

УДК 536.2:532/533; 532.516

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЁННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА И ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОЙ ПОЛОСТИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А.В. Крайнов

Томский политехнический университет  
E-mail: Lux\_veritatis@mail.ru

Проведено численное моделирование движения вязкой несжимаемой неизоотермической жидкости в открытой прямоугольной полости с учётом изменения фазового состояния жидкости (кристаллизации) в условиях сопряжённого теплообмена. Получены оригинальные контуры твёрдой фазы. Изучено влияние динамических параметров и геометрических характеристик на формирование контура кристаллизовавшейся жидкости. Показано влияние параметров модели на процесс кристаллизации и условия теплообмена при движении жидкости в открытой полости. Получены гидродинамические картины вязкого течения в полости в условиях кристаллизации жидкости. Получены температурные поля для твёрдой и жидкой фаз.

Устойчивый интерес к исследованию конвективных течений в полостях различных типов наблюдается на протяжении последних сорока лет. Совершенно очевидно, что этот интерес объясняется широким прикладным значением проблемы: полости в качестве теплопередающих, теплоизолирующих и технологических элементов встречаются в энергетических и технологических установках различного предназначения, радиоэлектронных устройствах и теплообменной аппаратуре [1–4]. Процессы, связанные с изменением фазового состояния при затвердевании вещества, широко используются в металлургии, материаловедении и лежат в основе получения современных кристаллов, глубокой очистки веществ, легирования с программным изменением состава, используются при затвердевании отливок, при литье слитков, при сверхбыстрой кристаллизации закалкой из жидкого состояния и т.д. Структура и свойства литых металлов и сплавов во многом определяются режимом кристаллизации, который можно регулировать в сравнительно широких пределах. Основными методами воздействия на процесс кристаллизации металлов и сплавов с целью улучшения качества литых заготовок являются регулирование скорости охлаждения и модифицирование [2, 5–7].

Важным фактором, влияющим на затвердевание расплава, которым подчас пренебрегают, является течение жидкого металла. Течение жидкости оказывает большое и многостороннее влияние на структуру при затвердевании. Но разработка технологических режимов и выбор соответствующих технологических параметров описанных процессов в настоящее время проводятся в основном эмпирическим путём, что связано с большими затратами времени и средств.

Кроме того, опытная отработка технологий всегда предполагает высокую вероятность выбора не самого лучшего технологического режима как по производительности и качеству продукции, так и по затратам на его реализацию [2, 4]. Возникает необходимость в теоретическом исследовании основных закономерностей гидродинамики и теплопереноса при движении вязкой несжимаемой жидкости в ограниченном объёме (полости открытого и

закрытого типа) с изменяющейся геометрией гидродинамической области.

В данной работе рассматривается нестационарное взаимодействие ламинарной вязкой струи несжимаемой неизоотермической жидкости с открытой прямоугольной полостью (рис. 1). Цель данной работы – исследовать процесс движения вязкой несжимаемой неизоотермической жидкости в открытой полости прямоугольного типа в условиях сопряжённого теплообмена с учётом изменения фазового состояния жидкости (кристаллизации).

Исследования описанных процессов проводились с использованием математической модели на основе системы уравнений Навье-Стокса в переменных вихрь-функция тока при умеренных числах Рейнольдса  $100 \leq Re \leq 800$ , уравнений энергии для материала прямоугольной полости и жидкой фазы с соответствующими начальными и граничными условиями, представленными в работе [8]. В области, ограниченной внешними границами (участки входа в полость и выхода из неё) и внутренними (боковой стенкой и дном полости, линией симметрии), осуществлялось численное решение гидродинамической задачи (рис. 1).

