

УДК 519.714: 622.7

## СНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОБОГАЩЕНИЯ ЖЕЛЕЗОРУДНОГО СЫРЬЯ

Моркун Владимир Станиславович<sup>1</sup>,  
morkunv@gmail.com

Моркун Наталья Владимировна<sup>1</sup>,  
nmorkun@gmail.com.

Тронь Виталий Валериевич<sup>1</sup>,  
vtron@ukr.net.

Грищенко Светлана Николаевна<sup>1</sup>,  
s-grischenko@ukr.net.

Суворов Александр Иванович<sup>2</sup>,  
o.suvorov@i.ua.

Паранюк Дмитрий Игоревич<sup>3</sup>,  
paranyuk@i.ua

Сердюк Александра Юрьевна<sup>1</sup>,  
o.serdiuk@i.ua

<sup>1</sup> Криворожский национальный университет,  
Украина, 50027, г. Кривой Рог, ул. Виталия Матусевича, 11.

<sup>2</sup> Академия горных наук Украины,  
Украина, 50002, г. Кривой Рог, ул. Пушкина, 37.

<sup>3</sup> «АрселорМиттал Кривой Рог»,  
Украина, 50000, г. Кривой Рог, ул. Криворожстали, 1.

**Актуальность** исследования обоснована важностью задачи повышения качества нелинейных моделей технологических процессов обогащения железорудного сырья. Такое направление совершенствования средств моделирования сложных систем позволит повысить эффективность управления процессом обогащения и качество конечной продукции.

**Цель:** повышение точности динамических пространственно-временных математических моделей взаимосвязанных процессов для систем управления системой технологических агрегатов в условиях линии обогащения, сырьем для которой является рудный материал нескольких минералого-технологических разновидностей.

**Объекты:** динамические пространственно-временные математические модели взаимосвязанных процессов для систем управления технологическими агрегатами линии обогащения.

**Методы:** систематизация и анализ разработанных методов математического моделирования распределенных взаимосвязанных процессов, статистические методы и методы теории вероятностей для обработки результатов экспериментов, компьютерные информационные и программные технологии для реализации разработанных подходов.

**Результаты.** Предложен усовершенствованный подход к моделированию сложной системы процессов в условиях линии обогащения руды как пространственно-временных структур с распределенными параметрами с учетом показателей отдельных технологических стадий по всему спектру гранулометрической характеристики перерабатываемой руды. Для снижения размерности моделей, представленных в виде распределенных структур объектов управления, которые преобразовывают содержание и выход полезного компонента по всему спектру гранулометрической характеристики руды, целесообразно использовать метод диффузных карт, при этом ошибка Сэммона составила 2,6 %.

### Ключевые слова:

Пространственно-временная модель, снижение размерности, метод диффузных карт, обогащение руды.

### Введение

Для устойчивого развития горнорудных предприятий особое значение имеют вопросы снижения себестоимости продукции и оптимизации энергозатрат технологических процессов переработки сырья. Ситуация усложняется отрицательной динамикой качества рудного сырья и высокой энергоемкостью производства. Следует отметить,

что в структуре энергозатрат предприятий горно-перерабатывающей отрасли пятую часть составляет доля обогатительной фабрики. По затратам электроэнергии обогатительное отделение является наиболее энергоемким и потребляет почти половину от общего объема. На эффективность процесса обогащения существенно влияет размер вкраплений железа в руде [1]. Данная характеристика

определяет необходимую крупность измельчения руды для ее наилучшего раскрытия: чем меньше вкрапления, тем тоньше должно быть измельчение. Таким образом, для каждой разновидности руды в процессе ее измельчения и классификации должен поддерживаться определенный гранулометрический состав [2, 3].

Математические модели обогащательных процессов могут быть разделены на несколько групп в зависимости от метода построения модели, ее структуры, специфики процесса и уровня использования информации о процессе. Проведенные исследования [4, 5] процессов обогащения руды показали, что упомянутые процессы характеризуются существенной нелинейностью. Значительная протяженность линии обогащения рудного материала создает предпосылки к рассмотрению данного объекта как системы с распределенными параметрами [6–8].

#### **Анализ литературных данных и постановка проблемы**

Для синтеза математических моделей в условиях обогащательных процессов необходим значительный объем информации о механических, физических, минералогических и химических характеристиках руды [9]: распределении частиц и полезного компонента в них по классам крупности. Также необходимы сведения о состоянии технологических обогащательных агрегатов: расходы руды и воды. Следует отметить, что в современных системах управления обогащением указанные параметры контролируются на нескольких стадиях, что существенно увеличивает общее количество параметров распределенной системы. Эффективным средством преодоления указанных проблем является применение специальных методов снижения размерности данных.

В работе [10] показано, что в процессе анализа экологических пространственных данных часто необходимо моделировать зависимости, сформированные динамическим пространственно-временным процессом. В то же время во многих случаях используется обобщенная линейная смешанная модель (Generalized Linear Mixed Model, GLMM) со случайным эффектом учета пространственной зависимости. Предложен динамический подход к учету пространственной зависимости, который включает в себя информацию о процессе формирования пространственно-временных данных.

Значительное количество пространственно-временных процессов формируют наборы данных, которые содержат существенное количество нулевых значений [11]. Отмечено, что в таких случаях наиболее распространенным подходом является использование моделей с двумя независимыми частями. В работе рассмотрены методы повышения робастности таких моделей. Предложены пространственно-временные структуры для вывода базового пространственно-временного поведения исследуемого процесса. В то же время предложены

средства повышения робастности моделей.

Проблема снижения размерности данных при идентификации непараметрических моделей и метод ее решения рассмотрены в работе [12]. Полученные результаты моделирования позволили сделать вывод о том, что во многих случаях снижение размерности выгодно с точки зрения уменьшения ошибки. Результаты моделирования также указывают на то, что при уменьшении размерности непараметрические модели в определенных условиях могут быть альтернативой параметрическим моделям.

Для решения задачи прогнозирования данных большой размерности в работе [13] рассмотрена модель, построенная с применением метода опорных векторов. Предложено развитие данного подхода с применением ядерных операторов. Показано, что задачу снижения размерности целесообразно решать в пространстве нелинейных ядер, при этом для прогнозирования и представления модели предложено использовать радиальную базисную функцию. Вместо того, чтобы продолжать распределение в оригинальном пространстве функции SVM, уменьшение размерности выполняется в пространстве функций ядра. Следует отметить, что предложенный метод обеспечивает снижение размерности и позволяет избежать избыточности модели.

В работах [14] представлены результаты формализации и анализа процесса обогащения рудного сырья в условиях неопределенности. Указано, что решение задачи оптимизации процесса управления затруднено пространственной распределенностью и большим количеством параметров объекта. Обоснована необходимость применения методов снижения размерности для повышения качества управления, в частности, с применением средств регрессионного анализа.

Осуществление регрессионного анализа характеризуется рядом вычислительных проблем, в частности мультиколлинеарностью [15]. Преодоление данной проблемы предложено осуществлять путем оптимизации с формированием соответствующей целевой функции. Указано, что такой подход обеспечивает повышение точности модели. Анализ полученных результатов показал, что ошибка прогнозирования модели пониженной размерности не превышает ошибку модели полной размерности.

В работе [16] для решения проблемы высокой размерности предложено совместить модельное обучение методом наименьших квадратов условной энтропии. Указанный метод одновременно выполняет оценку передаточных функций и снижение размерности. Проведенные экспериментальные исследования позволили сделать вывод о перспективности метода наименьших квадратов условной энтропии при решении задач большой размерности.

Динамические системы, описываемые обычными дифференциальными уравнениями или дифференциальными алгебраическими уравнениями,

рассмотрены в работе [17]. Следует отметить, что в предложенном подходе физические параметры заменяются случайными величинами для количественного описания неопределенности. Исследованы два подхода к построению моделей пониженной размерности. Во-первых, снижается размерность стандартного базиса путем исключения базисных функций, для которых сопутствующие нормы Харди относительно невелики. Во-вторых, для системы Галеркина применяется процедура уменьшения размерности, которая позволяет определить новые базисные функции в рамках представления пониженной размерности. Результаты числовых экспериментов позволяют сделать вывод о том, что данный подход является перспективным.

В работах [18, 19] рассмотрены методы решения задачи моделирования и управления системой, которая характеризуется распределенностью параметров. В качестве примера взят процесс обогащения рудного сырья в условиях технологической линии. Показано, что синтез управления указанными процессами существенно усложняется большим количеством контролируемых параметров на каждой стадии технологической линии. Следовательно, в данном случае целесообразно применение методов снижения размерности.

Большинство существующих методов снижения размерности принимают матрицу сходства для формирования структуры данных, а затем эта матрица вычисляется с помощью определенной степени расстояния, чаще всего – евклидовой [20]. Отмечено, что евклидово расстояние может моделировать только статическую структуру данных, а внутренняя информация о динамической структуре, как правило, игнорируется. Для преодоления этой проблемы предложены соответствующие методы снижения размерности. Упомянутые методы основаны на вероятностно обоснованном эффективном расстоянии. Анализ результатов проведенных экспериментов показал, что разработанные методы характеризуются достаточной эффективностью.

Выделяют два подхода к формированию пространственно-временной модели распределенной системы [7]. Первый подход заключается в получении сигнала на выходе системы при подаче на вход комбинации единичных импульсных функций во временной и пространственной областях [6]. Вторым подход предполагается определение выходного сигнала объекта при подаче на вход собственных вектор-функций оператора объекта. При таком условии распределенный объект представляет как бесконечное множество независимых контуров, которые являются условно сосредоточенными. При этом для каждого из них передаточные функции представлены отношением аналитических функций целого типа.

В работе [8] проанализированы особенности основных форм описания распределенных объектов. Отмечается, что особенностью распределенных систем является тот факт, что во входных и выходных сигналах выделяют пространственные составляющие.

Поэтому в распределенных системах необходимо добавить пространственную форму к временным входным воздействиям.

