

ГРАВИТАЦИОННЫЙ АНАЛОГ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет

E-mail: lav_@list.ru

Исследуется связь между релятивистской термодинамикой ранней Вселенной с метрикой Логанова и гравитационным аналогом статистической механики. Обнаружено, что обратимое во времени уравнение Лиувилля может иметь частное решение с нарушенной симметрией во времени.

Существует мнение, что описание необратимых процессов на языке индивидуальных траекторий и описание на вероятностном языке не являются эквивалентными [1–3]. Для того чтобы вычислить энтропию, рассмотрим с точки зрения релятивистской теории гравитации Логанова связь между термодинамикой и гравитационным аналогом статистической механики. Одновременно это позволит исследовать проблему обратимости эволюции ранней Вселенной.

Гравитационный аналог уравнения Лиувилля

Сначала рассмотрим случай ($U_0 < 0$), который при квантовом рассмотрении соответствует дискретному спектру. Гамильтониан гравитационного атома ($U_0 < 0$) имеет вид [4]

$$H(a, p_a) = -\frac{p_a^2}{2M_p^2 a} - V|U_0|, \quad (1)$$

здесь $V = \frac{4\pi a^3}{3}$, a – масштабный фактор метрики Логанова

$$d\sigma^2 = a^6 (x^0)^2 - a^2 (x^0) \times \\ \times [dr^2 + r^2 (\sin^2(\vartheta) d\psi^2 + d\vartheta^2)],$$

$U_0 < 0$ – постоянная составляющая скалярного поля, $p_a = -M_p^2 a a'$ – сопряженный координате a импульс, $a' \equiv \frac{da}{dt}$, $dt = a^3 dx^0$ – собственное время. При этом переменные $a(x^0)$ и $p_a(x^0)$ изменяются со временем x^0 согласно уравнениям Гамильтона

$$\frac{\partial a}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial p_a} [\sqrt{g_{00}} H], \quad \frac{\partial p_a}{\partial x^0} = -\frac{\partial}{\partial a} [\sqrt{g_{00}} H], \quad (2)$$

здесь для метрики Логанова $\sqrt{g_{00}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3$. Из уравнений (2) следует, что эволюция фазовых точек во времени x^0 протекает в соответствии с теоремой Лиувилля.

Для гамильтониана (1) ур. (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial a(t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_a}, \quad \frac{\partial p_a(t)}{\partial t} = 2 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial a}, \quad (3)$$

здесь $\tilde{H}(a, p_a) = -\frac{p_a^2}{2M_p^2 a} + V|U_0|$.

Ур. (3) сводятся к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\left(\frac{a''}{a}\right) + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 8\pi G|U_0| = 0, \quad (4)$$

полученному в работе [5]. Решение этого уравнения имеет вид

$$a = a_0 \cos^{1/3}(\nu t)$$

и для такого решения $|\sqrt{g_{00}} H| = |U_0| \frac{4\pi a_0^3}{3}$.

Будем предполагать, что состояние может быть приписано гравитационному атому лишь с некоторой вероятностью, т.е. по аналогии с квантовой теорией будем использовать вероятностную трактовку динамических процессов **одной** частицы, а не ансамбля ее копий. Для этого без использования принципа сокращенного описания [3] введем функцию распределения $\rho(a, p_a, t)$, которая пропорциональна плотности вероятности расположения гравитационного атома в гравитационном фазовом пространстве (a, p_a) .

Учитывая уравнения Гамильтона (2) и (3), трудно получить космологическое обобщение классического уравнения Лиувилля, описывающего эволюцию плотности $\rho(a, p_a, t)$ в гравитационном фазовом пространстве (a, p_a)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \hat{L} \rho - 3 \frac{\partial \tilde{H}}{\partial a} \frac{\partial \rho}{\partial p_a}, \quad (5)$$

где $\hat{L} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial a} \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial a}$ – оператор Лиувилля эффективного гамильтониана $\tilde{H}$. При этом, как и в классическом случае, функция распределения постоянна вдоль фазовой траектории $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0\right)$.

