СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров И.А., Цимбал В.Н., Мышкин В.Ф., Власов В.А., Моторин А.Н., Копытов А.М., Береза А.А. Декоративный светопоглощающий экран // Приборы и техника эксперимента. – 2002. – № 3. – С. 166–167.
2. Патент 2194236 РФ. МКИ G02B 5/128. Светопоглощающий экран / В.Н. Цимбал, И.А. Тихомиров, В.Ф. Мышкин, А.Н. Моторин, А.И. Целебровский // БИиПМ. – 2002. – № 34 от 10.12.2002. Приоритет от 13.06.01.
3. Патент 2149432 РФ. МКИ G02B 5/128. Световозвращающий материал / В.Н. Цимбал, И.А. Тихомиров, В.Ф. Мышкин // БИиПМ. – 1999. Приоритет от 03.03.99.

УДК 620.9:621.314, 621.731.3.322-81:621.314.21.3.042, 681.142

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ИМПУЛЬСНОМ ТЕРМОЭЛЕКТРОГЕНЕРАТОРЕ

В.С. Логинов

Томский политехнический университет
E-mail: loginov@ped.tpu.ru

На основе простого приближенного метода решения линейной задачи теплопроводности для малых моментов времени (Fo < 0,001) получены зависимости для расчета температур в импульсном термоэлектрогенераторе. Проведен анализ приближенного решения.

Современные малогабаритные электромагнитные устройства зачастую работают в нестационарных условиях. В таких установках электромагнитные нагрузки резко изменяются во времени, что приводит к неравномерному распределению температур в пространстве и во времени. Особый интерес для практических целей представляет начальная стадия развития теплового процесса при малых числах Фурье (Fo < 0,001).

Рассмотрим задачу [1] (физические параметры импульсного термоэлектрогенератора – ИТЭГ не зависят от температуры):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau},\ 0 < x < \infty,\ \tau > 0, \qquad (1)$$

$$T(x,0) = T_0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x\to\infty} = 0, \qquad (3)$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q(\tau). \qquad (4)$$

Случай q = idem.

Уравнение (1) – одномерное уравнение нестационарной теплопроводности с начальным условием (2), условием полубесконечности (3) и граничным условием второго рода (4) на горячем спае ИТЭГ.

Решение системы уравнений (1–4) операционным методом Лапласа имеет вид [1]

$$T(x,\tau) - T_0 = \theta(x,\tau) =$$

$$= 2\frac{q}{\lambda}\sqrt{a\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \qquad (5)$$

Здесь q – плотность теплового потока; τ – время; x – координата; λ, a – соответственно коэффициент теплопроводности, температуропроводности,

$$\mathrm{ierfc}\,Z = \int_Z^\infty \mathrm{erfc}z\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-z^2}dz,$$

$\theta(x,\tau) = T(x,\tau) - T_0$ – избыточная температура – разность фактической температуры и начальной.

Следуя [2], решим задачу (1–4). Предположим, что для малых моментов времени может быть оправданным заменить уравнение (1) на следующее выражение:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial T}{\partial \tau}\right). \qquad (6)$$

Примем для характерного линейного масштаба δ зависимость

$$\delta \approx \frac{2\sqrt{a\tau}}{\sqrt{\pi}}$$ и число Фурье $Fo = a\tau/\delta^2$.

Тогда уравнение (6), как уравнение с разделяющимися переменными, легко решается.

Запишем окончательный вид решения с учетом граничных условий и физического смысла задачи (1–4)

$$\theta(x,\tau) \cong T(x,\tau) - T_0 =$$

$$= \frac{2q\sqrt{a\tau}}{\sqrt{\pi}\lambda}\exp\left(-\frac{x\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a\tau}}\right). \qquad (7)$$

Для определения ЭДС найдем избыточную температуру на горячем спае в координате x=0:

$$\theta(0,\tau) = \frac{2q}{\sqrt{\pi}\lambda}\sqrt{a\tau}. \qquad (8)$$

Выражение (8) полностью совпадает с решением [1]. Так как, согласно [1], законы изменения ЭДС $E(\tau)$ и $\theta(0,\tau)$ одинаковы, то это позволяет записать

$$E(\tau)=k\theta(0,\tau)=k\frac{2q}{\sqrt{\pi}\lambda}\sqrt{a\tau},\qquad(9)$$

где k – коэффициент термоЭДС.