Подход, рассмотренный в работе [21], предполагает, что для моделирования распределенных систем целесообразно использовать нейронные сети. По мнению авторов работы, такой подход целесообразен в том случае, когда функция, описывающая объект управления, характеризуется следующими свойствами: является композицией простых элементов, ее структура определяется подбором параметров из конечного набора, процедура подбора устойчива к возмущениям начальных данных и ошибкам вычисления. Отмечено, что аналитическое решение допускает небольшое число задач, а существующие методы приближенного решения подобно сетевым методам позволяют выполнить только поточечную аппроксимацию или выдвигают специальные требования к набору функций, при помощи которых осуществляют аппроксимацию. Наиболее важным преимуществом нейросетевой модели является ее устойчивость по отношению к ошибкам в данных – неточностям при определении коэффициентов уравнений, погрешностям вычислений, начальных и граничных условиях.

#### Цель и задачи исследования

Целью работы является повышение точности динамических пространственно-временных математических моделей взаимосвязанных процессов для систем управления обогащающими агрегатами технологической линии.

Достижение поставленной цели требует решения следующих задач:

1. Обосновать подход к моделированию процессов обогащения железорудного сырья как пространственно-временных структур с распределенными параметрами с учетом показателей отдельных технологических стадий по всему спектру гранулометрической характеристики перерабатываемой руды.
2. Выбрать метод снижения размерности моделей объектов управления обогащающего производства как распределенных структур.

#### Материалы и методы исследования

Решение проблемы повышения эффективности процессов управления обогащением рудного сырья является одним из наиболее важных составляющих обеспечения устойчивого развития горных предприятий. Такой подход требует наличия качественной информации о процессе, формирования соответствующей базы данных и их последующей обработки для построения адекватных и эффективных математических моделей процессов и систем.

Технологические агрегаты обогащающего производства как объекты управления могут быть представлены как некоторые операторы, преобразующие векторы параметров входа–выхода [2, 3], учитывая при этом управляющие воздействия:

$$\bar{Y} = F(\bar{X}, \bar{U}), \quad (1)$$

где  $F$  – оператор, представляющий технологическую линию обогащения руды;  $\bar{X}$  – вектор состояния;  $\bar{U}$  – вектор управляющих воздействий.

В качестве управляющих воздействий в (1) могут выступать, в частности [2, 3]: расход руды и воды в мельницу, расход пульпы и воды в классификатор, расход пульпы и воды в гидроциклон, расход воды в зумпф, расход пульпы и воды в магнитный сепаратор. Следует отметить, что приложение управляющих воздействий к технологической линии обогащения осуществляется в обособленных друг относительно друга точках. При этом пути между данными точками характеризуются не только запаздыванием, которое возникает как следствие распределенности точек в пространстве, но и определенными динамическими характеристиками соответствующих технологических агрегатов, функционирующих в данной линии обогащения.

Выходные параметры отдельных стадий технологической линии обогащения (например, измельчение) необходимо рассматривать как входные для следующей стадии:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= F_1(\bar{X}_0, \bar{U}_1), \\ \bar{X}_\ell &= F_\ell(\bar{X}_{\ell-1}, \bar{U}_\ell), \\ &\dots, \\ \bar{Y} &= \bar{X}_L = F_L(\bar{X}_{L-1}, \bar{U}_L). \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F_\ell$  – операторы, представляющие отдельные технологические агрегаты, стадии или циклы линии обогащения руды  $l \in \overline{1, L}$ ;  $L$  – количество агрегатов (стадий, циклов). Таким образом, при моделировании целесообразно учитывать, что в соответствии с (2) управляющее воздействие, приложенное в начале технологической линии, оказывает воздействие не только на технологический агрегат, перед которым находится точка его приложения, но также и на все последующие агрегаты.

В соответствии с результатами исследований [2] для количественной оценки рудного материала кроме показателя распределения минеральных частиц  $\chi(\xi)$  по фракциям с различными физическими свойствами  $\xi$  целесообразно использовать также показатель распределения ценных компонентов  $\beta(\xi)$ . Для количественной оценки эффективности работы технологических аппаратов используют величину извлечения  $\varepsilon$  минеральных фракций в продукты обогащения. Сепарационная характеристика представляет собой непрерывную функцию  $\varepsilon(\xi)$ , которая определяет зависимость извлечения элементарных фракций  $[\xi, \xi + \Delta\xi]$  в концентрат от физического свойства  $\xi$ . К примеру, для замкнутого цикла измельчения руды, состоящего из мельницы и спирального классификатора, для каждой разновидности руды имеется оптимальный режим измельчения, который обеспечивает наибольшее содержание заданного класса крупно-

сти в готовом продукте при заданной производительности [2, 3]. Поддержание необходимой плотности и выхода песков обеспечивает наилучшее качество слива по содержанию контрольного класса крупности.

Элементами векторов выходных параметров  $\bar{X}_1 \dots \bar{X}_L$  – технологических агрегатов являются их качественные и количественные показатели на  $\ell$ -м этапе технологического процесса,  $\ell = \overline{1, L}$ . В процессе осуществляется изменение характеристических функций заданной физического свойства: массовой доли частиц  $\gamma(\xi)$  в общей массе и содержания полезного компонента в них  $\beta(\xi)$ . Например, функция крупности характеризует распределение по классам частиц рудного материала  $\gamma(d)$  и содержание полезного компонента  $\beta(d)$  классах. Характеристики сырья технологической линии обогащения обозначим индексом 0:  $\gamma_0(d)$ ,  $\beta_0(d)$ , тогда характеристики продукта технологической линии будут иметь индекс последней технологической операции  $\ell = L$ :  $\gamma_L(d)$ ,  $\beta_L(d)$ .

$$\bar{X}_\ell = \{\gamma_\ell(d), \beta_\ell(d), \chi_\ell\}, \quad \ell = \overline{1, L}, \quad (3)$$

где  $\gamma$  – массовая доля отдельных классов, %;  $\beta$  – массовая доля железа в отдельных классах крупности, %;  $\chi$  – удельные затраты электроэнергии данного технологического агрегата, кВт·ч/т;  $d$  – размер частиц руды, мм;  $\ell$  – индекс технологической операции;  $L$  – количество технологических операций.

На рис. 1 представлен пример распределения железа по девяти классам крупности (рис. 1, а) и выход частиц данных классов в начальной точке (рис. 1, б) технологической линии (разгрузки мельницы 1-й стадии) и в конечной точке (магнитный продукт 4-й стадии) [22, 23].

Для каждой минералого-технологической разновидности руды для лучшего раскрытия полезного компонента необходимо сформировать соответствующий размерам вкраплений гранулометрический состав частиц рудного материала.

То есть получить на выходе технологической линии заданную функцию распределения полезного компонента в классах  $\|\beta_L(d) - \beta_L^*(d)\| \rightarrow \min$  и заданную гранулометрическую характеристику твердой фазы пульпы  $\|\gamma_L(d) - \gamma_L^*(d)\| \rightarrow \min$ .

Для представления распределения частиц твердой фазы пульпы по крупности использован метод, который предложен в работе [2]. В соответствии с данным методом непрерывное распределение  $\beta(d)$ ,  $\gamma(d)$  определяется на некотором множестве точек  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N_d}$  и представляется вектор-столбцом порядка  $N_d \times 1$  разниц значений функции в последовательных точках. В результате функции распределения по крупности  $\beta(d)$ ,  $\gamma(d)$  аппроксимируются по точкам определения функции. Преимуществом данного метода является возможность выбора точек определения функции в соответствии с системой оценки гранулометрического состава (размерами сит) в условиях определенного технологического процесса, а также возможность непо-

средственно оперировать числовыми значениями функции распределения без дополнительных преобразований, что обеспечивает одинаковое представление распределений произвольного вида.

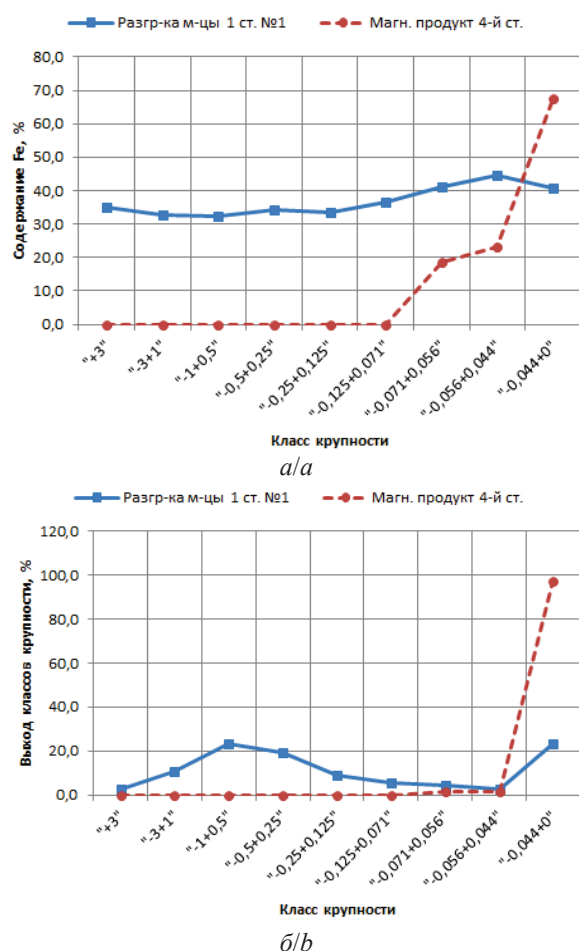


Рис. 1. Функции распределения полезного компонента и выход классов крупности частиц рудного материала в начальной и конечной точке технологической линии обогащения

Fig. 1. Functions of useful component distribution and yield of particle size classes of ore material at the initial and final point of the processing line of enrichment

Следует отметить, что синтез модели существенно усложнен большим количеством параметров технологического процесса. Характерной особенностью технологических комплексов обогатительных фабрик как объектов управления является наличие в их структуре последовательных стадий обогатительных процессов. На каждой стадии задействуют несколько технологических агрегатов, что делает систему взаимосвязи между ними достаточно сложной. Также в системе взаимосвязи присутствуют рециклы – обратные связи, которые могут связывать агрегаты как одной, так и различных стадий.