Если функция $\rho(a, p_a, t)$ описывает эволюцию, то в классической теории считается, что обращенная эволюция описывается функцией $\rho(a, -p_a, -t)$. Так как гамильтониан $\tilde{H}$ обладает свойством $\tilde{H}(a, p_a) = \tilde{H}(a, -p_a)$, то функция $\rho(a, -p_a, -t)$ удовлетворяет ур. (5). Поэтому это уравнение инвариантно относительно операции обращения времени ($a \rightarrow a, p_a \rightarrow -p_a, t \rightarrow -t$). Однако, в соответствии со вторым началом термодинамики часто реальные системы не обладают симметрией по отношению к обращению времени, что противоречит обратимости ур. (5) так же как, и других основных уравнений классической и квантовой теории.

Тем не менее, существует связь между обратимой микроскопической динамикой и необратимой макроскопической эволюцией [1–3].

Для гамильтониана (1) решение ур. (5) имеет вид

$$\rho(a, p_a, t) = F \left[\left(\nu t - \arctg \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right] \right), H_* \right], \quad (6)$$

где $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi G |U_0|}{3}}$, $H_* = \sqrt{g_{00}} H$.

Если предположить, что

$$\rho(a, p_a, t) = \rho(t) \cdot \rho \left(-\arctg \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right], H_* \right),$$

то тогда

$$\rho(a, p_a, t) = \rho(H_*) \cdot \exp \left[\gamma \left(\nu t - \arctg \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right] \right) \right], \quad (7)$$

либо

$$\begin{aligned} \rho(a, p_a, t) &= \rho(H_*) + \\ &+ \exp \left[\gamma \left(\nu t - \arctg \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right] \right) \right], \\ \rho(a, p_a, t) &= \\ &= \rho(H_*) \left[1 + \exp \left[\gamma \left(\nu t - \arctg \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right] \right) \right] \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где произвольная функция гамильтониана $\rho(H_*)$ соответствует равновесному состоянию, $\gamma = -\text{sgn}(t)$,

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}; \text{ величина } \gamma \text{ может быть и константой.}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что при $U_0 > 0$ формальное решение гравитационного аналога уравнения Лиувилля (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(a, p_a, t) &= \rho(H_+) + \\ &+ \exp \left[\gamma \left(\nu t + \text{Arth} \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right] \right) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} \rho(a, p_a, t) &= \\ &= \rho(H_+) \left[1 + \exp \left[\gamma \left(\nu t + \text{Arth} \left[\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right] \right) \right] \right], \end{aligned}$$

здесь $H_+ = \sqrt{g_{00}} \left[-\frac{p_a^2}{2 M_p^2 a} + V |U_0| \right]$.

Нетрудно видеть, что функция (8) и обращенная по отношению к ней функция $\rho(a, -p_a, -t)$ равны и в **фиксированной** точке фазового пространства за время $t > \nu^{-1}$ они стремятся к равновесной функции $\rho(H_*)$. Это означает эквивалентность между

прошлым и будущим, и, что время является параметром удаленности от равновесного состояния. Поэтому статистическое описание на основе функции распределения при $\gamma = -\text{sgn}(t)$ включает в себя приближение к равновесному состоянию и обратимость. Если же $\gamma = i$, то решение обратимо, но не описывает приближение к равновесию.

Когда же величина γ является вещественной константой, то тогда $\rho(a, p_a, t) \neq \rho(a, -p_a, -t)$. При этом одна из функций распределения стремится к равновесной функции $\rho(H_*)$, а другая удаляется от нее, так что в этом случае прошлое и будущее различимы. Таким образом, из инвариантности фундаментальных законов относительно обращения времени не следует, что прошлое и будущее играют одинаковую роль.

Будем считать реальным то распределение, которое соответствует равновесному состоянию, достигаемому в будущем (т.е. при $t \rightarrow \infty$). Для этого в выражении (8) следует положить $\gamma = -1$. Описание на основе такой функции распределения включает в себя релаксацию к равновесному состоянию и необратимость.

