АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА С ЗАДАННОЙ ОБЛАСТЬЮ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ

Чэн Син, Ван Цин, Гайворонский С.А.

Научный руководитель: Гайворонский Сергей Анатольевич, к.т.н.

Томский политехнический университет

Введение

Важным направлением развития современной теории автоматического управления является анализ качества систем, имеющих нестабильные или неопределенные параметры. Такие параметры обычно задают числовыми интервалами и поэтому подобные системы в теории управления классифицируют как интервальные. Решению задач анализа интервальных систем посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученных [1-3]. При этом хорошо разработаны методы, связанные с использованием интервальных характеристических полиномов (ИХП), коэффициенты которых могут независимо друг от друга изменяться в известных диапазонах [4-6]. Так, например, с использованием различных подходов (алгебраического, частотного, корневого) получены решения задач анализа робастной устойчивости по известному ИХП системы. Однако представляет интерес и обратная задача: по начальной информации о системе и заданных показателях качества сформировать ее ИХП, то есть определить допустимые пределы изменения коэффициентов полинома.

Коэффициентные показатели качества

Рассмотрим линейную стационарную непрерывную систему с характеристическим полиномом:

$$F_n(\mathrm{s}) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0, a_i > 0. \tag{1}$$

В соответствии с [7] введем вспомогательные параметры λ_i, образуемые четверками рядом стоящих коэффициентов полинома (1):

$$\lambda_i = a_{i-1}a_{i+2} / \left(a_i a_{i+1}\right), i = \left[1, n-2\right]. \tag{2}$$

Так, на основании (2) $\lambda_1 = a_0 a_3 / \left(a_1 a_2\right)$; $\lambda_2 = a_1 a_4 / \left(a_2 a_3\right)$ и т.д. Эти параметры λ_i называют показателями устойчивости. Для устойчивости системы с характеристическим полиномом (1) достаточно, чтобы для (2) выполнялись неравенства:

$$\lambda_i < \lambda^* \approx 0,465, \forall i = \left[1, n-2\right] \tag{3}$$

Введем в рассмотрение второй параметр δ_{i}, называемый показателем колебательности и вычисляемый по формуле:

$$\delta_{\mathrm{i}} = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}}, i = [1, n-1] \quad . \qquad (4)$$

Для получения достаточных условий расположения корней в заданном секторе достаточно, чтобы для (4) выполнялись неравенства

$$\delta_i \geq \delta_{\partial}(n,\varphi), \forall i = [1, n-1] \quad . \qquad (5)$$

Чтобы иметь достаточные условия расположения корней в любых секторах, следует воспользоваться графиками, зависимости δ_{∂} от угла сектора $\pm\varphi$.

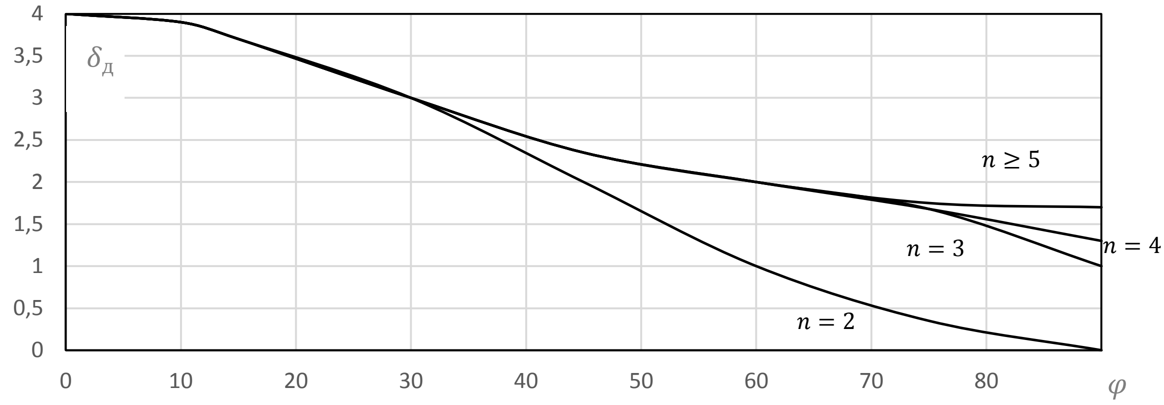

Рис. 1. Зависимости δ_{∂} *от* φ

Определение пределов коэффициентов полинома

Рассмотрим интервальный характеристический полином:

$$D_n(s) = [a_n]s^n + [a_{n-1}]s^{n-1} + \ldots + [a_0]. \qquad (6)$$

где $\underline{\alpha_i} \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha_i}$. На основании (3) можно сделать вывод: чтобы система с интервальным характеристическим полиномом (6) была робастно устойчива, достаточно выполнения неравенств:

$$\overline{\lambda_i} = \frac{\overline{\alpha_{i-1}}\,\overline{\alpha_{i+2}}}{\underline{\alpha_i}\,\underline{\alpha_{i+1}}} \leq \lambda^*, \lambda^* \approx 0,465, \forall i = [1, n-2]. \qquad (7)$$