Графики выхода классов крупности твердых частиц пульпы, в различных точках технологической линии обогащения, определенные по результатам измерений, находящихся у мест приложе-

ния управляющих воздействий, представлены на рис. 2.

На рис. 3 представлены графики функции распределения железа по классам крупности твердых частиц пульпы, распределенной по технологической линии обогащения [22, 23].

На рис. 2, 3 приняты следующие обозначения точек измерения: 1, 6, 12 – разгрузка соответственно 1-й, 2-й и 3-й стадии измельчения; 2, 8, 13 – сливы соответственно 1-й, 2-й и 3-й стадии классификации; 3, 4 – магнитный продукт соответственно первого и второго приема 1-й стадии магнитной сепарации; 7, 10, 15 – магнитный продукт соответственно 2-й, 3-й и 4-й стадии магнитной сепарации; 5, 9, 11, 14 – пески соответственно 1-й, 2-й, 3-й и 4-й стадии классификации.

Как видно на рис. 2, 3, распределения по технологической линии соответственно выхода классов крупности твердых частиц пульпы и содержания железа в данных классах крупности претерпевают существенные изменения после каждого технологического агрегата. Это выражается в увеличении доли мелких частиц твердой фазы пульпы и сокращении доли крупных частиц, соответственно увеличивается и содержание железа в мелких частицах.

Как было показано выше, задачей управления является формирование такой сепарационной характеристики на выходе последнего технологического агрегата (точка 15 на рис. 2, 3), которая обеспечивает максимальное извлечение полезного компонента в концентрат. Следовательно, формирование управления каждым технологическим агрегатом должно быть направлено на достижение этой общей для всей технологической линии цели.

Поверхности распределенных по технологической линии обогащения показателей выхода классов крупности и содержания полезного компонента в них представлены соответственно на рис. 4, а, б.

Таким образом, в процессе управления технологической линией обогащения железорудного сырья необходимо учитывать значительное количество параметров, распределенных по всей протяженности технологической линии. Как показано выше, для типовой технологической линии контроль и приложение управляющих воздействий производят в 15 точках, существенно удаленных друг относительно друга. При этом в каждой точке контролируют большое количество параметров. Рассмотренная технологическая схема имеет 15 точек контроля, в каждой из которых производят контроль гранулометрического состава частиц рудного материала по 9 классам крупности, а также – контроль содержания полезного компонента в классах крупности. Следовательно, общее количество параметров составит  $(9+9) \cdot 15 = 270$ . С учетом одного управляющего воздействия для каждого из пятнадцати технологических агрегатов количество параметров возрастает до 285.

В уравнении, которое описывает процесс обогащения железорудного сырья, в соответствии с из-

ложенными выше положениями, следует учесть динамику распределения характеристик рудного материала в двух областях: пространственной и временной. Для этого введем соответствующую переменную  $\beta^d(\ell, t)$ , которая обозначает изменение во времени содержания железа в классах крупности рудного материала с учетом его распределения по

всей протяженности технологической линии обогащения:

$$\frac{\partial \beta^d(\ell, t)}{\partial t} = \theta_1 \frac{\partial^2 \beta^d(\ell, t)}{\partial \ell^2} + \theta_2 \frac{\partial \beta^d(\ell, t)}{\partial \ell} + f(\beta^d) + wb(\ell)u(t), \quad (4)$$

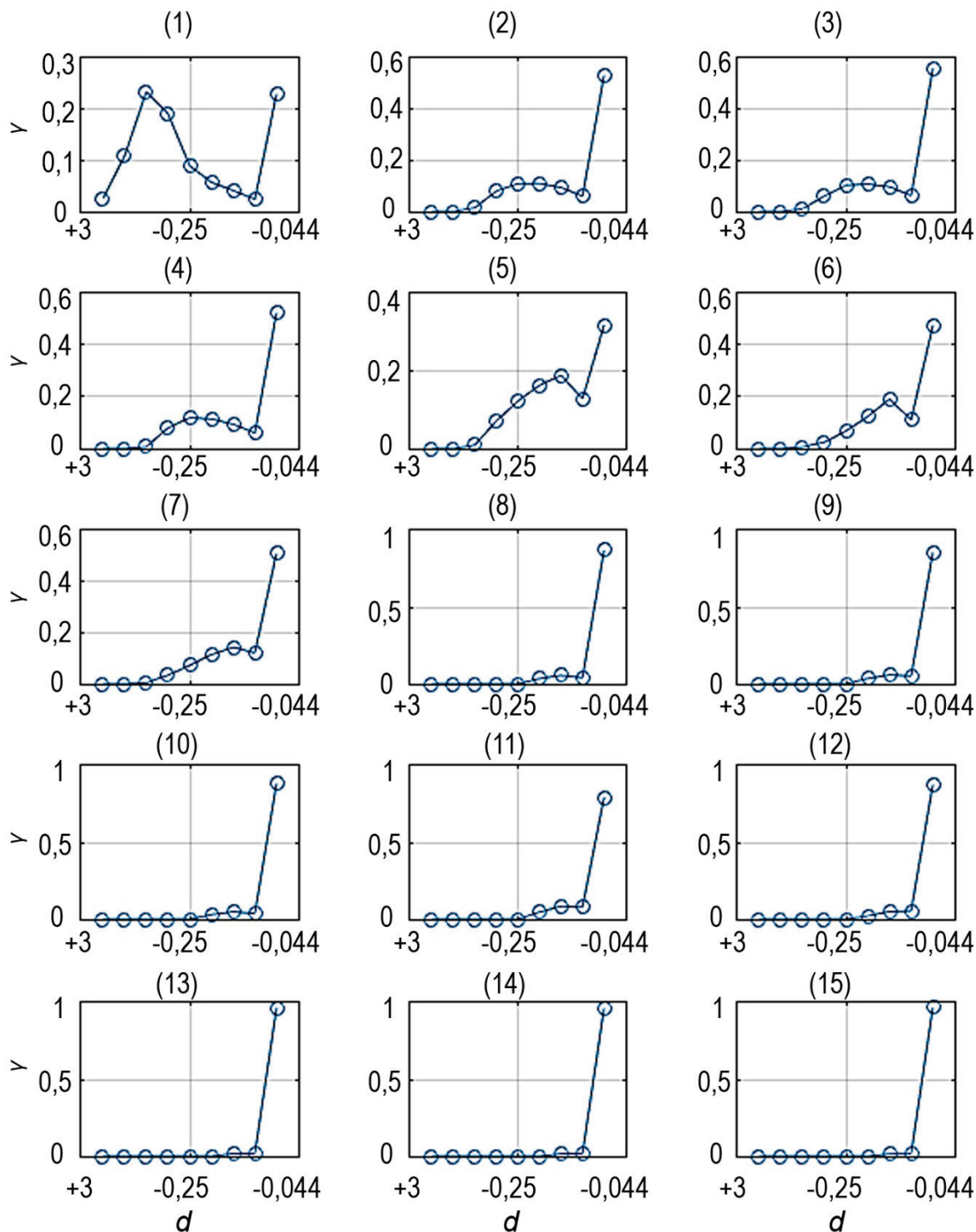


Рис. 2. Распределение по технологической линии выхода классов крупности твердых частиц пульпы

Fig. 2. Distribution on a technological line of an output of coarseness classes of pulp solid phase

с предельными  $\beta^d(0,t)0$  и начальными условиями  $\beta^d(\ell,0)=\beta_0^d(\ell)$ . Методы осуществления декомпозиции систем, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных первого и второго порядка, в пространственной и временной областях представлены в работах [24–27].

Пространственно-временная переменная  $\beta^d(\ell,t)$  распределенной системы управления может быть

расширена рядом пространственных базисных функций  $\{\varphi_i(\ell)\}_{i=1}^{\infty}$ . Для этого выполняют аппроксимацию функции рядом Фурье [28]:

$$\beta^d(\ell,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\ell) \beta_i^d(t). \quad (5)$$

Для получения модели вида (4), которая будет применима на практике, следует упорядочить ба-