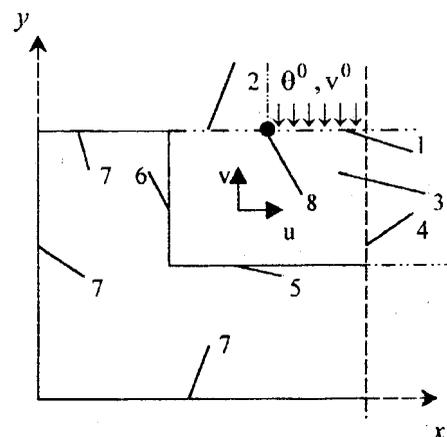


Рис. 1. Общая схема течения в полости и геометрия расчётной области: 1, 2) проникаемые участки полости; 3) гидродинамическая область; 4) ось симметрии; 5) дно полости; 6) боковая стенка полости; 7) внешняя стенка полости; 8) граница раздела между входным и выходным участками.

При исследовании движения вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в полости прямоугольного типа с учётом процесса кристаллизации определяется нестационарное двумерное температурное поле, с использованием условия

$$\theta \leq \theta_* \quad (1)$$

определяется фронт кристаллизовавшейся жидкости. В формуле (1)  $\theta_*$  – температура кристаллизации жидкости. В соответствии со спецификой изучаемого процесса граничные условия четвёртого рода для уравнения энергии на границе раздела фаз по каждой пространственной переменной, где вводится тепловой эффект кристаллизации, примут следующий вид:

– по  $x$

$$\theta = \theta_1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \left[ \frac{Q\rho v}{\lambda(T_* - T_1^0)} + \text{Pr} \right] \frac{dy}{dt}; \quad (2)$$

– по  $y$

$$\theta = \theta_1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \left[ \frac{Q\rho v}{\lambda(T_* - T_1^0)} + \text{Pr} \right] \frac{dx}{dt}. \quad (3)$$

При этом скорости движения границы раздела между твёрдой и жидкой фазами в условиях изменения фазового состояния вещества вдоль пространственных переменных  $x, y$ , соответственно будут определяться следующим образом

$$V_1 = \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}; \quad V_2 = \frac{y_i(t + \Delta t) - y_i(t)}{\Delta t}, \quad (4)$$

где  $x_i$  – координата узла разностной сетки на границе раздела твёрдой и жидкой фаз по оси пространственной переменной  $x$  в момент времени  $t + \Delta t$  и  $t$  соответственно,  $y_i$  – координата узла разностной сетки на границе раздела твёрдой и жидкой фаз по оси пространственной переменной  $y$  в момент времени  $t + \Delta t$  и  $t$  соответственно,  $V_1$  – скорость движения границы раздела твёрдой и жидкой фаз в условиях изменения фазового состояния жидкости в направлении по оси пространственной переменной  $x$ ,  $V_2$  – скорость движения границы раздела твёрдой и жидкой фаз в условиях изменения фазового состояния жидкости в направлении по оси пространственной переменной  $y$ .

В граничных условиях в формулах (2) и (3), соответственно, приняты следующие обозначения, отвечающие за введение добавочных членов:  $Q$  – тепловой эффект кристаллизации,  $\lambda_1, \lambda$  – коэффициенты теплопроводности для твёрдой и жидкой фаз, соответственно,  $\rho$  – плотность,  $v$  – кинематическая вязкость,  $T_*$  – температура кристаллизации жидкости,  $T_1^0$  – начальная температура стенок полости,  $\text{Pr}$  – число Прандтля.

При исследовании данного процесса необходимо выполнение следующего интегрального соотношения, определяющего расход жидкости, являющегося основной интегральной характеристикой течения:

$$\int_{x_0}^{x_1} v_-(x, y) dx = \int_{x_2}^{x_0} v_+(x, y) dx - W_1, \quad (5)$$

$$W_1 = \int_{x_3}^{x_2} v_+(x, y) dx, \quad (6)$$

где  $x_1$  – координата фиксированной крайней точки входного участка, лежащей на линии симметрии,  $x_0$  – координата точки раздела между участками с разным направлением движения жидкости в полости,  $x_2$  – координата точки раздела между участком, на котором происходит кристаллизация жидкости и участком, на котором вещество находится в жидком состоянии,  $x_3$  – координата фиксированной крайней точки выходного участка, лежащей на боковой стенке полости,  $v_-(x, y)$  – поперечная составляющая скорости движения жидкости в направлении от входного участка до дна полости,  $v_+(x, y)$  – поперечная составляющая скорости движения жидкости в направлении от дна полости до участка выхода,  $W_1$  – расход жидкости, подверженной кристаллизации.