На фазовой же траектории, заданной в параметрическом виде $a = a_0 \cos^{1/3}(\nu t)$, $p_a = -M_p^2 a a'$ аргумент функции распределения

$$t - \arctg \left(\frac{p_a}{H_0 M_p^2 a^2} \right) = 0,$$

так что в этом случае функция распределения совпадает с равновесной функцией

Таким образом, обратимое во времени уравнение Лиувилля может иметь частное решение с нарушенной симметрией во времени даже для индивидуальной эффективной частицы Планка, обладающей массой $M_p \approx 10^{-5}$ г. Замечательно, что необратимость возникает в ситуации с одной степенью свободы. Это опровергает интерпретацию необратимости, согласно которой необратимость — не фундаментальный закон природы, а следствие приближенного макроскопического характера наблюдений.

Однако в обоих случаях при заданных начальных условиях можно с определенностью предсказать будущее, или восстановить прошлое значение функции распределения, а значит и состояние системы, т.е. детерминизм сохраняется. Если же предположить, что начальные данные являются случайными величинами, то можно приспособить классическую и квантовую теорию для описания таких процессов, для которых характерен выбор потенциальных возможностей.

Энтропия ранней Вселенной

Равновесную функцию распределения можно найти из принципа максимума информационной энтропии [3]

$$S_{\text{inf}}(\rho) = -k_b \int \rho(H_*) \ln(\rho(H_*)) \sqrt{g_{00}} da dp_a,$$

при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{00}} da \int_{-\infty}^{\infty} \rho(H_*) dp_a = 1,$$

$$\langle \tilde{H}_* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{00}} da \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_* \rho(H_*) dp_a,$$

вычисленных на фазовой плоскости. Численный расчет по области, ограниченной фазовой траекторией, совпадает с результатом по фазовой плоскости с точностью порядка единицы. Найдем экстремум функционала

$$\tilde{S}(\rho) = S_{\text{inf}} - \alpha \int \rho(H_*) \sqrt{g_{00}} da dp_a - \beta \int H_* \sqrt{g_{00}} da dp_a$$

с множителями Лагранжа α и β . Приравнявая нулю вариацию функционала, получим

$$\delta \tilde{S} = - \int [\ln(\rho) + \beta H_* + \alpha + 1] \delta \rho \sqrt{g_{00}} da dp_a = 0.$$

Т.к. $\delta \rho$ произвольна, то экстремальная функция распределения имеет вид канонического распределения Гиббса

$$\rho(H_*) = \exp \left(- \frac{\pi \tilde{H}_*}{2\omega} \right), \quad (10)$$

и для гамильтониана (1) удовлетворяет нормировочному условию $\int \rho(H_*) \sqrt{g_{00}} da dp_a = 1$; множитель Лагранжа β выражен через параметр $\frac{\pi}{2\omega} = \beta$, $\pi/2\omega = \beta$, и его можно отождествить с температурой $T = \frac{2\omega}{\pi k_b}$; k_b – постоянная Больцмана; $\tilde{H}_* = -H_*$. Для энтропии из (10) следует выражение

$$S = -k_b \int \rho(H_*) \ln(\rho(H_*)) \sqrt{g_{00}} da dp_a = \frac{\pi k_b}{2\omega} \langle \tilde{H}_* \rangle,$$

где для гамильтониана (1) интеграл

$$\langle \tilde{H} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{00}} da \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_* \rho(H_*) dp_a$$

легко вычисляется в аналитическом виде и равен $\langle \tilde{H}_* \rangle = \frac{2\omega}{\pi}$, так что равновесное значение энтропии

$$S_{eq} = k_b \quad (11)$$

и для N_0 гравитационных атомов

$$S_{eq} = N_0 k_b. \quad (12)$$

Полагая $k_b T(0) = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{3H_0}{2\pi}$ и выбирая $a_0 = 2H_0^{-1}$, $U_0 = \lambda M_p^4$, константу N_0 в равенстве (12), являющуюся аналогом числа Авогадро, умноженного на число молей, можно представить в виде $N_0 = 1/\lambda$, λ – безразмерная константа взаимодействия скалярного поля.

