

**ЭФФЕКТ «ЗАСТРЕВАНИЯ» МАЯТНИКА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВАЛУ.  
МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ**

О.Ю. Суменков

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.И. Артюнин  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050  
E-mail: [ovs5@tpu.ru](mailto:ovs5@tpu.ru)

**THE EFFECT OF “STICKING” OF A PENDULUM INSTALLED ON A ROTATING SHAFT.  
MODELING AND ANALYSIS**

O.Yu. Sumenkov

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A. I. Artyunin  
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050  
E-mail: [ovs5@tpu.ru](mailto:ovs5@tpu.ru)

***Abstract.** The authors carried out the modeling of the motion of a pendulum mounted with the possibility of free rotation on the rotor shaft of an electric motor fixed in a housing on elastic supports. The peculiarities of the motion of the pendulum within the range from zero to a given value of the angular velocity of the rotor of the electric motor with the presence in this range of natural frequencies of oscillations of the mechanical system are revealed. It is established that when changing the inertia moment of a pendulum or friction moment in pendulum support, there is possible mode of movement when the rotor rotates with a given angular velocity, and the angular velocity of the pendulum rotation is equal to one of the natural frequencies of the mechanical system. In previous studies this effect was named the effect of “sticking”.*

**Введение.** Основанием для проведения настоящей работы послужили результаты экспериментальных исследований движения маятника на вращающемся валу двигателя механической системы [1]. В этой работе было обнаружено новое явление в механике, которое заключалось в том, что для маятника, установленного с возможностью свободного вращения на валу двигателя механической системы, при изменении его момента инерции массы, оказался возможным такой режим движения, когда вал двигателя вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость (частота вращения) маятника близка или совпадает с одной из собственных частот колебаний механической системы. Это явление было названо эффектом «застревания» маятника на вращающемся валу. Целью настоящей работы является механико-математическое моделирование эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы.

**Выбор и описание движения модели механической системы с маятником на вращающемся валу.** Для исследований была выбрана модель, представляющая собой корпус в виде твердого тела, закрепленного на неподвижном основании с помощью симметрично расположенных четырех вертикальных и четырех горизонтальных невесомых упругих опор. В корпусе закреплен двигатель с ротором, а на валу ротора установлен с возможностью вращения относительно вала маятник массой  $m$  и длиной  $l$ . Ось вращения ротора проходит через центр масс корпуса (точка  $O_1$  на Рис. 1). На Рис.1 также

изображены демпферы, условно обозначающие наличие сопротивления пропорционального скорости движения корпуса. Движение модели будем изучать по отношению к неподвижной системе координат  $Oxyz$ , начало которой (точку  $O$ ) совместим с центром масс корпуса в положении его статического равновесия. Будем считать, что движение вдоль оси  $z$  и повороты вокруг осей  $x, y, z$  отсутствуют. Для описания движения модели используем три обобщенных координаты:  $x_1, y_1$  – перемещение центра масс корпуса  $O_1$  и  $\varphi$  – угол отклонения маятника от его нижнего положения.

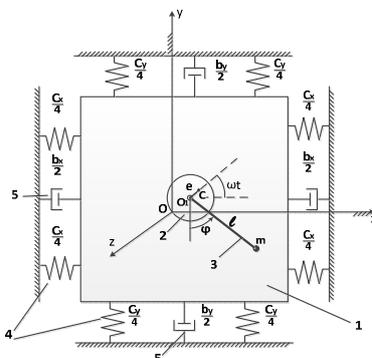


Рис. 1. Механическая модель маятника на вращающемся валу двигателя, установленного в корпусе: 1 – корпус; 2 – ротор с валом (точка  $C$  – центр масс ротора); 3 – маятник; 4 – невесомые упругие опоры корпуса; 5 – демпферы корпуса

Составляя выражения для кинетической и потенциальной энергий и функции Релея в выбранных обобщенных координатах с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода (1), получим систему трех дифференциальных уравнений, описывающих движение механической модели с маятником на вращающемся валу:

$$\begin{aligned} 1) \quad & M\ddot{x}_1 + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi) = ml\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - c_x x_1 - b_x \dot{x}_1 \\ 2) \quad & M\ddot{y}_1 + ml\dot{\varphi}\sin(\varphi) = -ml\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) - c_y y_1 - b_y \dot{y}_1 \\ 3) \quad & ml^2\ddot{\varphi} + ml\dot{x}_1 \cos(\varphi) + ml\dot{y}_1 \sin(\varphi) = k(\omega - \varphi) - mg l \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях приняты обозначения  $M = M_k + m$ , где  $M_k$  – масса корпуса с ротором;  $c_x, c_y$  – суммарная жесткость опор в горизонтальном и вертикальном направлениях;  $b_x, b_y$  – суммарные коэффициенты демпфирования в горизонтальном и вертикальном направлениях;  $g$  – ускорение свободного падения,  $\omega$  – угловая скорость ротора,  $k$  – коэффициент сопротивления относительно вращению маятника на валу ротора.

