УДК 621.731.3.322-81:621.314.21.3.042, 681.142

ТЕПЛООБМЕН В ПЛАСТИНЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ФУРЬЕ (Fo<0,001)

В.С. Логинов

Томский политехнический университет
E-mail: loginov@ped.tpu.ru

Предложен простой аналитический приближенный способ решения задачи теплопроводности с внутренними источниками теплоты для малых чисел Фурье. Результаты расчетов по аналитической формуле сопоставлялись с численным расчетом температурного поля в обмотке индукционного малогабаритного бетатрона типа МИБ-6-200. При изменении значения тепловыделения, зависящего от времени на несколько порядков в пределах исследуемого промежутка времени имеет место хорошее согласие численного и аналитического расчетов.

В [1] рассмотрен приближенный метод решения уравнения теплопроводности в телах классической формы (пластина, цилиндр, шар) при малых числах Фурье (Fo<0,001) применительно к быстропротекающим процессам тепловой обработки материалов. В настоящей работе этот метод обобщается на случай задания в пластине распределения внутренних источников тепла от времени.

Постановка задачи. Искомое температурное поле в пластине описывается уравнением энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q_V(\tau)}{\rho c_p},\ \tau>0,\ 0<x<\delta, \qquad (1)$$

при начальных и граничных условиях:

при x=0 $\dfrac{\partial T}{\partial x}=0$; (2) при $t=0$ $T(x,0)=T_o$; (3)

$$\text{при } x=\delta-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\alpha(T-T_ж). \qquad (4)$$

Согласно методу, изложенному в [1], выражение для теплового потока при малых временах взаимодействия представляем в виде:

$$q=\rho c_p l\frac{\partial T}{\partial \tau}. \qquad (5)$$

Для определения линейного параметра l в формуле (5) предлагается выражение

$$l=\sqrt{a\tau}. \qquad (6)$$

Однако запись выражений (5) и (6) уже предполагает определенные знания об исследуемом процессе. При решении задачи с внутренними источниками теплоты (1–4) будем исходить из общего предположения, заключающегося в том, что определим коэффициент температуропроводности $\boldsymbol{a}$ в уравнении (1), исходя из соображений теории размерностей в виде

$$a=l_o\frac{\partial x}{\partial \tau}. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (1), получим

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=l_o\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)+p(\tau), \qquad (8)$$

где $p(\tau)=q_V(\tau)/(\rho c_p)$.

Введем обозначение $u=\dfrac{\partial T}{\partial \tau}$, тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{l_o}=-\frac{p(\tau)}{l_o}. \qquad (9)$$

решение ур. (9) запишется так:

$$u(x,\tau)=\frac{\partial T}{\partial \tau}=C_1\exp\left(\frac{x}{l_o}\right)+p(\tau). \qquad (10)$$

Интегрируя полученное уравнение по τ, будем иметь:

$$T(x,\tau)=C_1\tau\exp\left(\frac{x}{l_o}\right)+\int p(\tau)d\tau+C_2. \qquad (11)$$

Определим, используя краевые условия, значения констант в формуле (11):

$$C_2=T_o-\varphi(0),\ \text{где } \varphi(\tau)=\int p(\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Определим первую и вторую производные от температуры по пространственной координате:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=C_1\frac{\tau}{l_o}\exp\left(\frac{x}{l_o}\right);\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=C_1\frac{\tau}{l_o^2}\exp\left(\frac{x}{l_o}\right).$$

Подставим производные (10), (12) в уравнение (1). В результате получим выражение для определения параметра l_o:

$$l_o=\sqrt{a\tau}. \qquad (13)$$

Как видим, выражение (13) совпадает с принятым ранее выражением (6). Константу интегрирования C_1 определим из граничного условия, после чего общее решение задачи примет вид

$$T(x,\tau)=T_o+\varphi(\tau)-\varphi(0)-$$
$$-\left[\frac{T_o-T_ж+\varphi(\tau)-\varphi(0)}{1+\lambda/(\alpha l_o)}\right]\exp\left[-\frac{\delta}{l_o}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\right]. \quad (14)$$

Определим безразмерные параметры:

число Био – $\mathrm{Bi}=\frac{\alpha\delta}{\lambda}$; число Фурье – $\mathrm{Fo}=\frac{a\tau}{\delta^2}$.