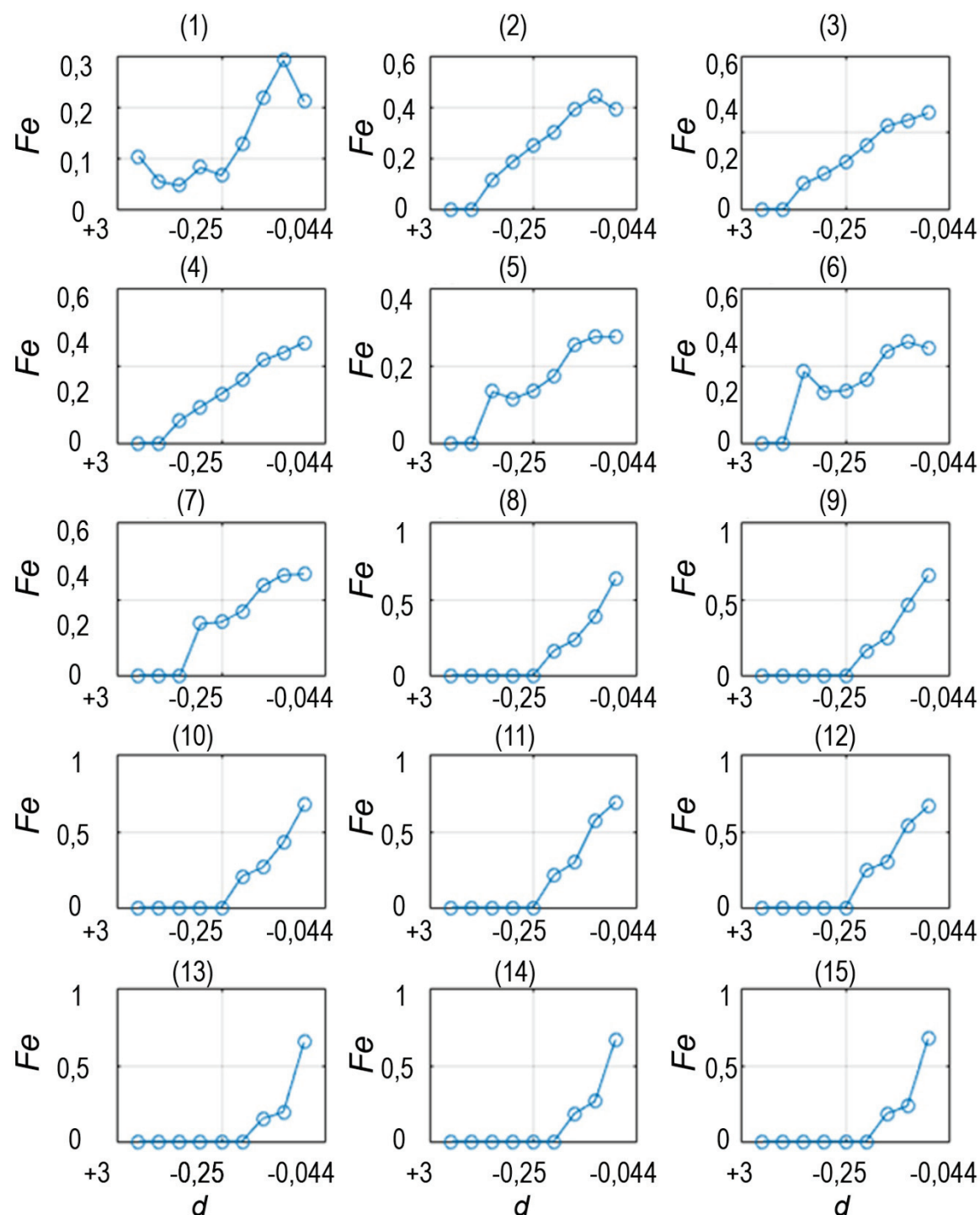


Рис. 3. Распределение по технологической линии функции содержания железа в классах крупности твердых частиц пульпы

Fig. 3. Distribution of iron content function in the classes of pulp solid phase

зисные функции в выражении (5) по возрастанию частоты. После чего оставить первые  $n$  функций, выбрав  $n$  таким образом, чтобы обеспечить необходимую точность математической модели [24, 29]:

$$\beta_n^d(\ell, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\ell) \beta_i^d(t). \quad (6)$$

Выполненная декомпозиция на пространственную и временную компоненты позволит предста-

вить исходные уравнения процесса обогащения руды в частных производных в виде системы конечной размерности [24]. Восстановление пространственно-временной системы осуществляют при помощи пространственно-временного синтеза.

На основе результатов исследований [30], выполненных для нелинейных динамических процессов с распределенными параметрами в условиях промышленного производства, можно сде-

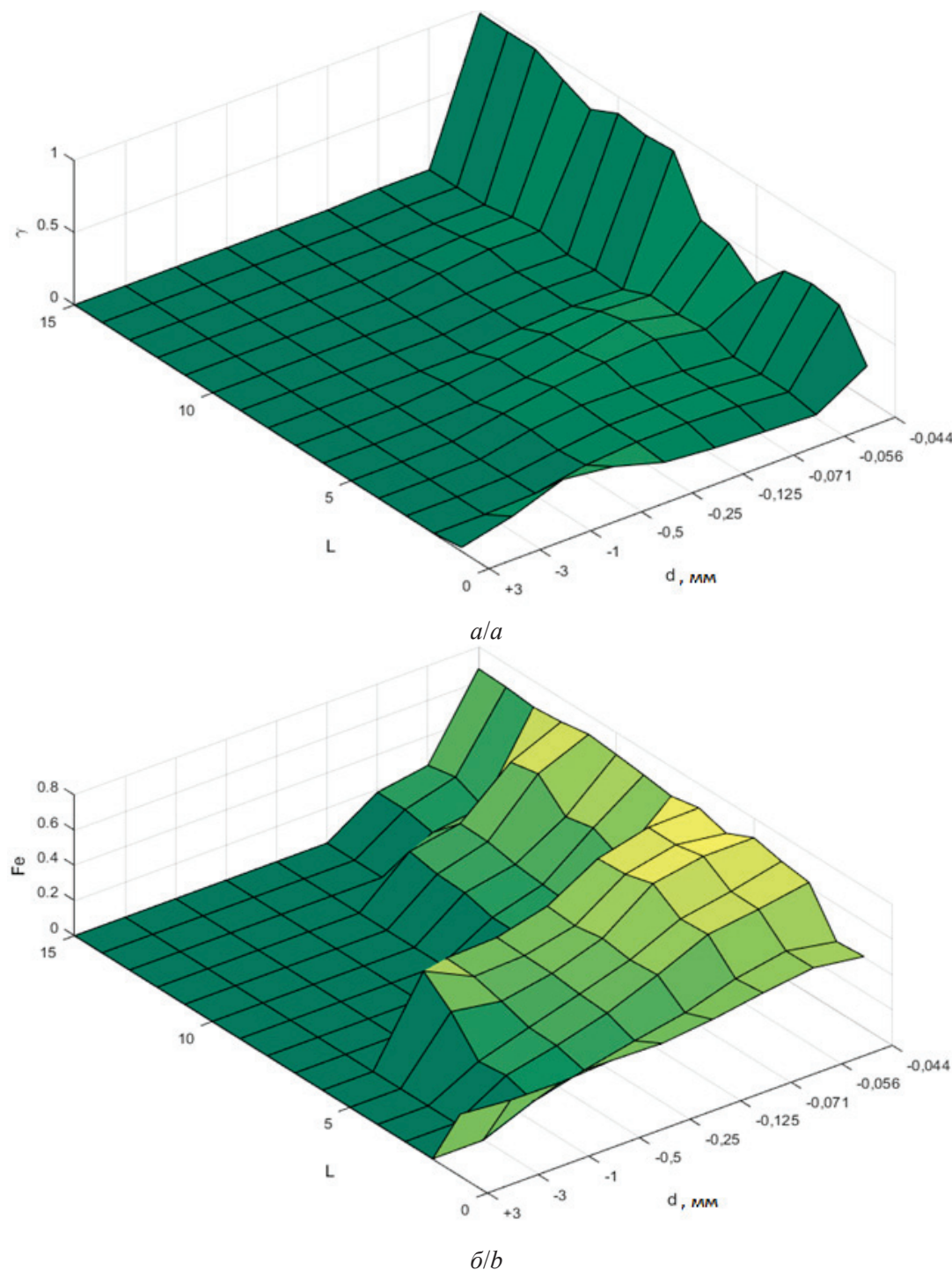


Рис 4. Распределение по технологической линии обогащения: а) выход классов крупности; б) содержание железа общего в промпродукте  
 Fig. 4. Distribution by enrichment processing line: а) yield of the fineness classes of the pulp solid phase; б) total iron content in the product

лать вывод о том, что использование метода Карунена–Лоева является целесообразным для идентификации пространственных базисных функций в модели (6), при одновременном использовании временных функций Лагерра. Преобразование Карунена–Лоева сигнала  $\beta^d(t)$  является разложением сигнала по базису ортогональных функций [24]:

$$\int_0^T K(t, s) \varphi_j(s) ds = \lambda_j \varphi_j(t);$$

$$\beta^d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} a_n \varphi_n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $K(t, s)$  – корреляционная функция. Основная идея данного подхода заключается в существовании и использовании связанного со свойствами сигнала  $\beta^d(t)$  ядра.

Задача вычисления наиболее характерной пространственной структуры  $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$  среди репрезентативных данных процесса обогащения руды  $\{\beta^d(\lambda, t)\}_{i=1, t=1}^{N, L}$  решена путем минимизации целевой функции [24]:

$$\min_{\varphi_i(x)} \left( \left[ \beta^d(\ell_i, t) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(\ell) (\varphi_i(\ell), \beta^d(\ell_i, t)) \right]^2 \right);$$

$$(\varphi_i(\ell), \varphi_i(\ell)) = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Ограничение  $(\varphi_i(\ell), \varphi_i(\ell)) = 1, i = \overline{1, n}$  в задаче (7) наложено для того, чтобы гарантировать единственность функции  $\varphi_i(\ell)$ . Пространственно-временная динамика процесса обогащения разделена на ортонормированные пространственные и временные моды, используя сингулярное разложение:

$$\beta^d(\ell, t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \varphi_i(\ell) \psi_i(t), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m, \quad (8)$$

где сингулярные величины  $\varphi_i(t)$  обозначают значимость мод, левые сингулярные функции  $\varphi_i(t)$  представляют пространственные моды, а правые сингулярные функции  $\psi_i(t)$  – временные моды.

При разложении  $m$ -порядка решением будут первые  $n$  пространственных мод. В случае, когда отсутствует точное описание процесса обогащения руды уравнениями динамики в частных производных вида (8), возникает необходимость идентификации системы по входным и выходным данным с помощью метода минимизации ошибки прогнозирования [24].

### Результаты исследования

Правильные выводы о качестве ведения технологического процесса можно сделать только на основе достаточно большого количества данных о выходе различных по составу и крупности классов исходного материала в конкретных условиях обогащательного производства. Информация о такой сложной системе частиц, как реальная пульпа, может быть представлена совокупностью фракционных выдержек или разграничительных цифр по

каждой элементарной категории долей (классов) с известным параметром разделения и крупностью. Чем больше число классов, на которые разбит частицы материала, поступающего на обогащение, тем полнее будет расчетная информация для технолога или проектировщика о поведении этого материала в зоне сепарационных агрегатов. На основе полученных данных можно регулировать процесс обогащения, изменяя скорость подачи материала (производительность), магнитную силу (магнитная сепарация), реагентный режим (флотация) и другие при условии заданного объема изъятия долей полезного компонента в концентрат [31].

