^2}{b^2}\Phi'(w)\left(\delta-\frac{b}{2}+\frac{b_2}{2b}+b\mathbf{V}\mathbf{E}\right)=0. \quad (39)$$

Нетрудно показать, что производная

$$\Phi'(w) = \frac{\alpha}{\beta}j\left(1-\frac{jw}{\beta}\right)^{-1}\Phi(w),$$

тогда

$$\mathbf{G}'(w) = \mathbf{R} \cdot j\Phi(w)\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}\right).$$

Введем обозначения:

$$\eta = \delta - \frac{b}{2} + \frac{b_2}{2b} + b\mathbf{VE} - \frac{b}{\beta} -$$

$$-\frac{1}{2\sigma}\mathbf{VE} - \frac{1}{\sigma\beta} + \frac{1}{2\sigma} + \frac{b_2}{4\sigma b^2},$$

$$a(w) = -\frac{2}{\beta} - \mathbf{V}E - \frac{2}{\sigma b} - 2\eta\frac{jw}{b} + \left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-1} \times$$

$$\times \frac{\alpha}{\beta}\left[jw\left(2 - \frac{2}{\beta} - \mathbf{V}E\right) - (jw)^2\left(\frac{\delta}{b} - \frac{1}{2} + \frac{b_2}{2b^2} + \mathbf{VE}\right)\right].$$

Тогда после некоторых преобразований, уравнение (39) примет вид:

$$\varphi'(w)\left(1 - \frac{jw}{\beta}\right) - j\varphi(w)\frac{\alpha}{\beta} = j\Phi(w)a(w). \quad (40)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (40) представляется в виде:

$$\varphi(w) =$$

$$= e^{j\int_0^w \frac{\alpha/\beta}{\left(1-\frac{jw}{\beta}\right)}dx}\left\{\varphi(0) + \int_0^w e^{-j\int_0^y \frac{\alpha/\beta}{\left(1-\frac{jx}{\beta}\right)}dx} j\frac{\Phi(y)a(y)}{\left(1-\frac{jy}{\beta}\right)}dy\right\}. \quad (41)$$

Из условия нормировки для функции $F(w)$: $F(0)=1$ и равенства (29) следует, что $\varphi(0)=1$.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^w \frac{\alpha/\beta}{\left(1-\frac{jx}{\beta}\right)}dx = -\frac{\alpha\beta}{\beta j}\cdot\left[\ln\left(1-\frac{jw}{\beta}\right) - \ln 1\right] =$$

$$= j\alpha \cdot \ln\left(1 - \frac{jw}{\beta}\right).$$

Получаем, что (41) примет следующий вид:

$$\varphi(w) = -j\left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha}\int_0^w \frac{a(y)}{(jy-\beta)}dy =$$

$$= -j\Phi(w)\int_0^w \frac{a(y)}{(jy-\beta)}dy.$$

Возвращаясь к формуле (19) и учитывая (28), имеем

$$\{\mathbf{G}(w) + \mathbf{f}(w)\}\mathbf{E} = jw\Phi(w)\mathbf{VE} + \varphi(w)\mathbf{RE} =$$

$$= \left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha}\left\{jw\mathbf{VE} - j\int_0^w \frac{a(y)}{(jy-\beta)}dy\right\}.$$

Тогда, возвращаясь к переменной $u=\varepsilon w$ и параметру ρ, подставляя известные выражения для функций в формулу (8), получим выражение для асимптотической характеристической функции второго порядка:

$$h_2(u) = \left(1 - \frac{ju}{(1-\rho)\beta}\right)^{-\alpha} \times$$

$$\times\left\{1 + (1-\rho)\left[\frac{ju}{1-\rho}\mathbf{VE} - j\int_0^{\frac{u}{1-\rho}} \frac{a(y)}{(jy-\beta)}dy\right]\right\},$$

что и требовалось доказать.

С помощью полученной асимптотической характеристической функции по формуле обратного преобразования Фурье может быть найдено асимптотическое распределение $P(i)$ следующим образом:

$$P(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} \cdot h_2(u)du.$$

Проведенное численное сравнение асимптотического и точного распределения (полученного с помощью численных методов) позволило выявить область применимости предлагаемого метода: расстояние Колмогорова между точным и приближенным распределениями становится $\Delta \le 0{,}05$ при загрузке $\rho > 0{,}8$, что в 4 раза шире области применимости метода асимптотического анализа первого порядка.