Нетрудно видеть, что при $U_0 > 0$ функция распределения Гиббса (10) нормируема по области, ограниченной фазовой траекторией, а не по всей фазовой плоскости. Эволюция энтропии

$$S(\tau) = - \int \int P \ln(P) da dp_a =$$

$$= - \frac{3\lambda}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{\infty} x^3 dx \int_{-\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}}^{\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}} P(x, y, \tau) F(x, y, \tau) dy + S_0,$$

где

$$F(x, y, \tau) = \left[\ln \left(\frac{1}{2} \left[N1 + N2 \exp \left(\gamma(\tau)\tau + \text{arth} \left(\frac{y}{x^2} \right) \right) \right] \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda x^3 \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) \right]$$

$$P(x, y, \tau) = \frac{1}{2} \exp \left(\lambda x^3 \left[\frac{y^2}{x} - x^3 \right] \right) \times$$

$$\times \left[N1 + N2 \cdot \exp \left(\gamma(\tau)\tau + \text{arth} \left(\frac{y}{x^2} \right) \right) \right],$$

$$N1 = \frac{1}{\frac{3\lambda}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{\infty} x^3 dx \int_{-\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}}^{\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}} \exp \left[\lambda x^3 \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) \right] dy}$$

$$N2 = \frac{1}{\frac{3\lambda}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{\infty} x^3 dx \int_{-\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}}^{\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}} \exp \left[\lambda x^3 \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) + \text{arth} \left(\frac{y}{x^2} \right) \right] dy}$$

$$x = \frac{H_0}{2\sqrt[3]{\lambda}} \cdot a, \quad y =$$

$$= -x^2 \text{th}(\text{arch}(\lambda x^3)) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 x^6 - 1}}{\lambda x}, \quad S_0 = 0,060,$$

соответствующей распределению (9), представлена на рис. 1. Для определенности выбрано значение параметра $\lambda = 0,01$. Графики построены с помощью компьютерной программы «Mathcad 2001». С помощью этой программы при каждом значении времени τ вычислялся двойной интеграл по переменным a и p_a по области фазового пространства, ограниченной фазовой траекторией.

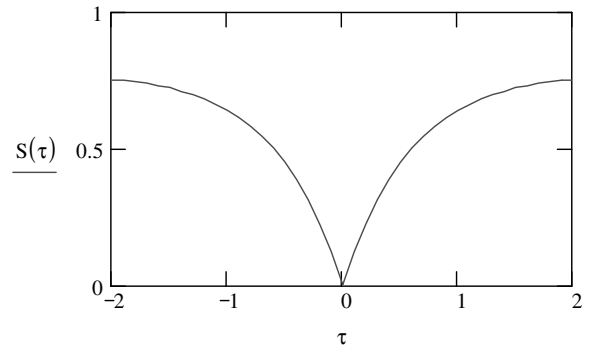


Рис. 1. Зависимость безразмерной энтропии на одну частицу от времени $\tau = vt$ при $\gamma = -\text{sgn}(t)$, $U_0 > 0$

Отметим, что в этом случае для приближенного описания эволюции энтропии можно использовать удовлетворяющее принципу экстремума информационной энтропии [3] сингулярное решение уравнения (5)

$$\rho = W^{-1} \delta(\tilde{H}_+ - \tilde{E}),$$

где $W = \int \delta(\tilde{H}_+ - \tilde{E}) \sqrt{g_{00}} da dp_a$, $\delta(x)$ – дельта-функция. Дело в том, что по аналогии с принципом локального равновесия в пространстве [6] естественно предположить, что в каждый момент времени существует состояние равновесия. Проведенное выше рассмотрение показывает, что в произвольный, но фиксированный момент времени t объем $V = \frac{4\pi a^3}{3}$,

число частиц $N_0 = \frac{4\pi a_0^3 U_0}{3 k_b T(0)}$ и энергия $\tilde{E}$ являются заданными параметрами. Поэтому в каждый момент времени энтропию можно определить по формуле Больцмана

$$S(\tilde{E}, N, V) = \ln(W(\tilde{E}, N, V)),$$

где $W = \int \delta(\tilde{H}_+ - \tilde{E}) \sqrt{g_{00}} da dp_a$ – статистический вес, задающий число динамических состояний внутри слоя, определяемого неравенствами $\tilde{E} \leq \tilde{H}_+ \leq \tilde{E} + \Delta \tilde{E}$;

$$\tilde{H}_+ = -\sqrt{g_{00}} \left[-\frac{p_a^2}{2M_p^2 a} + V|U_0| \right], \sqrt{g_{00}} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \quad [5].$$