Постановка задачи сделана при следующих допущениях:

- материал жидкой и твёрдой фаз идентичен;
- теплофизические параметры для материалов жидкой и твёрдой фаз приняты одними и теми же;
- реализуется ламинарный режим течения;
- не учитываются возможные эффекты газовой выделенности, обусловленные химическими и физическими процессами.

Методом конечных разностей решены система уравнений Навье-Стокса в переменных "функция тока-вихрь", уравнение энергии и уравнение теплопроводности с соответствующими граничными условиями. Разностные аналоги уравнений переноса и теплопроводности решены методом прогонки [9–12]. Уравнение Пуассона на каждом временном слое решалось методом последовательной верхней релаксации. Граница затвердевания определялась с помощью критериального условия фазовых переходов (1). При несовпадении криволинейной границы в условиях изменения фазового состояния жидкости (кристаллизации) с узлами сетки применялись разности с переменными шагами по координатам. Использовалась разностная схема второго порядка точности. Были использованы равномерные и неравномерные разностные сетки. Значения вихря на границе области, а также на подвижной её части определялись из уравнения для функции тока.

Верификации исследуемой модели было уделено особое внимание. Следует отметить, что в настоящее время не опубликовано каких-либо экспери-

ментальных данных о полях температур, скоростей или о границах фазовых переходов для течений кристаллизующейся жидкости в условиях, близких к рассматриваемым в данной работе. Поэтому прямые сопоставления расчетных данных с экспериментальными данными невозможны. Для обоснования достоверности полученных теоретически результатов были проведены тестовые проверки методики и алгоритма вычислений на группе задач, близких по своим физическим моделям рассматриваемой модели.

В качестве одной из тестовых была рассмотрена задача о плоском течении в каверне с верхней стенкой, движущейся в своей плоскости с постоянной скоростью [9–12]. Проведенный сравнительный анализ (рис. 2) по профилям гидродинамических функций показал согласование результатов расчёта с данными других авторов [9–11] в пределах  $\pm 7\%$  в достаточно широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса  $300 \leq Re \leq 1000$  и сеточных параметров [8].

Также была решена задача о сдвиговом течении с циркуляцией при малых числах Рейнольдса  $10 \leq Re \leq 50$ . Проведенный анализ сравнения по профилям функции тока в различных сечениях с данными монографии [13], показал согласование в пределах  $\pm 5\%$ .

Кроме этого, был проведен комплекс вычислений на последовательности из 3–4 сгущающихся сеток для наиболее типичных режимов рассматриваемого течения и установлены значения сеточных параметров, при которых результаты расчетов не зависели от числа узлов разностной сетки.

Исследование движения жидкости (для жидкой стали) [8] в полости прямоугольного типа было проведено в условиях изменения фазового состояния жидкости (кристаллизации). Фронт кристаллизации жидкости определялся с помощью полученного двумерного неоднородного поля температур с использованием критерия (1). Течение в условиях описанного процесса изучено в широком диапазоне изменения динамического параметра  $100 \leq Re \leq 800$  и других параметров модели. На рис. 3–8 представлены типичные результаты численных исследований для стали (рис. 3–6, 8) и некоторых алюминиевых сплавов (рис. 7).

На рис. 3 приведены контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени  $2,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $3,25 \cdot 10^{-4}$ ,  $3,75 \cdot 10^{-4}$  при числах  $Re=300$ ,  $Pr=0,979$ . Как видно из рисунка изменение толщины контура кристаллизовавшейся жидкости в пристенной области  $0,25 < x < 0,50$ ,  $0,25 < y < 0,32$  происходит достаточно плавно в сторону её увеличения по всей длине нижней границы гидродинамической области. При обращении потока на втором этапе [8] движения вязкой жидкости картина образования контура кристаллизовавшейся жидкости несколько изменяется. В пристенной области по высоте полости  $0,25 < x < 0,31$ ,  $0,25 < y < 0,45$  изменение толщины контура происходит более интенсивно. Особенно это хорошо заметно, если обратить внимание на

кривые 2, 3, которые определяют контур кристаллизовавшейся жидкости в момент времени  $3,25 \cdot 10^{-4}$ ,  $3,75 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 4 представлены контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени при числах  $Re=500$ ,  $Pr=0,979$ . Сравнивая рисунки 3, 4 можно заметить, что варьирование динамического параметра  $Re$  не приводит к существенному изменению формы получаемого контура.