С учетом этих параметров формула (14) переходит в зависимость

$$T(x,\tau)=T_o+\varphi(\tau)-\varphi(0)-$$
$$-\left[\frac{T_o-T_ж+\varphi(\tau)-\varphi(0)}{1+1/(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}})}\right]\exp\left[-\left(\frac{(1-X)}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right]. \quad (15)$$

Здесь $X=x/\delta$.

Тогда плотность теплового потока будет равна

$$q=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{x=\delta}=\frac{\lambda}{\sqrt{a\tau}}\times$$
$$\times\left[\frac{T_o-T_ж+\varphi(\tau)-\varphi(0)}{1+1/(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}})}\right]\exp\left[-\left(\frac{(1-X)}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\right]. \quad (16)$$

Были выполнены расчеты температурного поля в пластине по формуле (15) при задании различных законов функции внутренних источников теплоты. Результаты расчетов по аналитической формуле сопоставлялись с численным расчетом температурного поля в обмотке индукционного малогабаритного бетатрона типа МИБ-6-200. Пример такого расчета показан на рисунке. Здесь сплошными линиями представлены результаты расчета по формуле (15), а точками – численный расчет, выполненный А.Р. Дороховым по явной схеме [2]. Видно, что при изменении значения функции тепловыделения на несколько порядков в пределах исследуемого промежутка времени имеет место хорошее согласие численного и аналитического расчетов.

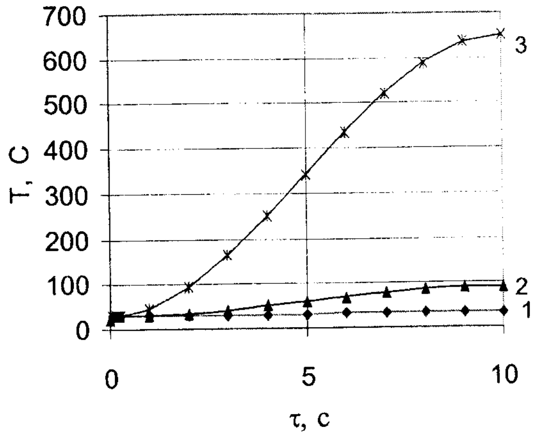

Рис. *Зависимость максимальной температуры пластины от времени*

$$q_V=4q_{V0}\left[\frac{\tau}{\tau_o}-\left(\frac{\tau}{\tau_o}\right)^2\right],\ \tau_0=10\,c;$$

$$1-3-q_{V0}=4{,}05\cdot10^6;\ 4{,}05\cdot10^7;\ 4{,}05\cdot10^8\ \text{Вт/м}^3;$$
$$R=0{,}048\ \text{м};\ C_p\cdot\rho=3{,}47\times$$
$$\times10^6\ \text{Дж/(м}^3\cdot\text{К)};\lambda=1{,}56\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)};$$
$$\mathrm{Bi}=0{,}788;T_0=28{,}4\ {}^\circ\text{C};T_ж=31{,}2\ {}^\circ\text{C};$$

линии – расчет по формуле (15), точки – численный расчет по [2]

Аналогичный результат был получен при задании других функциональных зависимостей для внутренних источников теплоты.

Таким образом, получена простая аналитическая зависимость для расчета температурного поля в пластине при действии в ней внутренних источников теплоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логинов В.С., Дорохов А.Р., Репкина Н.Ю. Приближенный метод расчета нестационарного температурного поля при малых числах Фурье // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 1. – С. 22–25.
2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.