Наиболее точную оценку качества работы технологических агрегатов обогащательного производства может дать информация о содержании полезного компонента по всему спектру гранулометрической характеристики перерабатываемой руды. Поскольку эта характеристика является нелинейной функцией с большим количеством входных и выходных параметров, модель этих объектов имеет высокую размерность, что делает ее неудобной для анализа и использования при формировании управления технологическим процессом.

Уменьшение размерности данных является эффективным инструментом для работы с многомерными данными. Цель редукции заключается не только в снижении вычислительной сложности, но и в стремлении структурировать полученную информацию, выделить основные составляющие исследуемого процесса.

Вектор сигналов технологической линии обогащения железорудного сырья (3) в момент времени  $t$ , который в общем виде может быть представлен следующим образом:

$$\bar{X}(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(P)}(t))^T, \quad p = \overline{1, P},$$

целесообразно преобразовать в вектор

$$\bar{R}(t) = (r^{(1)}(t), r^{(2)}(t), \dots, r^{(P')}(t))^T, \quad p = \overline{1, P'},$$

где  $P' \ll P$ , то есть вектор существенно меньшей размерности, состоящий из наиболее информативных переменных входного вектора.

В то же время элементы вектора  $\bar{R}(t)$  определяют по совокупности входных признаков  $\bar{X}(t)$ , например их линейных комбинаций. Соотношение между векторами  $\bar{R}(t)$  и  $\bar{X}(t)$  представим как [32]:

$$\bar{R}(t) = \bar{E} \{ \bar{X}(t) \},$$

где  $\bar{E}$  – оператор преобразования в пространство меньшей размерности. Применение данного подхода позволит повысить эффективность идентификации распределенных процессов обогащения рудного материала. При формировании управляющих воздействий следует выполнить обратное преобразование к пространству исходной размерности:

$$\bar{X}(t) = \bar{E}^{-1} \{ \bar{R}(t) \},$$

где  $\bar{E}^{-1}$  – оператор преобразования в пространство начальной размерности.

С точки зрения характера исходных данных методы снижения размерности классифицируют на две категории: линейные и нелинейные. По степени сохранности геометрической структуры редукции они включают в себя локальный и глобальный подход.

Методы моделирования многообразия (Manifold Learning) можно разделить на три категории [33]: глобальное сопоставление линейной модели, нелинейный метод сохранения локального свойства и нелинейный метод сохранения глобального свойства. Основные отличия глобального и локального метода лежат в локальной структуре.

В табл. 1 перечислены основные характеристики рассматриваемых методов снижения размерности: параметрический характер отражения между многомерным и маломерным пространствами; свободные параметры, которые должны быть оптимизированы; вычислительная сложность алгоритма; необходимый объем оперативной памяти [33].

Таблица 1. Свойства методов снижения размерности

Table 1. Properties of methods for dimension reduction

| Метод снижения размерности<br>Method for dimension reduction | Параметризация<br>Parameterization | Свободные параметры<br>Free parameters | Вычислительная сложность<br>Computational complexity | Объем оперативной памяти<br>RAM size |
|--------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| PCA                                                          | да yes                             | Отсутствуют Absent                     | $O(D^3)$                                             | $O(D^2)$                             |
| MDS                                                          | нет no                             | $k$                                    | $k$                                                  | $O(nk^3)$                            |
| Isomap                                                       | нет no                             | $k$                                    | $k$                                                  | $O(n^2)$                             |
| LLE                                                          | нет no                             | $k$                                    | $k$                                                  | $O(pn^2)$                            |
| Hessian LLE                                                  | нет no                             | $k$                                    | $k$                                                  | $O(pn^2)$                            |
| Laplacian EM                                                 | нет no                             | $k, \sigma$                            | $k, \sigma$                                          | $O(pn^2)$                            |
| Diffusion maps                                               | нет no                             | $\sigma, t$                            | $\sigma, t$                                          | $O(n^2)$                             |
| LTSA                                                         | нет no                             | $k$                                    | $k$                                                  | $O(pn^2)$                            |

Анализ свойств, приведенных в табл. 1, показывает:

- 1) Большинство методов снижения размерности не является параметрическими. Это означает, что метод не определяет прямое отражение с многомерного в маломерное пространство (или наоборот).
- 2) Функции большинства нелинейных методов имеют свободные параметры, которые должны быть оптимизированы. Под свободными параметрами понимаются те что непосредственно влияют на функцию стоимости, которая оптимизируется. Невыпуклые методы снижения размерности имеют дополнительные свободные параметры, такие как скорость обучения и граничное число итераций. Кроме того, метод LLE использует при исчислении параметр регуляризации реконструкции весов.
- 3) Вычислительная сложность алгоритма имеет важное значение для его практической применимости. Вычислительная сложность в этом случае определяется следующими факторами: свойствами набора данных: количеством точек входных данных  $n$  и их размерностью  $D$ ; пара-

метрами метода: числом ближайших соседей  $k$  (для методов, основанных на графах), числом итераций  $i$  (для итерационных методов), отношением ненулевых элементов в разреженной матрице к общему количеству элементов; количеством  $m$  локальных моделей анализаторов факторов в LLC.

Рассмотрим результаты исследования основных подходов к снижению размерности на примере трехмерного множества нормированных характеристик рудного материала (рис. 5).

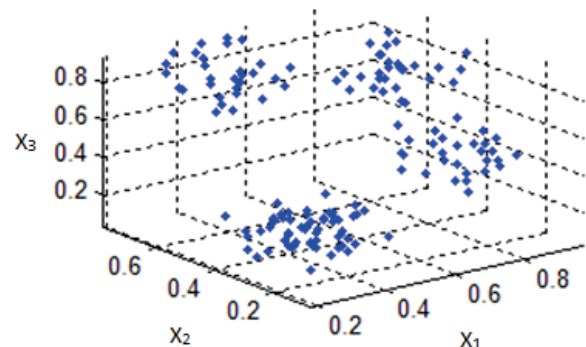


Рис. 5. Результат кластеризации входных данных

Fig. 5. Result of input clustering

Для сравнения эффективности различных методов использована информация о разделении магнитным сепаратором измельченных частиц в железорудной пульпе. Каждая минералогическая разновидность пульпы характеризуется несколькими параметрами. Набор данных представляет собой совокупность фракционных выдержек или разграничительных цифр по каждой элементарной категории долей (классов) с известным параметром разделения и крупностью.

Метод главных компонент (Principal Components Analysis, PCA) позволяет получить представление данных меньшей размерности, которое описывает направление наибольшего изменения входных данных [33]. Полученное линейное преобразование  $T$  максимизирует выражение:

$$F = T^T \text{cov}_{X-\bar{X}} T \rightarrow \max,$$

где  $\text{cov}_{X-\bar{X}}$  – ковариационная матрица центрированных относительно начала координат данных  $X$ . Применение данного метода позволило получить корректное отображение входных данных в пространство меньшей размерности по 1,04–1,15 с. Результат проецирования входных данных на первые две главные компоненты ( $k_1, k_2$ ) представлен на рис. 6.

Нелинейный метод многомерного шкалирования (multidimensional scaling, MDS) [34, 35] сохраняет значения попарных расстояний между точками данных. Качество отображения описывается функцией, которая оценивает разницу попарных расстояний в начальном многомерном представлении и полученном представлении меньшей размерности. Примером такой функции является функция напряжения:

$$F(Y) = \sum_{ij} (\|x_i - x_j\| - \|y_i - y_j\|)^2,$$

где  $\|x_i - x_j\|$  – Эвклидово расстояние между точками данных большей размерности;  $\|y_i - y_j\|$  – Эвклидово расстояние между точками данных меньшей размерности.

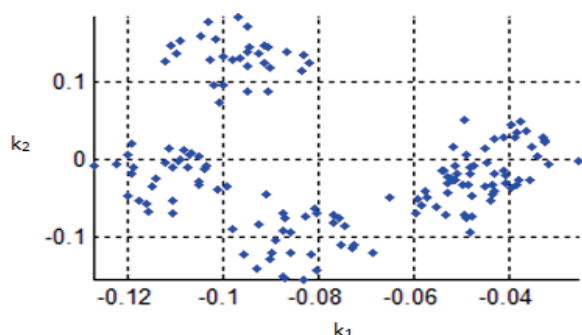


Рис. 6. Результат снижения размерности с помощью метода PCA

Fig. 6. Result of dimension reduction using the PCA method

Альтернативой рассматриваемой функции может быть функция стоимости Сэммона, которая делает больший акцент на сохранении сначала малых расстояний:

$$F(Y) = \frac{1}{\sum_{ij} \|x_i - x_j\|} \sum_{ij} \frac{(\|x_i - x_j\| - \|y_i - y_j\|)^2}{\|x_i - x_j\|}.$$

Минимизация функции напряжения выполнена с использованием метода сопряженных градиентов [34]. Время получения отображения входных данных в пространство меньшей размерности при использовании данного метода составило 21,07–22,86 с. Графическое представление результата проецирования входных данных на первые две главные компоненты  $(k_1, k_2)$  методом MDS представлено на рис. 7.