В пристенной области по длине полости  $0,25 < x < 0,50$ ,  $0,25 < y < 0,31$  и по высоте  $0,25 < x < 0,32$ ,  $0,25 < y < 0,45$  изменение толщины кристаллизовавшегося слоя происходит несколько интенсивнее, чем на рис. 3 (кривые 2, 3).

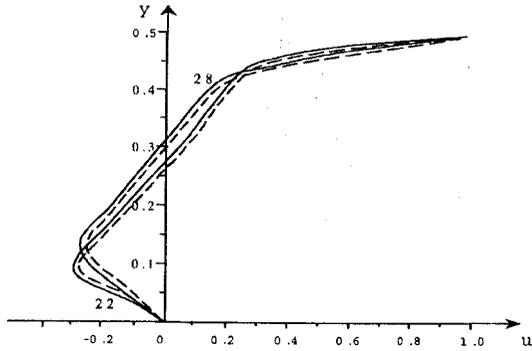
По мере продвижения жидкости от дна полости к выходному отверстию (второй этап движения жидкости) поперечная составляющая скорости начинает расти с увеличением координаты по оси пространственной переменной  $y$ , а толщина слоя кристаллизовавшейся жидкости постепенно возрастает. Достаточно хорошо это просматривается на графиках (рис. 3, 4), отражающих формирование контура фронта кристаллизации. За счёт охлаждения жидкости, обусловленного теплоотводом в материал полости, изотерма кристаллизации сдвигается по отношению к начальному её положению, в результате чего происходит искривление контура слоя закристаллизовавшейся жидкости.

На рис. 5 представлены профили температуры в фиксированный момент времени в сечениях у по координате  $x$ . Как видно из рисунка температура до границы раздела твёрдой и жидкой фаз (кривые 1–3) достаточно резко убывает. На границе раздела твёрдой и жидкой фаз возникают некоторые локальные максимумы температуры. Это можно объяснить тепловым эффектом кристаллизации. В твёрдой фазе скорость перестройки температурных полей меньше, чем в жидкой фазе, поскольку процесс охлаждения жидкой фазы происходит в условиях конвективного переноса, а нагрев твёрдой фазы происходит лишь за счёт теплопроводности.

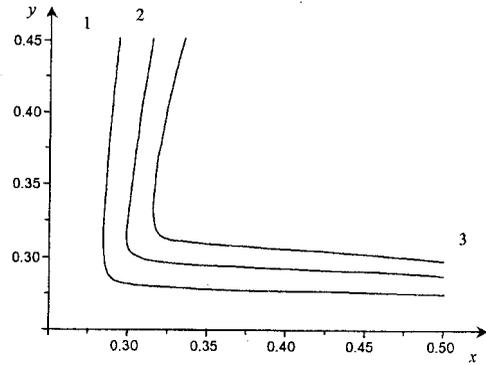
На рис. 6 представлены профили температуры в фиксированный момент времени в сечениях у по координате  $x$  при  $\alpha=0,16\alpha_*$  ( $\alpha$  – длина входного участка полости,  $\alpha_*$  – пронизываемого участка полости).

При уменьшении длины участка затекания – 1 и увеличении динамического параметра несколько изменяется картина поведения температурных профилей (кривые 1–3) в жидкой и твёрдой фазах. Температура по длине выемки к твёрдой фазе падает медленнее, чем на предыдущем рисунке, что говорит об уменьшении теплоотдачи в материал полости.