Для решения (1) нетрудно получить

$$W(\tilde{E}, N, V) = \frac{1}{2\omega} \text{Arsh} \left[\frac{V}{V_0} \sqrt{\frac{k_b T(0) N_0}{\tilde{E}}} \right],$$

здесь $V_0 = \frac{4\pi a_0^3}{3}$. Подставляя в последнее выражение $V = \frac{4\pi a_0^3}{3} \cosh(vt)$, получим выражение, приближенно ($\tau < 1$) описывающее эволюцию энтропии Больцмана ранней Вселенной,

$$S(\tau) = \ln \left[\text{Arsh} \left(\cosh(\tau) \sqrt{\frac{kT(0) N_0}{\tilde{E}}} \right) \right] + S_0,$$

где ($\tau = vt$), а величина n^{-1} интерпретируется как возраст Вселенной. При этом для времен $\tau < 1$ $\frac{dS}{dt} \approx 0$.

Эволюция безразмерной энтропии Больцмана представлена на рис. 2.

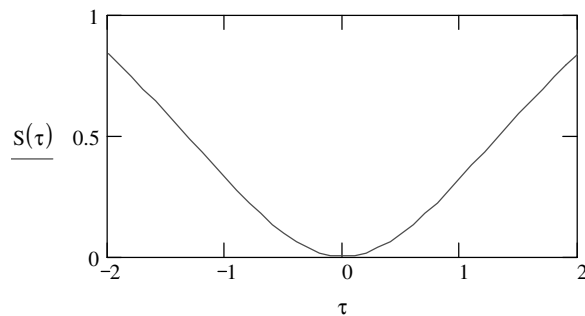


Рис. 2. Зависимость безразмерной энтропии Больцмана от времени τ

Из рис. 1 и 2 видно, что эволюция системы имеет смысл только при $t > 0$ и энтропия из-за неустойчивости решения (1) может возрастать беспредельно с малым темпом возрастания. Отсутствие максимума энтропии обусловлено возрастанием объема V . Ограниченность энтропии может обеспечить скалярный потенциал вида

$$U(\varphi) = \begin{cases} U_0, & t \leq t_m \\ 0, & t > t_m \end{cases}.$$

Момент времени t_m можно определить из условия $S(t_m) = 1$. В этом случае $t_m \approx 1,8 v^{-1}$, а параметр взаимодействия скалярного поля $\lambda = 1$ и, следовательно, $N_0 = 1$. Из рис. 1 и 2 видно, что время релаксации нестационарного состояния $t \approx 2 v^{-1}$.

Эволюция безразмерной энтропии отдельной частицы для распределения (8) представлена на третьем и четвертом рисунках, где $\tau = vt$, $\lambda = 1,18$, $a_0 = 2H_0^{-1}$. Значение константы теории λ выбрано из условия $S(0) = 0$, являющегося аналогом третьего закона термодинамики. Выбор начала отсчета времени $t_0 = 0$ обусловлен экстремумом решения ур. (4).

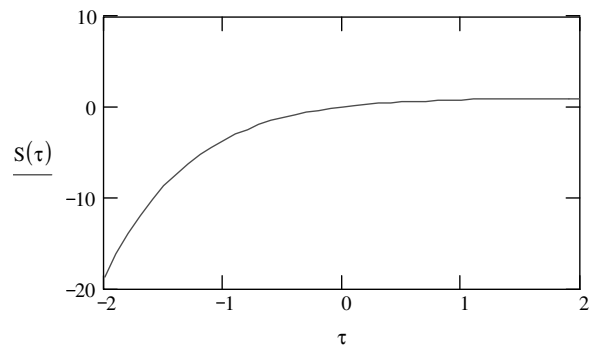


Рис. 3. Зависимость безразмерной энтропии на одну частицу от времени $\tau = vt$ при $\gamma = -1$

Из рис. 3 видно, что энтропия возрастает как при $\tau < 0$, так и при $\tau > 0$, но в первом случае $S < 0$, а во втором случае $S > 0$. Поэтому естественно предположить, что эволюция системы имеет смысл только при $t > 0$.