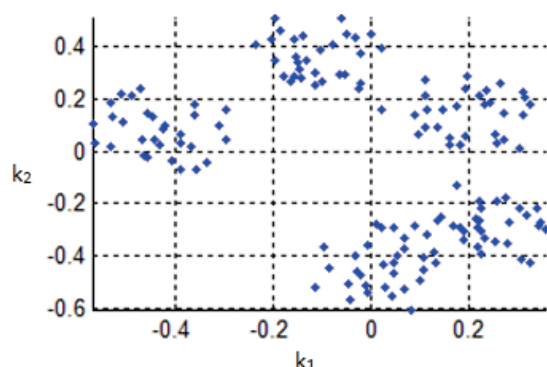


Рис. 7. Результат снижения размерности с помощью метода MDS

Fig. 7. Result of dimension reduction using the MDS method

Недостатком метода многомерного шкалирования является то, что он не позволяет учитывать распределение прилегающих точек, поскольку основывается на Эвклидовых расстояниях [33]. Например, в случае, когда многомерные данные относят-

ся к криволинейному многообразиям, расстояние между ними может быть значительно больше, чем Эвклидово. В этом случае целесообразно использовать метод Isomap [36], учитывающий криволинейное расстояние между точками данных. Геодезические расстояния между точками в Isomap вычисляются с помощью построения графа. При этом каждая точка связана с ее  $k$  ближайшими соседями во множестве данных  $X$ . Самый короткий путь между двумя точками графа, который оценивает криволинейное расстояние между двумя точками, определяется с помощью алгоритма Дейкстры [37, 38]. Результат проецирования входных данных на первые две главные компоненты  $(k_1, k_2)$  с помощью метода Isomap представлен на рис. 8.

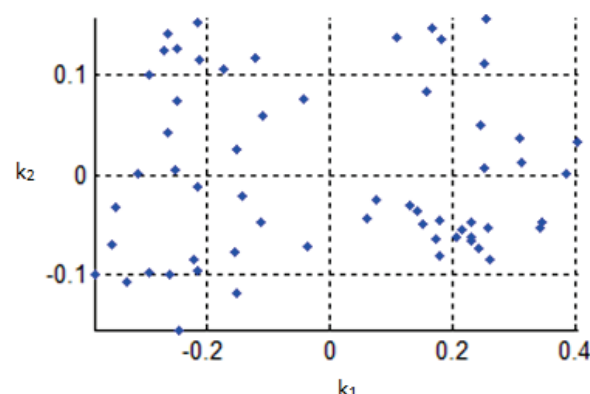


Рис. 8. Результат снижения размерности с помощью метода ISOMAP

Fig. 8. Result of dimension reduction using ISOMAP method

Метод диффузных карт основывается на анализе процесса Марковского случайного перемещения на пространстве данных. Первым этапом метода диффузных карт (Diffusion Maps, DM) [39, 40] является формирование графа данных. При вычислении матрицы  $W$  весов ребер графа использованы гауссовы ядерные функции. Затем на основе матрицы  $W$  вычисляется нормированная матрица  $p^{(1)}$ :

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{w_{ij}}{\sum_k w_{ik}}.$$

Матрица  $p^{(1)}$  представляет вероятность перехода от одной точки данных к другой за единицу времени. Матрица переходов вперед для  $t$ -й единицы времени  $p^{(t)}$  определяется  $(p^{(1)})^t$ . На основе вероятностей перехода  $p_{ij}^{(t)}$  определяется расстояние распространения:

$$D^{(t)}(x_i, x_j) = \sum_k \frac{(p_{ik}^{(t)} - p_{jk}^{(t)})^2}{\psi(x_k)^{(0)}},$$

где  $\psi(x_i)^{(0)} = m_i / \sum_j m_j$  – коэффициент, придает больше веса элементам графа с большей плотностью,  $m_i = \sum_j p_{ij}$  – степень узла. Из данного уравнения можно увидеть, что пары точек с большей вероятностью перехода имеют меньшее расстояние распространения. Вычисление расстояния распространения основывается на многих путях графа, что обеспечивает большую устойчивость к шумам, чем гео-

дезическое расстояние. Ненулевые главные собственные вектора для формирования представления меньшей размерности  $Y$ , которое позволяет сохранить расстояние распространения, находят из выражения:

$$P^{(i)}Y = \lambda Y.$$

Собственные векторы в представлении меньшей размерности являются нормируемыми по соответствующим собственным значениям:

$$Y = \{\lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3, \dots, \lambda_{d+1} v_{d+1}\}.$$

Результат проецирования входных данных на первые две главные компоненты ( $k_1, k_2$ ) с помощью метода диффузных карт представлен на рис. 9.

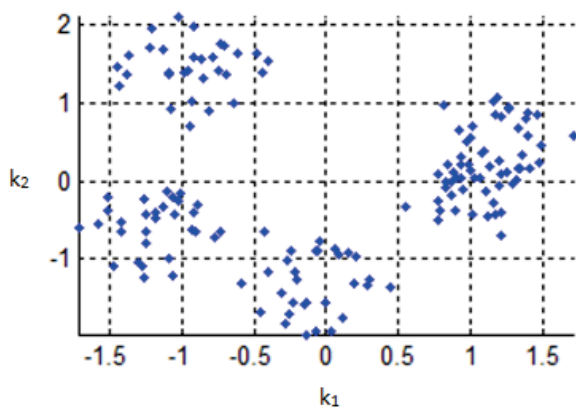


Рис. 9. Результат снижения размерности с помощью метода Diffusion Map

Fig. 9. Result of dimension reduction using the Diffusion Map method

Сравнение качества получаемых данных низкой размерности осуществлялось путем оценки степени сохранности локальной структуры данных. Оценка выполнялась двумя способами [41]: путем оценки ошибки классификации  $k$ -ближайшего соседа для классификаторов, обучающихся на низкоразмерных представлениях данных. Классификация данных в низкоразмерном пространстве проводилась при  $k=12$ ; путем оценки достоверности и непрерывности представлений малой размерности.

Степень достоверности определяется как:

$$T(k) = 1 - \frac{2}{nk(2n-3k-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in U_i^{(k)}} (r(i, j-k)),$$

где  $r(i, j)$  – ранг точки данных  $J$  в низкоразмерном пространстве в соответствии с вычисленными попарными расстояниями между низкоразмерными точками данных; переменная  $U$  указывает на то множество точек, которые являются одними из  $K$  ближайших соседей в низкоразмерном пространстве. Мера непрерывности определяется по формуле:

$$C(k) = 1 - \frac{2}{nk(2n-3k-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in V_i^{(k)}} (r(i, j-k)),$$

где  $r(i, j)$  – ранг точки данных  $J$  в пространстве высокой размерности, вычисленный в соответствии с попарными расстояниями между высокоразмер-

ными точками данных; переменная  $V$  указывает на то множество точек, которые являются одними из  $K$  ближайших соседей в пространстве высокой размерности.

### Обсуждение результатов

Ошибки обобщения  $k$ -Nn достоверности и непрерывности позволяют оценить степень сохранности локальной структуры данных. Оценка качества на основе ошибки обобщения, надежности и непрерывности имеет важное преимущество перед оценкой ошибки реконструкции, так как для успешной визуализации или классификации данных их локальная структура должна быть сохранена.

В табл. 2 приведены ошибки обобщения  $k$ -Nn классификаторов и соответствующие значения достоверности, полученные путем применения различных методов снижения размерности.

Таблица 2. Анализ методов снижения размерности данных  
 Table 2. Analysis of the data reduction methods

| Метод<br>Method | Установки параметров<br>Parameter settings | Ошибки обобщения классификаторов (%)<br>Classifiers generalization errors (%) | Достоверность<br>Reliability | Непрерывность<br>Continuity |
|-----------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| PCA             | нет/no                                     | 5,15                                                                          | 0,95                         | 0,92                        |
| MDS             | $5 \leq k \leq 15$                         | 4,68                                                                          | 0,82                         | 0,96                        |
| Isomap          | $5 \leq k \leq 15$                         | 4,98                                                                          | 0,85                         | 0,73                        |
| LLE             | $5 \leq k \leq 15$                         | 4,97                                                                          | 0,71                         | 0,75                        |
| Hessian LLE     | $5 \leq k \leq 15$                         | 4,11                                                                          | 0,52                         | 0,63                        |
| Laplacian EM    | $5 \leq k \leq 15$<br>$\sigma=1$           | 4,65                                                                          | 0,85                         | 0,79                        |
| Diffusion Maps  | $10 \leq t \leq 100$<br>$\sigma=1$         | 3,86                                                                          | 0,93                         | 0,94                        |
| LTSA            | $5 \leq k \leq 15$                         | 3,62                                                                          | 0,59                         | 0,64                        |

Таким образом, при формировании математических моделей процессов обогащения руды целесообразно выполнять снижение размерности, применяя нелинейные методы (Isomap, Laplacian Eigenmap). Вместе с тем названные методы после преобразования данных не позволяют обеспечить оптимальные условия для классификации. Вследствие этого кроме нелинейного преобразования пространства необходимо увеличивать различительную способность признаков с применением анализа главных компонент.

Вычисленные значения результативности методов снижения размерности с использованием функции стоимости Сэммона приведены в табл. 3.

Наилучшие результаты были получены методом диффузных карт, при этих обстоятельствах ошибка Сэммона составила  $\varepsilon=2,6\%$ ,  $\sigma(\varepsilon)=0,011$ , среднее время выполнения  $T=0,127$  с.