**Моделирование эффекта «застывания» маятника на вращающемся валу.** Суть моделирования этого явления заключалась в исследовании законов разгона маятника при различных его массах  $m$  и коэффициенте трения в опоре маятника при численном решении уравнений (1). Численное интегрирование уравнений (1) осуществлялось в среде MATLAB с помощью функции `ode15i` при следующих исходных данных:  $M_k = 10$  кг;  $b_x = b_y = 25$  Н·с/м;  $c_x = 4 \times 10^5$  Н/м;  $c_y = 1 \times 10^5$  Н/м;  $l = 0,05$  м. Масса маятника  $m$  изменялась от  $0,005 \dots 0,02$  кг, а коэффициент трения  $k$  от  $0,14 \times 10^{-3} \dots 0,01$  Н·м·с. При этих исходных данных выбранная модель имеет две собственные частоты колебаний  $k_1 = \sqrt{c_x/M} = 100$  рад/с;  $k_2 = \sqrt{c_y/M} = 200$  рад/с. Принято также, что при  $0 \leq t \leq 10$  с угловая скорость ротора изменялась по закону:  $\omega = 30t$ , а при  $t > 10$  с по закону:  $\omega = 300$  рад/с.

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 2, где показаны области различных режимов движения маятника на вращающемся валу.

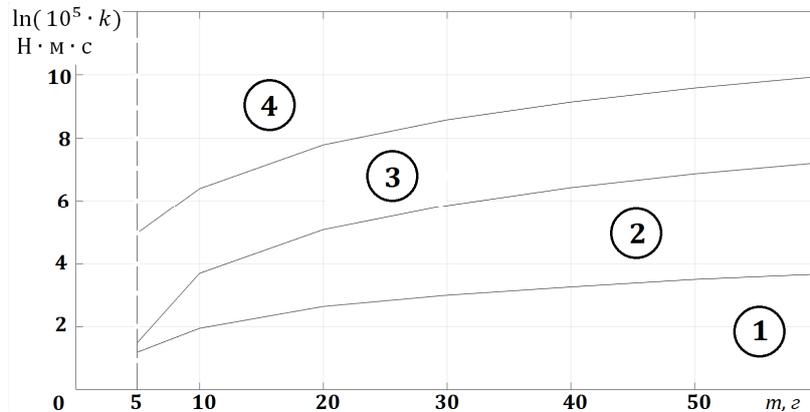


Рис. 2. Области режимов движений маятника на вращающемся валу в зависимости от массы маятника  $t$  и коэффициента трения  $k$

Установлено, что в зависимости от массы маятника  $t$  (значения откладывались по оси абсцисс) и коэффициента трения  $k$  в опоре маятника (значения откладывались по оси ординат по логарифмической шкале) имеют место четыре режима движения.

1. Вал ротора вращается с угловой скоростью  $\omega = 300$  рад/с, а маятник не вращается. Он совершает малые колебания около нижнего положения равновесия (область 1 на рис. 2).

2. Вал ротора вращается с угловой скоростью  $\omega = 300$  рад/с, а маятник вращается с угловой скоростью  $\dot{\phi} = 100$  рад/с, которая совпадает с первой собственной частотой колебаний механической системы (область 2 на рис. 2).

3. Вал ротора вращается с угловой скоростью  $\omega = 300$  рад/с, а маятник вращается с угловой скоростью  $\dot{\phi} = 200$  рад/с, которая совпадает со второй собственной частотой колебаний механической системы (область 3 на рис. 2).

4. Вал ротора и маятник вращаются с угловой скоростью  $\omega = \dot{\phi} = 300$  рад/с (область 4 на рис. 2).

**Заключение.** Таким образом, в результате численного эксперимента при моделировании движения маятника на вращающемся валу ротора двигателя, закрепленного в корпусе на упругих опорах, установлено, что при одной и той же угловой скорости вращения ротора угловая скорость вращения маятника в зависимости от его массы и трения в опоре маятника может совпадать с одной из собственных частот колебаний механической системы. Тем самым, наше исследование подтвердили результаты натурального эксперимента в работах [1], где это явление названо эффектом «застревания» маятника.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artyunin A. I., Eliseev S. V., Sumenkov O. Y. Experimental Studies on Influence of Natural Frequencies of Oscillations of Mechanical System on Angular Velocity of Pendulum on Rotating Shaft // Lecture Notes in Mechanical Engineering. - 2019 - №. 9783319956299. - pp. 159-166