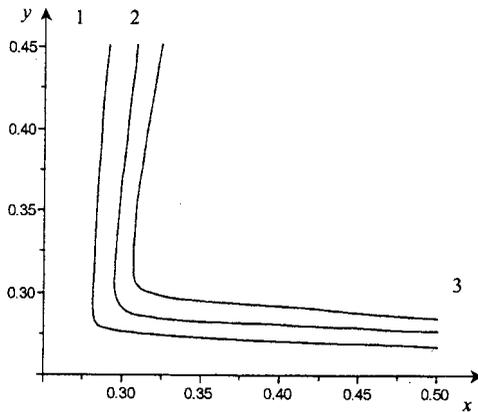
Распределение температуры в твёрдой и жидкой фазах в условиях кристаллизации в фиксированный момент времени в одном и том же сечении у для алюминия и некоторых его сплавов приведены на рис. 7. Проведенный анализ показывает, что при изменении динамического параметра качественная сторона характера распределения температурных профилей существенно не меняется.



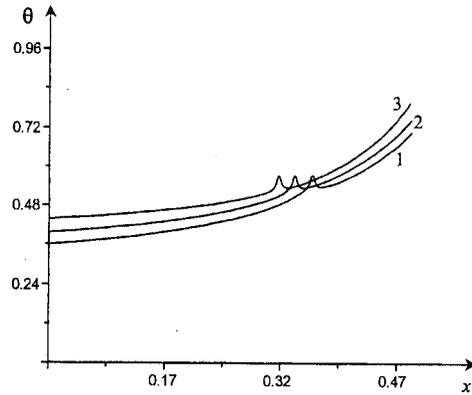
**Рис. 2.** Сравнение данных [9] (сплошные линии) по профилям продольной составляющей скорости в вертикальных сечениях полости с данными (пунктирные линии), полученными в настоящей работе при  $Re=1000$ ,  $k=39$ ,  $m=33$  ( $k$ ,  $m$  — количество узлов сетки по координатам  $x$ ,  $y$  соответственно); номера кривых 22, 28 соответствуют номерам сечений



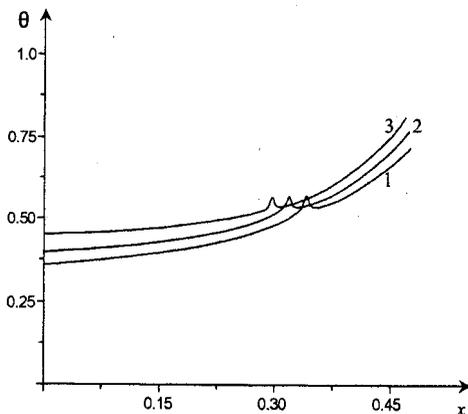
**Рис. 3.** Контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени при числах  $Re=300$ ,  $Pr=0,979$ : 1)  $2,5 \cdot 10^{-4}$ , 2)  $3,25 \cdot 10^{-4}$ , 3)  $3,75 \cdot 10^{-4}$



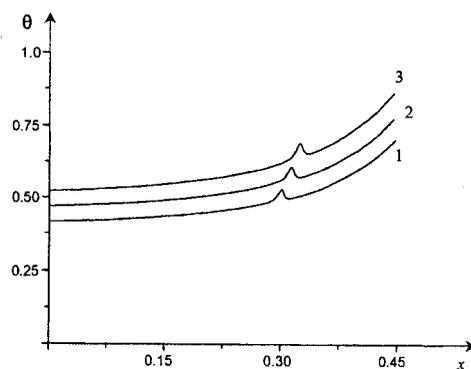
**Рис. 4.** Контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени при числах  $Re=500$ ,  $Pr=0,979$ : 1)  $3,125 \cdot 10^{-4}$ , 2)  $3,6 \cdot 10^{-4}$ , 3)  $4,1 \cdot 10^{-4}$



**Рис. 5.** Распределения температуры в твёрдой и жидкой фазах в условиях кристаллизации в различных сечениях  $y$  по координате  $x$  в фиксированный момент времени при числах  $Re=300$ ,  $Pr=0,979$ : 1) 0,496; 2) 0,554; 3) 0,598



**Рис. 6.** Распределения температуры в твёрдой и жидкой фазах в условиях кристаллизации в различных сечениях  $y$  по координате  $x$  в фиксированный момент времени при числах  $Re=500$ ,  $Pr=0,979$ ,  $\alpha=0,16$ : 1) 0,506; 2) 0,564; 3) 0,608