Заключение

Таким образом, в работе было проведено исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа второго порядка в условии большой загрузки. В ходе исследования была получена асимптотическая (2-го порядка) характеристическая функция распределения числа заявок в источнике повторных вызовов. Численный анализ результатов показал, что область применения асимптотического метода второго порядка по сравнению с асимптотикой первого порядка [20] увеличивается в 4 раза: расстояние Колмогорова $\Delta \le 0{,}05$ для асимптотики первого порядка при загрузке $\rho > 0{,}95$, а для асимптотики второго порядка при загрузке $\rho > 0{,}8$, что позволяет использовать полученные результаты для более широкого круга практических задач.

Научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Министерства образования и науки РФ № 1.511.2014/К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial queues. – London: Chapman&Hall, 1997. – 328 p.
2. Artolejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: a Computational Approach. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
3. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis // Revista Matematica Complutense. – 2002. – V. 15. – P. 101–129.
4. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. – 1956. – V. 35. – № 2. – P. 421–507.
5. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls // Philips Telecommunication Review. – 1957. – V. 18. – № 2. – P. 49–100.
6. Gosztony G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering // Budavox Telecommunication Review. – 1976. – № 2. – P. 16–26.
7. Elldin A., Lind G. Elementary Telephone Traffic Theory. – Stockholm: L. M. Ericsson AB, 1964. – 46 p.
8. Jonin G.L., Sedol J.J. Telephone systems with repeated calls // Proc. of the 6th International Teletraffic Congress. – Munich, 1970. – P. 435/1–5.
9. Степанов С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами. – М.: Наука, 1983. – 230 с.
10. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model // Queueing Systems. – 1990. – V. 7. – P. 169–190.
11. Ridder F. Fast simulation of retrial queues // Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems. – Pisa, 2000. – P. 1–5.
12. Dudin A.N., Klimenok V.I. Queueing System BMAP/G/1 with repeated calls // Mathematical and Computer Modelling. – 1999. – V. 30. – № 3–4. – P. 115–128.
13. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., Neuts M.F. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate // European Journal of Operational Research. – 2001. – V. 135. – P. 569–581.
14. Diamond J.E., Alfa A.S. Matrix analytical methods for M/PH/1 retrial queues // Stochastic Models. – 1995. – V. 11. – P. 447–470.
15. Falin G.I. M|G|1 system with repeated calls in heavy traffic // Moscow University Mathematics Bulletin. – 1980. – V. 35. – № 6. – P. 48–50.
16. Aissani A. Heavy loading approximation of the unreliable queue with repeated orders // Methodes et Outils d'Aide `a la Decision: Actes du Colloque. – Bejaıa, 1992. – V. 1 – P. 97–102.
17. Anisimov V.V. Asymptotic Analysis of Reliability for Switching Systems in Light and Heavy Traffic Conditions // Statistics for Industry and Technology. Recent Advances in Reliability Theory. – 2000. – P. 119–133.
18. Stepanov S.N. Asymptotic analysis of models with repeated calls in case of extreme load // Problems of Information Transmission. – 1993. – V. 29. – № . 3. – P. 248–267.
19. Назаров А.А., Моисеева Е.А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 19–23.
20. Моисеева Е.А., Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа // Вестник ТГУ. УВТИ. – 2013. – № 4. – С. 84–94.

Поступила 06.09.2014 г.

UDC 519.872

RETRIAL QUEUING SYSTEM MMPP|GI|1 RESEARCHING BY MEANS OF THE SECOND-ORDER ASYMPTOTIC ANALYSIS METHOD UNDER A HEAVY LOAD CONDITION

Anatoly A. Nazarov,
Dr. Sc., Tomsk State University, 36, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia.
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Ekaterina A. Fedorova,
Tomsk State University, 36, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia.
E-mail: moiskate@mail.ru

Retrial queuing systems which are mathematical models of real processes in telecommunication systems are a new developing direction of the queuing theory. However the analytical formulas are obtained only for systems with Poisson arrival process. Most of the foreign scientists on queuing theory use different numerical methods for researching retrial queueing systems with not Poisson arrival process (e. g. MMPP, MAP, BMAP). Such methods have a natural limit of applicability related to solving the equations systems of large dimension (from 1000 to 500 thousand states). Thus, the urgency of the reserach is caused by the need to develop analytical methods for studying RQ-systems with arrival MMP-process.