Из (8), (9) следует, что $\theta(0,\tau)$ и $E(0,\tau)$ возрастают во времени по закону $\sqrt{\tau}$.

Проведем анализ решения (7):

1) при $\tau\to 0$ $\theta(x,\tau)\to 0$,

2) если $\tau\to\infty$, то $E(\tau)\to\infty$, $\theta(0,\tau)\to\infty$,

3) когда $x\to\infty$ $(\tau\neq 0)$ $\theta\to 0$.

Таким образом, приближенная оценка (7) исходной задачи (1–4) удовлетворяет ее физическим требованиям.

Как известно [1], аналитическую запись условия полубесконечности представляют в разных видах

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x\to\infty}=0,\ \left.T\right|_{x\to\infty}=T_0=$$

$$=\text{idem},\ \frac{\theta(x\to\infty)}{\theta(x=0)}=0.$$

Этим условиям удовлетворяет приближенное решение (7).

Общий случай $q=q(\tau)$. В реальных условиях плотность теплового потока зависит от времени τ. Поэтому будем считать, что $q(\tau)$ есть непрерывная и дважды дифференцируемая функция.

На основе теоремы Дюамеля [1, 3] можно получить решение для случая $q=q(\tau)$. Согласно этой теоремы

$$\left.\theta(0,\tau)\right|_{q=q(\tau)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\lambda}\sqrt{a}\int_0^{\tau}\frac{q(\tau)}{\sqrt{\tau-\tau'}}d\tau',\qquad(10)$$

где τ – текущее время, τ' – переменная интегрирования.

Проверим зависимость (10). Пусть $q(\tau)=q=$ $=\text{idem}$. Тогда

$$\theta(0,\tau)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}\lambda}q\int_0^{\tau}\frac{d\tau'}{\sqrt{\tau-\tau'}}=\frac{2\sqrt{a\tau}}{\sqrt{\pi}\lambda}q,$$

которое совпадает с выражением (8).

Если ставится обратная задача: нахождение необходимого закона $q(\tau)$ для обеспечения заданной зависимости $\theta(0,\tau)$, то в этом случае используется уравнение Абеля [1, 3]:

$$q(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\left[\left.\frac{\theta(0,\tau)}{\sqrt{\tau}}\right]\right|_{\tau=0}+\int_0^{\tau}\theta'(0,\tau')\frac{d\tau'}{\sqrt{\tau-\tau'}}.\qquad(11)$$

Решения (10), (11) дают возможность решить прямую и обратные задачи. Прямая задача – нахождение ЭДС или $\theta(0,\tau)$ по заданному закону изменения плотности теплового потока. Обратная задача – нахождение необходимого закона плотности теплового потока во времени для обеспечения заданной зависимости изменения ЭДС или температуры во времени.

Влияние формы плотности теплового потока во времени на избыточную температуру ИТЭГ

Тепловой поток – степенная функция времени: $q(\tau)=c\tau^n$.

Согласно [1] и (10), избыточная температура (или ЭДС) будет равна

$$\theta(0,\tau)=AC\left[\sum_{S=0}^{n}\frac{n!(-\tau)^S\tau^{n+1/2-S}}{(n-S)!S!(n+1/2-S)}\right],\qquad(12)$$

здесь $A=\dfrac{\sqrt{a}}{\lambda\sqrt{\pi}}$.

В частном случае при $q(\tau)=C\tau^{1/2}$ имеем

$$\theta(0,\tau)=\frac{8}{15}AC\tau^{5/2}.$$

Это выражение совпадает с зависимостью (1.14) [1].

Таким образом, получены простые расчетные зависимости, которые удовлетворяют физическим требованиям исходной задачи при граничных условиях второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иорданишвили Е.К., Бабин В.П. Нестационарные процессы в термоэлектрических и термомагнитных системах преобразования энергии. – М.: Наука, 1983. – 216 с.
2. Логинов В.С. Теплообмен в пластине при действии внутренних источников тепла при малых числах Фурье (Fo<0,001) // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 2. – С. 40–41.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.