**Рис. 7.** Распределения температуры в твёрдой и жидкой фазах в условиях кристаллизации в сечении  $y=0,616$  по координате  $x$  в фиксированный момент времени для некоторых алюминиевых сплавов при числе  $Re=300$ ,  $Pr$ : 1) 0,056; 2) 0,072; 3) 0,085

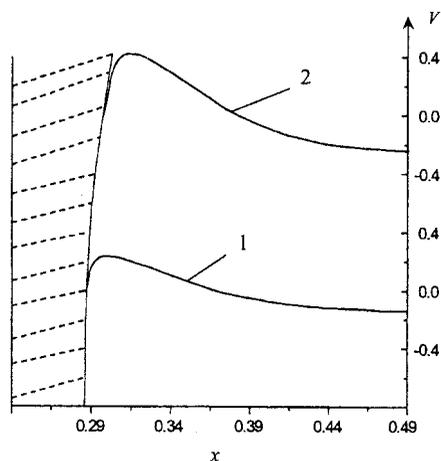


Рис. 8. Твёрдая фаза (заштрихована) и профили поперечной составляющей скорости  $v$  в сечениях  $y$ : 1) 0,52, 2) 0,64 при числах  $Re=500$ ,  $Pr=0,979$

На рис. 8 представлены профили поперечной составляющей скорости  $v$  в условиях кристаллизации.

На первом этапе движения вязкой несжимаемой неизотермической жидкости значения поперечной составляющей скорости убывают по всей высоте полости.

На втором этапе движения жидкости значения поперечной составляющей скорости начинают расти по всей высоте полости, причём профиль возвратного течения деформируется за счёт образующегося контура кристаллизовавшейся жидкости. По мере увеличения толщины контура по всей высоте полости прямоугольного типа степень деформации профиля возрастает (кривые 1, 2).

На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что характер изменения температурных полей в различных сечениях полости и оригинальных контуров качественно сохраняется с изменением динамического параметра  $Re$ , претерпевая незначительное изменение при варьировании входного параметра.

В данной работе проводится логическое развитие идей [10, 12], в которых была впервые показана возможность применения математического аппарата [9] для решения задач в сопряжённой постановке для областей с более сложной геометрией, чем канал или обтекаемое тело [14].

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности использования математических моделей в переменных "функция тока-вихрь" для решения задач сопряженного теплообмена в областях со сложной геометрией и с фазовыми переходами первого рода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махнова Г.В., Рис В.В., Смирнов Е.М. Двумерная ламинарная свободная конвекция в полости, имеющей форму квадрата со скругленными углами // Свободная конвекция. Тепломассообмен при химических превращениях: Тр. Второй Росс. нац. конф. по теплообмену. – М.: МЭИ, 1998. – Т. 3. – С. 100–103.
2. Флемингс М. Процессы затвердевания. – М.: Мир, 1977. – 423 с.
3. Дыбан Е.П., Мазур А.И. Конвективный теплообмен при струйном обтекании тел. – Киев: Наукова думка, 1982. – 303 с.
4. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. – М.: Наука, 1985. – 172 с.
5. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки. – М.: Машиностроение, 1979. – 335 с.
6. Карножицкий В.Н. Контактный теплообмен в процессах литья. – Киев: Наукова думка, 1978. – 300 с.
7. Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. – М.: Мир, 1978. – 806 с.
8. Кузнецов Г.В., Крайнов А.В. Исследование сопряженного теплообмена и гидродинамики при движении вязкой несжимаемой жидкости в каверне прямоугольного типа // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 5. – С. 136–142.
9. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
10. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 225 с.
11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
12. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Дубовик К.Г. и др. Математическое моделирование конвективного тепло-массообмена на основе уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1987. – 271 с.
13. Ши Д. Численные методы для решения задач теплообмена. – М.: Наука, 1988. – 544 с.
14. Гришин А.М., Зинченко В.И. Сопряженный тепло-массообмен между реакционно способным телом и газом при наличии неравновесных химических реакций // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. – № 2. – С. 121–128.