На основании (5) для расположения корней ИХП в желаемом секторе необходимо выполнение следующих условий:

$$\underline{\delta_i} = \frac{\underline{\alpha_i}^2}{\overline{\alpha_{i-1}}\,\overline{\alpha_{i+1}}} \geq \delta_{\partial}, i = [1, n-1]. \qquad (8)$$

где δ_∂ - допустимый показатель колебательности. Пусть в характеристическом полиноме $n \ge 3$ и известны пределы не менее двух старших коэффициентов. Необходимо определить интервалы остальных коэффициентов ИХП, при которых корни полинома локализованы в заданном секторе. В результате алгебраических преобразований (7) и (8) получим выражения для пределов неизвестных коэффициентов ИХП

$$\overline{\alpha_i} \le \frac{\lambda^* \underline{\alpha_{i+1}}\,\underline{\alpha_{i+2}}}{\alpha_{i+3}}, i = v, v-1, \ldots 0, v = n-g; \tag{9}$$

$$\overline{\alpha_i} \le \frac{\underline{\alpha_{i+1}}^2}{\delta_\partial \alpha_{i+2}},\ i = v, v-1, \ldots 0, v = n-g; \tag{10}$$

где g - количество коэффициентов ИХП с известными пределами. Алгоритм построения интервального полинома приведен на рисунке 2.

Пример

Рассмотрим линейную нестационарную систему с интервальным характеристическим полиномом:

$$F(s) = [a_4]s^4 + [a_3]s^3 + [a_2]s^2 + [a_1]s^1 + [a_0]. \tag{11}$$

где $[a_4] = [0.002, 0.005], [a_3] = [0.5, 1].$ Требуется определить интервалы $[a_2], [a_1], [a_0]$, обеспечивающие локализацию корней ИХП (11) в секторе $\pm 60^\circ\ (\delta_\partial = 2)$. Для решения поставленной задачи при известных коэффициентах $[a_4]$ и $[a_3]$ на основе (9) и (10) получили

$$\overline{\alpha_2} \le \frac{\underline{\alpha_3}^2}{\delta_\partial \alpha_4};\ \overline{\alpha_2} \le 25; \tag{12}$$

$$\overline{\alpha_1} \le \frac{0,465\underline{\alpha_2}\,\underline{\alpha_3}}{\alpha_4};\ \overline{\alpha_1} \le 232,5; \tag{13}$$

$$\overline{\alpha_1} \le \frac{\underline{\alpha_2}^2}{2\alpha_3};\ \overline{\alpha_1} \le 12,5. \tag{14}$$

Из (12) получили $\overline{\alpha_2} = 25$ и задали $\underline{\alpha_2} = 5$. Далее из (13) и (14) получим $\overline{\alpha_1} = 12,5$ и выберем $\underline{\alpha_1} = 2$. Далее составим выражения

$$\overline{\alpha_0} \le \frac{0,465\underline{\alpha_1}\,\underline{\alpha_2}}{\alpha_3};\ \overline{\alpha_0} \le 4,65; \tag{15}$$

$$\overline{\alpha_0} \le \frac{\underline{\underline{\alpha_1}}^2}{2\overline{\overline{\alpha_2}}};\ \overline{\alpha_0} \le 0{,}08 \qquad (16)$$

На основе (15) и (16) получим $\overline{\alpha_0} = 0{,}08$ и зададим $\underline{\alpha_0} = 0{,}02.$ В итоге определены $[a_2]=[5,25],[a_1]=[2,12.5],[a_0]=[0.02,0.08]$.