The main aim of the study *is to find the asymptotic probability distribution of the number of calls in the orbit in the retrial queueing system MMPP|GI|1 for a sufficiently large number of states of the system.*

The methods used in the study: *second-order asymptotic analysis method under heavy load condition.*

The results. *The authors have obtained the asymptotic (second-order) characteristic function of the probability distribution of the number of calls in the orbit in the retrial queueing system MMPP|GI|1. The paper introduces the formula for asymptotic distribution construction. The numerical analysis of the results showed that the proposed method can be used to load values ρ>0,8, whereas the first-order asymptotic analysis method is applied when load values ρ>0,95. When using the obtained asymptotic probability distribution the most important characteristics of the system can be calculated (e. g. the average number of calls in the orbit). They can be used in modeling or optimization of real economic and technical systems operation.*

Key words:
Retrial queueing system, orbit, MMP-process, heavy load, second-order asymptotic analysis method.

The research work within the project part of the State Task in the field of scientific activity of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 1.511.2014/K.

REFERENCES

1. Falin G.L., Templeton J.G.C. *Retrial queues*. London, Chapman&Hall, 1997. 328 p.
2. Artolejo J.R., Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems: a Computational Approach*. Berlin, Springer, 2008. 267 p.
3. Artalejo J.R., Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. *Revista Matematica Complutense*, 2002, vol. 15, pp. 101–129.
4. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*, 1956, vol. 35, no. 2, pp. 421–507.
5. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review*, 1957, vol. 18, no. 2, pp. 49–100.
6. Gosztony G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering. *Budavox Telecommunication Review*, 1976, no. 2, pp. 16–26.
7. Elldin A., Lind G. *Elementary Telephone Traffic Theory*. Stockholm, L. M. Ericsson AB, 1964. 46 p.
8. Jonin G.L., Sedol J.J. Telephone systems with repeated calls. *Proc. of the 6th International Teletraffic Congress*. Munich, 1970. pp. 435/1–5.
9. Stepanov S.N. *Chislennye metody rascheta sistem s povtornymi vyzovami* [Numerical methods for calculating retrial queues]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 230 p.
10. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems*, 1990, vol. 7, pp. 169–190.
11. Ridder F. Fast simulation of retrial queues. *Third Workshop on Rare Event Simulation and Related Combinatorial Optimization Problems*. Pisa, 2000. pp. 1–5.
12. Dudin A.N., Klimenok V.I. Queueing System BMAP/G/1 with repeated calls. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999, vol. 30, no. 3–4, pp. 115–128.
13. Artalejo J.R., Gomez-Corral A., M.F. Neuts. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. *European Journal of Operational Research*, 2001, vol. 135, pp. 569–581.
14. Diamond J.E., Alfa A.S. Matrix analytical methods for M/PH/1 retrial queues. *Stochastic Models*, 1995, vol. 11, pp. 447–470.
15. Falin G.I. M|G|1 system with repeated calls in heavy traffic. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 48–50.
16. Aissani A. Heavy loading approximation of the unreliable queue with repeated orders. *Actes du Colloque.Methodes et Outils d'Aide `a la Decision*. Bejaıa, 1992, vol. 1, pp. 97–102.
17. Anisimov V.V. Asymptotic Analysis of Reliability for Switching Systems in Light and Heavy Traffic Conditions. *Statistics for Industry and Technology*, 2000, pp. 119–133.
18. Stepanov S.N. Asymptotic analysis of models with repeated calls in case of extreme load. *Problems of Information Transmission*, 1993, vol. 29, no. 3, pp. 248–267.
19. Nazarov A.A., Moiseeva E.A. Issledovanie RQ-systemy MMPP|M|1 metodom asimptoticheskogo analiza v uslovii bolshoy zagruzki [The research of retrial queueing system MMPP|M|1 by the method of asymptotic analysis under heavy load]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013. vol. 322, no. 2, pp. 19–23.
20. Moiseeva E.A., Nazarov A.A. Issledovanie RQ-sistemy MMPP|GI|1 metodom asimptoticheskogo analiza [Researching of Retrial Queueing system MMPP|GI|1 using asymptotic analysis method]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, vol. 25, no. 4, pp. 84–94.

Received: 06 September 2014.