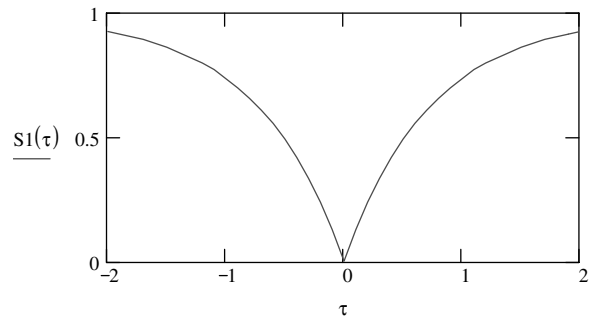


Рис. 4. Зависимость безразмерной энтропии на одну частицу от времени $\tau = vt$ при $\gamma = -\text{sgn}(t)$, $U_0 < 0$

В заключение отметим, что для потенциала

$$U(\varphi) = \begin{cases} -U_0, & 0 \leq t \leq t_1 \\ U_0, & t_1 < t \leq t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

рассмотренные в статье случаи ($U_0 > 0$) и ($U_0 < 0$) можно рассматривать как этапы единого процесса эволюции ранней Вселенной.

Интересно отметить, что на линии постоянного уровня $\tilde{H}_*(a, p) = E$ распределение (10) совпадает с вероятностью рождения Вселенной, найденной в работе [7].

Из (10) видно, что каноническое распределение Гиббса не является аналитическим по константе взаимодействия ω . Поэтому оно не может быть получено на основе теории возмущений. Функция распределения (10) больше там, где $|U_0|$ имеет большие значения. Если предположить, что $|U_0|$ является случайной величиной, то тогда функция распределения станет случайной функцией. По определению случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента t , которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Такие функции позволяют описывать индетерминистические процессы, характерные для живой природы. Такой подход осуществлен в работе [8].

Отметим, что в соответствии с ур. (5) всегда полная производная $\frac{d\rho}{dt} = 0$, а частная производная может отличаться от нуля. Поэтому для любого распределения, удовлетворяющего гравитационному аналогу ур. Лиувилля (5), полная производная информационно-энтропии $\frac{dS}{dt} = 0$, а $\frac{\partial S}{\partial t} \neq 0$. Частная производная определяет эволюцию энтропии в

фиксированной точке фазового пространства, что может иметь место в процессе рождения Вселенной.

Заключение

1. Получено космологическое обобщение классического уравнения Лиувилля, и найдено точное его решение, описывающее релаксацию состояния гравитационного атома к его равновесному состоянию. Обнаружено, что детерминистическое уравнение может иметь частное решение с нарушенной симметрией во времени. Найдены решения, описывающие как обратимые, так и необратимые процессы. Все это может служить динамическим обоснованием необратимости.
2. Получено уравнение состояния гравитационного атома. Найден гравитационный аналог первого закона термодинамики.
3. Вычислена в аналитическом виде энтропия равновесного и численно нестационарного состояния гравитационного атома, безразмерная энтропия которого возрастает до тех пор, пока в состоянии равновесия не достигнет максимального значения, равного единице.
4. Рождение обычного вещества во Вселенной, либо мини-вселенных – событие, связанное с нарушающей симметрию во времени неустойчивостью гравитационного атома относительно спонтанных переходов. Гравитационные атомы могут быть той средой, которая породила обычное вещество Вселенной, либо мини-вселенные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пригожин И. Современная термодинамика. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
2. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. – М.: Мир, 1964. – 314 с.
3. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Ренке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. Т. 1. – М.: Физматлит, 2002. – 431 с.
4. Ласуков В.В. Атомная модель ранней Вселенной // Известия вузов. Физика. – 2003. – № 4. – С. 70–75.
5. Ласуков В.В. Вселенная в метрике Логунова // Известия вузов. Физика. – 2002. – № 2. – С. 39–41.
6. Де Гроот С.Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964. – 432 с.
7. Ласуков В.В. Квантовое рождение Вселенной // Известия вузов. Физика. – 2002. – № 5. – С. 88–92.
8. Ласуков В.В. Спираль Вселенной // Известия вузов. Физика. – 2003. – № 9. – С. 89–92.