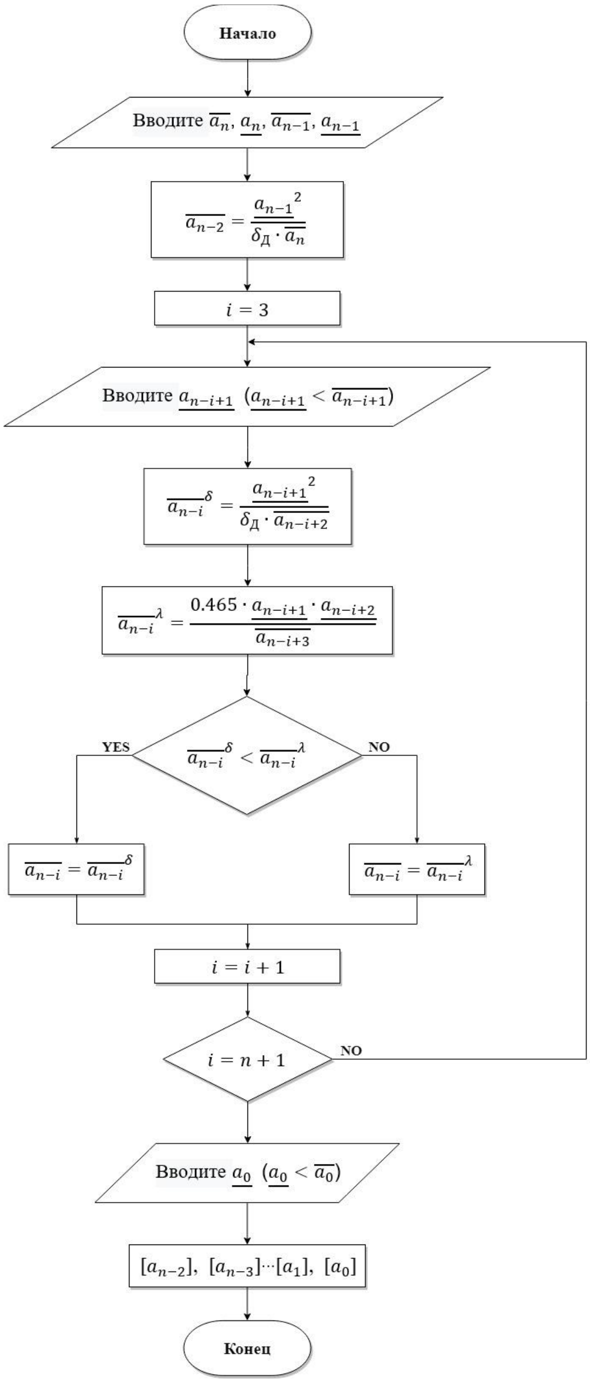

Рис. 2. Блок-схема определения интервалов коэффициентов в заданном секторе

Корневой годограф для построенного интервального характеристического полинома имеет вид:

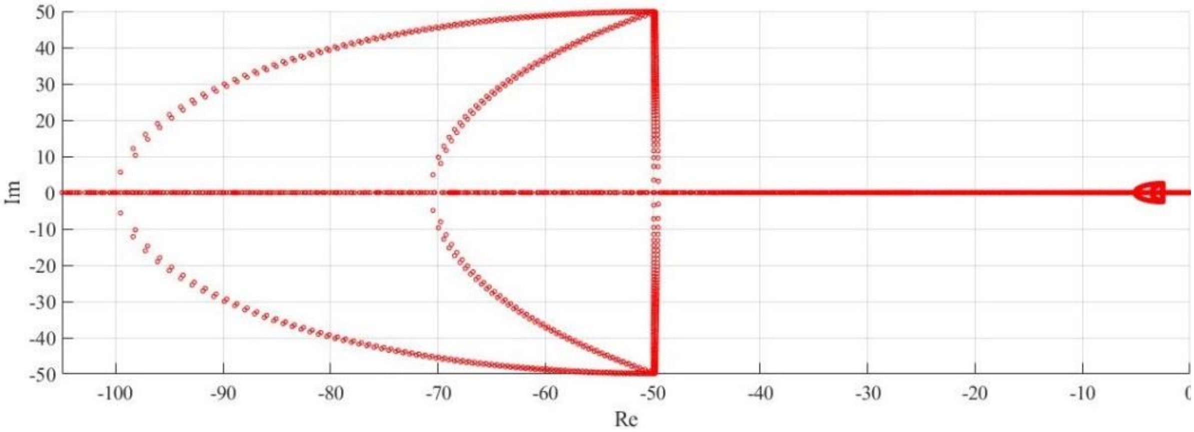

Рис. 3. Корневой годограф

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Barmish B.R. The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica. – 1990. – Vol. 26, № 2. – P. 283-292.
3. Chen C.T. Robust controller design for interval process systems, C.T. Chen, M.D. Wang // Computers and Chemical Engineering. – 1997. – Vol. 21. – P. 707-721.
4. Харитонов В.Л. Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы / В.Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 5. – С. 53-57.
5. Necessary and sufficient conditions for the stability of a linear family of polynomials. A.P. Zhabko, V.L. Kharitonov // Automation and Remote Control. – 1994. – Vol. 55, № 10. – P. 1496-1503.
6. Гайворонский С.А. Определение реберного маршрута для анализа робастной секторной устойчивости интервального полинома // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 5. – С. 11-15.
7. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза / Б.Н. Петров, Н.И. Соколов, А.В. Липатов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 256с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-58-00045 Бел_а).