

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ  
В ВЕЩЕСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

В.М. РАЗИН

(Представлена научным семинаром кафедры вычислительной техники)

При расчетах активной биологической защиты представляется полезным получить уравнения движения релятивистских протонов в веществе при наличии магнитного поля, поскольку комбинированные способы защиты могут оказаться оптимальными в тех случаях, когда вес защитных экранов должен быть ограничен сверху.

Как известно, уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле при отсутствии вещества в векторной форме имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}], \quad (1)$$

где  $m$  – масса частицы;  $e$  – заряд;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\vec{v}$  – вектор скорости;  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции.

Поскольку нас будут интересовать частицы, скорость которых соизмерима со скоростью света, то уравнение (1) следует записать в форме соотношения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}], \quad (2)$$

где  $\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс частицы, масса которой зависит от энергии, т. е. скорости частицы.

При прохождении частицы через вещество будут иметь место различные взаимодействия частицы со средой, в результате чего энергия частицы будет уменьшаться вдоль траектории движения. В интересующем нас диапазоне энергий протонов главными являются потери энергии на ионизацию атомов защитной среды. Потери энергии на ионизации будут эквивалентны действию некоторой силы, действующей на частицу (протон) в направлении, противоположном направлению вектора скорости. Величина этой силы будет равна удельной энергии ионизации на элемент длины траектории  $l$ , т.е. сила равна  $\frac{dE}{dl}$ .

При учете силы сопротивления вещества за счет ионизации уравнение (2) может быть представлено в векторной форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}] - \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3)$$

где прямые скобки означают абсолютное значение соответствующей величины, а  $v$  – это модуль вектора скорости частицы.

В релятивистском случае левая часть уравнения (3) должна быть представлена следующим образом:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right), \quad (4)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы.

В трехмерной прямоугольной системе координат имеет место соотношение

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (5)$$

где для сокращения записи первые производные по времени обозначены точками над соответствующими координатами.

Проекция векторного уравнения (4) на оси координат с учетом (5) дает возможность записать уравнение движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \dot{x} \right) &= \frac{e}{c} B_z \dot{y} - \frac{e}{c} B_y \dot{z} - \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{\dot{x}}{v}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \dot{y} \right) &= \frac{e}{c} B_x \dot{z} - \frac{e}{c} B_z \dot{x} - \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{\dot{y}}{v}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \dot{z} \right) &= \frac{e}{c} B_y \dot{x} - \frac{e}{c} B_x \dot{y} - \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь  $B_x$ ,  $B_y$  и  $B_z$  – составляющие вектора магнитной индукции по осям координат.

Для сокращения записи введем обозначение

$$\varphi(v) = \left| \frac{dE}{dl} \right| \frac{1}{v} \quad (7)$$

и правые части уравнений системы (6) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} -\varphi(v) \dot{x} + \frac{e}{c} B_z \dot{y} - \frac{e}{c} B_y \dot{z} &= L; \\ -\frac{e}{c} B_z \dot{x} - \varphi(v) \dot{y} + \frac{e}{c} B_x \dot{z} &= M; \\ \frac{e}{c} B_y \dot{x} - \frac{e}{c} B_x \dot{y} - \varphi(v) \dot{z} &= N. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Раскрывая производные в левых частях системы (6) и учитывая (8), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ddot{x} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \right) &= L; \\ \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ddot{y} + \dot{y} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \right) &= M; \\ \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ddot{z} + \dot{z} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \right) &= N. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь  $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{c}$  – релятивистский фактор, а две точки означает производную второго порядка по времени. Раскроем производную

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^3}} \cdot (\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} + \dot{z} \ddot{z}), \quad (10)$$

так как все координаты являются функциями времени. Подставляя (10) в систему уравнений (9) и выполняя несложные преобразования, получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} \left[ c^2(1-\beta^2) + \dot{x}^2 \right] + \dot{x} \dot{y} \dot{y} + \dot{x} \dot{z} \dot{z} &= L_1, \\ \dot{x} \dot{y} \dot{x} + \ddot{y} \left[ c^2(1-\beta^2) + \dot{y}^2 \right] + \dot{y} \dot{z} \dot{z} &= M_1, \\ \dot{x} \dot{z} \dot{x} + \dot{y} \dot{z} \dot{y} + \ddot{z} \left[ c^2(1-\beta^2) + \dot{z}^2 \right] &= N_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь введены для сокращения записи обозначения:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{c^2 \sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0} \cdot L; \\ M_1 &= \frac{c^2 \sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0} M; \\ N_1 &= \frac{c^2 \sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0} N. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При моделировании обыкновенных дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) принято разрешать эти уравнения относительно старших производных (метод понижения порядка производной).