### Выводы

- Основываясь на том, что конечные результаты работы обогащательной фабрики зависят от множества входных параметров и результатов функционирования комплекса взаимосвязан-

**Таблица 3.** Результативность методов снижения размерности данных

**Table 3.** Effectiveness of the data reduction methods

| Метод<br>Method | Ошибка<br>Error<br>$\varepsilon$ | Стандартное отклонение<br>ошибки<br>Error standard deviation<br>$\sigma(\varepsilon)$ | Среднее время<br>выполнения<br>Average execution<br>time $T$ , с |
|-----------------|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| PCA             | 0,028                            | 0,012                                                                                 | 0,18008                                                          |
| MDS             | 0,027                            | 0,011                                                                                 | 0,90678                                                          |
| Isomap          | 0,084                            | 0,014                                                                                 | 0,65598                                                          |
| LLE             | 0,241                            | 0,018                                                                                 | 0,36894                                                          |
| Hessian LLE     | 0,381                            | 0,015                                                                                 | 0,23029                                                          |
| Laplacian EM    | 0,264                            | 0,019                                                                                 | 0,14284                                                          |
| DM              | 0,026                            | 0,011                                                                                 | 0,12676                                                          |
| LTSA            | 0,317                            | 0,012                                                                                 | 0,06873                                                          |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Golik V., Komashchenko V., Morkun V. Feasibility of using the mill tailings for preparation of self-hardening mixtures // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 3. – P. 38–41.
- Линч А.Дж. Циклы дробления и измельчения. – М.: Недра, 1981. – 342 с.
- Процунто В.С. Автоматизированные системы управления технологическими процессами обогатительных фабрик. – М.: Недра, 1987. – 253 с.
- Morkun V., Morkun N., Tron V. Model synthesis of nonlinear nonstationary dynamical systems in concentrating production using Volterra kernel transformation // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 10. – P. 6–9.
- Morkun V., Tron V., Paraniuk D. Formation of rock geological structure model for drilling process adaptive control system // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 5. – P. 12–15.
- Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
- Григорьев В.В., Быстров С.В., Першин И.М. Синтез распределенных регуляторов. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. – 198 с.
- Першин И.М., Малков А.В., Воронин А.Ю. Системы с распределенными параметрами. – Пятигорск: СКФУ, 2013. – 40 с.
- Investigation of the effect of the gas-containing suspensions characteristics on the parameters of the of ultrasonic waves propagation process / V. Morkun, N. Morkun, V. Tron, S. Hryshchenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – V. 6. – № 5 (90). – P. 49–58.
- Dynamic spatio-temporal models for spatial data / T.J. Hefley, M.B. Hooten, E.M. Hanks, R.E. Russell, D.P. Walsh // Spatial Statistics. – 2017. – V. 20. – P. 206–220.
- Spatio-temporal model structures with shared components for semi-continuous species distribution modelling / I. Paradinas, D. Conesa, A. López-Quilez, J.M. Bellido // Spatial Statistics. – 2017. – V. 22. – P. 2. – P. 434–450.
- Wilson P.W. Dimension reduction in nonparametric models of production // European Journal of Operational Research. – 2018. – V. 267. – Iss. 1. – P. 349–367.
- Jiang H., Dong Y. Dimension reduction based on a penalized kernel support vector machine model // Knowledge-Based Systems. – 2017. – V. 138. – P. 79–90.
- Morkun V., Morkun N., Tron V. Formalization and frequency analysis of robust control of ore beneficiation technological processes under parametric uncertainty // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 5. – P. 7–11.
- Lansangan J.R.G., Barrios E.B. Simultaneous dimension reduction and variable selection in modeling high dimensional data // Computational Statistics & Data Analysis. – 2017. – V. 112. – P. 242–256.
- Tangkaratt V., Morimoto J., Sugiyama M. Model-based reinforcement learning with dimension reduction // Neural Networks. – 2016. – V. 84. – P. 1–16.
- Pulch R. Model order reduction and low-dimensional representations for random linear dynamical systems // Mathematics and Computers in Simulation. – 2018. – V. 144. – P. 1–20.
- Morkun V., Morkun N., Tron V. Distributed control of ore beneficiation interrelated processes under parametric uncertainty // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 8. – P. 18–21.
- Morkun V., Morkun N., Tron V. Distributed closed-loop control formation for technological line of iron ore raw materials beneficiation // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 7. – P. 16–19.
- Zhang D., Zhu Q., Zhang D. Multi-modal dimensionality reduction using effective distance // Neurocomputing. – 2017. – V. 259. – P. 130–139.
- Васильев А.Н. Математическое моделирование распределенных систем с помощью нейронных сетей // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 12. – С. 32–42.
- Дослідження впливу динамічних ефектів високоенергетичного ультразвуку на газові бульбашки у пульпі для управління параметрами її газової фази у процесі флотації: звіт про НДР / Керівник роботи Т.А. Олійник. – 0115U003053. – Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2016. – 201 с.
- Хмель І.В. Особливості технології подрібнення магнетитових кварцитів в умовах об'ємного нерівномірно-компонентного стиснення: дис. ... канд. техн. наук. – Кривий Ріг, 2016. – 158 с.
- Li H.-X., Qi C. Modeling of distributed parameter systems for applications – A synthesized review from time-space separation // Journal of Process Control. – 2010. – V. 20. – P. 891–901.
- Sooraksa P., Chen G. Mathematical modeling and fuzzy control of a flexible-link robot arm // Mathematical and Computer Modeling. – 1998. – V. 27 (6). – P. 73–93.
- Demetriou M.A., Fahroo F. Model reference adaptive control of structurally perturbed second-order distributed parameter systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2006. – V. 16. – P. 773–799.
- Moheimani S.O.R., Pota H.R., Petersen I.R. Spatial balanced model reduction for flexible structures // Automatica. – 1999. – V. 35. – P. 269–277.
- Zill D.G., Cullen M.R. Differential equations with boundary-value problems. 5<sup>th</sup> ed. – Pacific Grove, CA; Australia: Cole Thomson Learning, 2001. – 614 p.
- Fletcher C.A.J. Computational Galerkin methods. – New York: Springer, 1984. – 302 p.
- Qi C. Modeling of nonlinear distributed parameter system for industrial thermal processes: doctoral dissertation. – Hong Kong, 2009. – 186 p.

ных технологических агрегатов, предложен усовершенствованный подход к моделированию процессов обогащения железорудного сырья как пространственно-временных структур с распределенными параметрами с учетом показателей отдельных технологических стадий по всему спектру гранулометрической характеристики перерабатываемой руды.

- Для снижения размерности моделей объектов управления обогатительного производства, представленных как распределенные структуры, преобразовывающие содержимое и выход полезного компонента по всему спектру гранулометрической характеристики руды, целесообразно использовать метод диффузных карт, при этом ошибка Сэммона составила 2,6 %.

31. High-energy ultrasound using to improve the quality of iron ore particles purification in the process of its enrichment / V. Mor-kun, G. Gubin, T. Oliynyk, V. Lotous, V. Ravinskaia, V. Tron, N. Morkun, M. Oliynyk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – V. 6. – № 12 (90). – P. 41–51.
32. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности: справ. изд. / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин / под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
33. Maaten van der L., Postma E.O., Herik van den H.J. Dimensionality reduction: a comparative review. 2008. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.125.6716&rep=rep1&type=pdf> (поступила 05.09.2019).
34. Cox T., Cox M. Multidimensional scaling. – London, UK: Chapman & Hall, 1994. – 10 p.
35. Kruskal J.B. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis // Psychometrika. – 1964. – V. 29. – P. 1–27.
36. Tenenbaum J.B. Mapping a manifold of perceptual observations // In Advances in neural information processing systems. – 1998. – V. 10. – P. 682–688.
37. Dijkstra E.W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische Mathematik. – 1959. – V. 1. – P. 269–271.
38. Floyd R.W. Algorithm 97: shortest path // Communications of the ACM. – 1962. – V. 5 (6). – 345 p.
39. Lafon S., Lee A.B. Diffusion maps and coarse-graining: a unified framework for dimensionality reduction, graph partitioning, and data set parameterization // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2006. – V. 28 (9). – P. 1393–1403.
40. Diffusion maps, spectral clustering and the reaction coordinates of dynamical systems / B. Nadler, S. Lafon, R.R. Coifman, I.G. Kevrekidis // Applied and Computational Harmonic Analysis: Special Issue on Diffusion Maps and Wavelets. – 2006. – V. 21. – P. 113–127.
41. Moodi H., Bustan D. On identification of nonlinear systems using Volterra kernels expansion on Laguerre and wavelet function // Chinese Control and Decision Conference. – China, 2010. – P. 1141–1145.

Поступила 12.09.2019 г.

#### Информация об авторах

**Моркун В.С.**, доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе Криворожского национального университета.

**Моркун Н.В.**, доктор технических наук, доцент, заведующая кафедрой автоматизации, компьютерных наук и технологий Криворожского национального университета.

**Третьяк В.В.**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации, компьютерных наук и технологий Криворожского национального университета.

**Грищенко С.Н.**, кандидат педагогических наук, заведующая отделом научно-технической информации научно-исследовательской части Криворожского национального университета.

**Суворов А.И.**, научный сотрудник Академии горных наук Украины.

**Паранюк Д.И.**, инженер департамента по безопасности публичного акционерного общества «АрселорМиттал Кривой Рог».

**Сердюк А.Ю.**, ассистент кафедры автоматизации, компьютерных наук и технологий Криворожского национального университета.

UDC 519.714: 622.7

## REDUCING DIMENSION OF SPATIO-TEMPORAL MODELS OF NONLINEAR DYNAMIC PROCESSES OF IRON ORE RAW MATERIALS ENRICHMENT

**Vladimir S. Morkun<sup>1</sup>,**  
morkunv@gmail.com

**Natalia V. Morkun<sup>1</sup>,**  
nmorkun@gmail.com

**Vitaliy V. Tron<sup>1</sup>,**  
vtron@ukr.net

**Svitlana M. Hryshchenko<sup>1</sup>,**  
s-grischenko@ukr.net

**Oleksandr I. Suvorov<sup>2</sup>,**  
o.suvorov@i.ua

**Dmitriy I. Paraniuk<sup>3</sup>,**  
paranyuk@i.ua

**Oleksandra J. Serdiuk<sup>1</sup>,**  
o.serdiuk@i.ua

<sup>1</sup> Krivoi Rog National University,  
11, Vitaliy Matushevych street, Krivoi Rog, 50027, Ukraine.

<sup>2</sup> Academy of Mining Sciences of Ukraine,  
37, Pushkin street, Krivoi Rog, 50002, Ukraine.

<sup>3</sup> Private Joint Stock Company «ArcelorMittal Krivoi Rog»,  
1, Krivorozhstal street, Krivoi Rog, 50000, Ukraine.

**The relevance** of the research is caused by the need to improve the accuracy of mathematical models of nonlinear dynamic processes of iron ore raw materials enrichment. This direction of improving the modeling tools for complex systems will make better the control of enrichment and the quality of the final products.

**The main aim** of the research is to increase the accuracy of dynamic spatiotemporal mathematical models of interrelated processes for control systems of the technological enrichment line of ore represented by mineral-technological varieties.

**Objects:** dynamic spatiotemporal mathematical models of interrelated processes for control systems of the technological ore enrichment line.

**Methods:** systematization and analysis of the developed methods of mathematical modeling of distributed interrelated processes, methods of mathematical statistics and probability theory for processing experimental results, computer information and software technologies for implementing the developed approaches.

**Results.** The authors have proposed the improved approach for modeling iron ore raw material enrichment as spatio-temporal structures with distributed parameters, taking into account the indices of individual technological stages throughout the spectrum of the granulometric characteristics of the processed ore. To reduce the dimensionality of the models represented as distributed structures of control objects, which transform the content and yield of the useful component over the entire spectrum of ore granulometric characteristics, it is advisable to use the method of diffusion maps, in this case the Sammon's error was 2,6 %.

### Key words:

Space-temporal model, dimensional reduction, diffuse maps method, ore dressing.

### REFERENCES

1. Golik V., Komashchenko V., Morkun V. Feasibility of using the mill tailings for preparation of self-hardening mixtures. *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, vol. 3, pp. 38–41.
2. Lynch A. *Tsikly drobleniya i izmelcheniya* [Crushing and grinding cycles]. Moscow, Nedra Publ., 1981. 342 p.
3. Protsuto V.S. *Avtomatizirovannye sistemy upravleniya tekhnologicheskimi protsessami obogatitelnykh fabrik* [Automated control systems of technological processes of concentrating factories]. Moscow, Nedra Publ., 1987. 253 p.
4. Morkun V., Morkun N., Tron V. Model synthesis of nonlinear nonstationary dynamical systems in concentrating production using Volterra kernel transformation. *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, vol. 10, pp. 6–9.
5. Morkun V., Tron V., Paraniuk D. Formation of rock geological structure model for drilling process adaptive control system. *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, vol. 5, pp. 12–15.
6. Butkovskiy A.G. *Teoriya optimalnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Theory of optimal control of systems with distributed parameters]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 474 p.
7. Grigoryev V.V., Bystrov S.V., Pershin I.M. *Sintez raspredelennykh regulyatorov* [Synthesis of distributed controllers]. St-Petersburg, SPbGU ITMO Publ., 2010. 198 p.

8. Pershin I.M., Malkov A.V., Voronin A.Yu. *Sistemy s raspredelenymi parametrami* [Systems with distributed parameters]. Pyatigorsk, SKFU Publ., 2013. 40 p.
9. Morkun V., Morkun N., Tron V., Hryshchenko S. Investigation of the effect of the gas-containing suspensions characteristics on the parameters of the ultrasonic waves propagation process. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2017, vol. 6, 5 (90), pp. 49–58.
10. Hefley T.J., Hooten M.B., Hanks E.M., Russell R.E., Walsh D.P. Dynamic spatio-temporal models for spatial data. *Spatial Statistics*, 2017, vol. 20, pp. 206–220.
11. Paradinas I., Conesa D., López-Quílez A., Bellido J.M. Spatio-temporal model structures with shared components for semi-continuous species distribution modelling. *Spatial Statistics*, 2017, vol. 22, P. 2, pp. 434–450.
12. Wilson P.W. Dimension reduction in nonparametric models of production. *European Journal of Operational Research*, 2018, vol. 267, Iss. 1, pp. 349–367.
13. Jiang H., Dong Y. Dimension reduction based on a penalized kernel support vector machine model. *Knowledge-Based Systems*, 2017, vol. 138, pp. 79–90.
14. Morkun V., Morkun N., Tron V. Formalization and frequency analysis of robust control of ore beneficiation technological processes under parametric uncertainty. *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, vol. 5, pp. 7–11.
15. Lansangan J.R.G., Barrios E.B. Simultaneous dimension reduction and variable selection in modeling high dimensional data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2017, vol. 112, pp. 242–256.
16. Tangkaratt V., Morimoto J., Sugiyama M. Model-based reinforcement learning with dimension reduction. *Neural Networks*, 2016, vol. 84, pp. 1–16.
17. Pulch R. Model order reduction and low-dimensional representations for random linear dynamical systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2018, vol. 144, pp. 1–20.
18. Morkun V., Morkun N., Tron V. Distributed control of ore beneficiation interrelated processes under parametric uncertainty. *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, vol. 8, pp. 18–21.
19. Morkun V., Morkun N., Tron V. Distributed closed-loop control formation for technological line of iron ore raw materials beneficiation. *Metallurgical and Mining Industry*, 2015, vol. 7, pp. 16–19.
20. Zhang D., Zhu Q., Zhang D. Multi-modal dimensionality reduction using effective distance. *Neurocomputing*, 2017, vol. 259, pp. 130–139.
21. Vasilyev A. N. *Matematicheskoe modelirovanie raspredelennykh sistem s pomoshchyu neyronnykh setey* [Mathematical modeling of distributed systems using neural networks]. *Matematicheskoye modelirovanie*, 2007, vol. 19, no. 12, pp. 32–42.
22. Oliynyk T.A. *Doslidzhennya vplyvu dynamichnykh efektyv vysokoenergetychnoho ultrazvuku na hazovi bulbashky u pulpi dlya upravlinnya parametramy yiyi hazovoyi fazy u protsesi flotatsiyi. Zvit pro NDR* [Investigation of the influence of dynamic effects of high-energy ultrasound on gas bubbles in a pulp to control the parameters of its gas phase during flotation. Research report]. Krivoy Rog, Krivoy Rog National University Publ., 2016. 201 p.
23. Khmil I.V. *Osoblyvosti tekhnolohiyi podribnennyya mahnetyovyykh kvartsytyv v umovakh obyemnoho nerivnomirno-komponentnoho stysnennya*. Dis. Kand. nauk [Features of the technology of grinding magnetite quartzite in conditions of bulk non-uniformly-component compression. Cand. Diss.]. Krivoy Rog, 2016. 158 p.
24. Li H.-X., Qi C. Modeling of distributed parameter systems for applications – A synthesized review from time-space separation. *Journal of Process Control*, 2010, vol. 20, pp. 891–901.
25. Sooraksa P., Chen G. Mathematical modeling and fuzzy control of a flexible-link robot arm. *Mathematical and Computer Modeling*, 1998, vol. 27 (6), pp. 73–93.
26. Demetriou M.A., Fahroo F. Model reference adaptive control of structurally perturbed second-order distributed parameter systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, vol. 16, pp. 773–799.
27. Moheimani S.O.R., Pota H.R., Petersen I.R. Spatial balanced model reduction for flexible structures. *Automatica*, 1999, vol. 35, pp. 269–277.
28. Zill D.G., Cullen M.R. *Differential equations with boundary-value problems*. 5<sup>th</sup> ed. Cole Pacific Grove, CA; Australia, Thomson Learning, 2001. 614 p.
29. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin Methods*. New York, Springer, 1984. 302 p.
30. Qi C. *Modeling of nonlinear distributed parameter system for industrial thermal processes*. Doctoral dissertation. Hong Kong, 2009. 186 p.
31. Morkun V., Gubin G., Oliynyk T., Lotous V., Ravinskaya V., Tron V., Morkun N., Oliynyk M. High-energy ultrasound using to improve the quality of iron ore particles purification in the process of its enrichment. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2017, vol. 6, no. 12 (90), pp. 41–51.
32. Ayvazyan S.A., Bukhshtaber V.M., Enyukov I.S., Meshalkin L.D. *Prikladnaya statistika: klassifikatsiya i snizhenie razmernosti* [Applied statistics: classification and dimension reduction]. Ed. by S.A. Ayvazyan. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1989. 607 p.
33. Maaten van der L., Postma E.O., Herik van den H.J. *Dimensionality reduction: a comparative review*. 2008. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.125.6716&rep=rep1&type=pdf> (accessed 5 September 2019).
34. Cox T., Cox M. *Multidimensional scaling*. London, UK, Chapman & Hall, 1994. 10 p.
35. Kruskal J.B. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika*, 1964, vol. 29, pp. 1–27.
36. Tenenbaum J.B. Mapping a manifold of perceptual observations. *In Advances in neural information processing systems*, 1998, vol. 10, pp. 682–688.
37. Dijkstra E.W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1959, vol. 1, pp. 269–271.
38. Floyd R.W. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 1962, vol. 5 (6), 345 p.
39. Lafon S., Lee A.B. Diffusion maps and coarse-graining: a unified framework for dimensionality reduction, graph partitioning, and data set parameterization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, vol. 28 (9), pp. 1393–1403.
40. Nadler B., Lafon S., Coifman R.R., Kevrekidis I.G. Diffusion maps, spectral clustering and the reaction coordinates of dynamical systems. *Applied and Computational Harmonic Analysis: Special Issue on Diffusion Maps and Wavelets*, 2006, vol. 21, pp. 113–127.
41. Moodi H., Bustan D. On identification of nonlinear systems using Volterra kernels expansion on Laguerre and wavelet function. *Chinese Control and Decision Conference*, China, 2010. pp. 1141–1145.

Received: 12 September 2019.

**Information about the authors**

*Vladimir S. Morkun*, Dr. Sc., professor, Krivoi Rog National University.

*Natalia V. Morkun*, Dr. Sc., associate professor, Krivoi Rog National University.

*Vitaliy V. Tron*, Cand. Sc., associate professor, Krivoi Rog National University.

*Svitlana M. Hryshchenko*, Cand. Sc., Krivoi Rog National University.

*Oleksandr I. Suvorov*, researcher, Academy of Mining Sciences of Ukraine.

*Dmitriy I. Paraniuk*, Public Joint Stock Company «ArcelorMittal Krivoi Rog».

*Oleksandra J. Serdiuk*, Krivoi Rog National University.