Рассматриваем систему (11), как систему трех уравнений с тремя неизвестными производными  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$ . Вычисляем главный определитель системы (11)

$$\Delta = \begin{vmatrix} c^2(1-\beta^2) + \dot{x}^2; & \dot{x} \dot{y}; & \dot{x} \dot{z}; \\ \dot{x} \dot{y}; & c^2(1-\beta^2) + \dot{y}^2; & \dot{y} \dot{z}; \\ \dot{x} \dot{z}; & \dot{y} \dot{z}; & c^2(1-\beta^2) + \dot{z}^2; \end{vmatrix} \quad (13)$$

Применяя правило Саррюса или какой-либо другой способ вычисления определителей и учитывая (5) в несложных, но громоздких преобразованиях, получим

$$\Delta = c^6 (1-\beta^2)^2. \quad (14)$$

Теперь выражение, например, для  $\ddot{x}$  будет иметь вид

$$\ddot{x} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} L_1; & \dot{x} \dot{y}; & \dot{x} \dot{z}; \\ M_1; & [c^2(1-\beta^2) + \dot{y}^2]; & \dot{y} \dot{z}; \\ N_1; & \dot{y} \dot{z}; & [c^2(1-\beta^2) + \dot{z}^2]; \end{vmatrix} \quad (15)$$

Громоздкие алгебраические преобразования при вычислении (15) позволяют в конечном итоге получить сравнительно простое выражение для  $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_0} \left( \frac{e}{c} B_z \dot{y} - \frac{e}{c} B_y \dot{z} \right) \sqrt{1-\beta^2} - \frac{1}{m_0} \varphi(v) \dot{x} \sqrt{(1-\beta^2)^3}. \quad (16)$$

Аналогично вычисляются выражения для  $\ddot{y}$  и  $\ddot{z}$ . В результате получаем систему уравнений движения в виде:

$$\left. \begin{aligned} m_0 \ddot{x} &= \left( \frac{e}{c} B_z \dot{y} - \frac{e}{c} B_y \dot{z} \right) \sqrt{1 - \beta^2} - \varphi(v) \dot{x} \sqrt{(1 - \beta^2)^3}, \\ m_0 \ddot{y} &= \left( \frac{e}{c} B_x \dot{z} - \frac{e}{c} B_z \dot{x} \right) \sqrt{1 - \beta^2} - \varphi(v) \dot{y} \sqrt{(1 - \beta^2)^3}, \\ m_0 \ddot{z} &= \left( \frac{e}{c} B_y \dot{x} - \frac{e}{c} B_x \dot{y} \right) \sqrt{1 - \beta^2} - \varphi(v) \dot{z} \sqrt{(1 - \beta^2)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

При  $\beta = 0$  получаем уравнения движения заряженной частицы в веществе при наличии магнитного поля для нерелятивистского случая

$$\left. \begin{aligned} m_0 \ddot{x} &= \frac{e}{c} B_z \dot{y} - \frac{e}{c} B_y \dot{z} - \varphi(v) \dot{x}, \\ m_0 \ddot{y} &= \frac{e}{c} B_x \dot{z} - \frac{e}{c} B_z \dot{x} - \varphi(v) \dot{y}, \\ m_0 \ddot{z} &= \frac{e}{c} B_y \dot{x} - \frac{e}{c} B_x \dot{y} - \varphi(v) \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Полученные уравнения движения имеют форму, удобную для моделирования на АВМ. В цилиндрической системе координат уравнения движения в релятивистском случае будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} m_0 (\dot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= \frac{e}{c} (r\dot{\varphi}B_z - \dot{z}B_\varphi) \sqrt{1 - \beta^2} - \varphi(v) \dot{r} \sqrt{(1 - \beta^2)^3}, \\ m_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) &= \frac{e}{c} (zB_r - rB_z) \sqrt{1 - \beta^2} - \varphi(v) r\dot{\varphi} \sqrt{(1 - \beta^2)^3}, \\ m_0 \ddot{z} &= \frac{e}{c} (\dot{r}B_\varphi - r\dot{\varphi}B_r) \sqrt{1 - \beta^2} - \varphi(v) \dot{z} \sqrt{(1 - \beta^2)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При моделировании на АВМ полезно также учитывать связи между кинетической энергией частицы и ее скоростью в виде

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{E(E - 2E_0)}}{E + E_0}, \\ E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь  $E_0 = m_0 c^2$  – энергия покоя частицы.