

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
 федеральное государственное автономное
 образовательное учреждение высшего образования
 «Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)

Инженерная школа: ядерных технологий
 Направление подготовки 14.04.02 “Ядерная физика и технологии”
 Отделение: ядерно-топливного цикла

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема работы
Излучение темного фотона электроном в электромагнитных полях специального вида

УДК 539.12:539.124.17:537.811

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович		

Руководитель ВКР

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Зав. каф. - рук. отд. на правах кафедры ОМИИ	Трифонов Андрей Юрьевич	д. ф.-м. н., профессор		

КОНСУЛЬТАНТЫ ПО РАЗДЕЛАМ:

По разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент ОСГН ШБИП	Кашук Ирина Вадимовна	к.т.н, доцент		

По разделу «Социальная ответственность»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ассистент, ОЯТЦ	Гоголева Татьяна Сергеевна	к.ф.-м.н.		

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:

Руководитель ООП	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент ОЯТЦ	Веригин Дан Александрович	к.ф.-м.н. доцент		

Планируемые результаты освоения

Код	Результат обучения*	Требования ФГОС ВО, СУОС, критериев АИОР, и/или заинтересованных сторон
Общие по направлению подготовки (специальности)		
Р1	Применять глубокие, математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для теоретических и экспериментальных исследований в области использования ядерной энергии, систем учета, контроля и физической защиты источников ионизирующего излучения, технологий радиационной безопасности и защиты от ионизирующего излучения, в профессиональной деятельности.	Требования ФГОС (ОПК-1,2, ПК-3, УК-1), Критерий 5 АИОР (п.1.1), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р2	Ставить и решать инновационные инженерно-физические задачи, реализовывать проекты в области использования ядерной энергии, систем учета, контроля и физической защиты источников ионизирующего излучения, технологий радиационной безопасности и защиты от ионизирующего излучения.	Требования ФГОС (ПК-9,10,13, 14, 15, ОПК-1,УК-4), Критерий 5 АИОР (пп.1.2), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р3	Создавать теоретические, физические и математические модели, описывающие распространение и взаимодействие ионизирующих излучений с веществом и живой материей, процессы в реакторах и ускорителях, процессы и механизмы переноса радиоактивности в окружающей среде.	Требования ФГОС (ПК-1,13, 22, УК-1, ОПК-1), Критерий 5 АИОР (п.1.3) , требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р4	Разрабатывать новые алгоритмы и методы: расчета современных физических установок и устройств; измерения характеристик полей ионизирующих излучений; оценки количественных характеристик источников ионизирующего излучения; измерения радиоактивности объектов окружающей среды; исследований в радиозоологии.	Требования ФГОС (ПК-2, 4, 6, 8, УК-1, ОПК-1), Критерий 5 АИОР (п.1.4) , требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р5	Оценивать перспективы развития ядерной отрасли, анализировать радиационные риски и сценарии потенциально возможных аварий, разрабатывать меры по снижению рисков и обеспечению ядерной и радиационной безопасности руководствуясь законами и нормативными документами, составлять экспертное заключение.	Требования ФГОС (ПК-5, 7, 11, 12, УК-1, ОПК-1), Критерий 5 АИОР (п.1.4), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030

Р6	Проектировать и организовывать инновационный бизнес, разрабатывать и внедрять новые виды продукции и технологий, формировать эффективную стратегию и активную политику риск-менеджмента на предприятии, применять методы оценки качества и результативности труда персонала, применять знание основных положений патентного законодательства и авторского права Российской Федерации.	Требования ФГОС (ПК-16-21, 23, УК-2), Критерий 5 АИОР (п.1.5), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р7	Демонстрировать глубокие знания социальных, этических и культурных аспектов инновационной профессиональной деятельности.	Требования ФГОС (ОПК-1, УК-4, 5), Критерий 5 АИОР (пп.2.4,2.5)
Р8	Самостоятельно учиться и непрерывно повышать квалификацию в течение всего периода профессиональной деятельности.	Требования ФГОС (УК-6, ПК-1, ОПК-1), Критерий 5 АИОР (2.6), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р9	Активно владеть иностранным языком на уровне, позволяющем работать в иноязычной среде, разрабатывать документацию, презентовать результаты профессиональной деятельности.	Требования ФГОС (ПК-11, 16, 17, УК-4, ОПК-3), Критерий 5 АИОР (п.2.2), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030
Р10	Эффективно работать индивидуально и в коллективе, демонстрировать ответственность за результаты работы и готовность следовать корпоративной культуре организации.	Требования ФГОС (ПК-18, 23, УК-3,6, ОПК-3), Критерий 5 АИОР (пп.1.6, 2.3), требования профессиональных стандартов 24.020, 24.079, 24.030

Министерство образования и науки Российской Федерации
 федеральное государственное автономное образовательное учреждение
 высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
 ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Школа ИШЯТ

Направление подготовки 14.03.02 Ядерные физика и технологии

Отделение школы (НОЦ) ОЯТЦ

УТВЕРЖДАЮ:

Руководитель ООП:

_____ Веригин Д.А.
 (Подпись) (Дата) (Ф.И.О.)

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

В форме:

Магистерской диссертации

Студенту:

Группа	ФИО
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович

Тема работы:

Излучение темного фотона электроном в электромагнитных полях специального вида
Утверждена приказом директора ИШЯТ

Срок сдачи студентом выполненной работы:	20.06.2020
--	------------

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ:

Исходные данные к работе	Излучение темного фотона в электромагнитных полях; мощность спонтанного излучения; метод комплексного роста Маслова.
Перечень подлежащих исследованию, проектированию и разработке вопросов	Разбор метода квазиклассического приближения методом комплексного роста Маслова; Вывод формулы для полной мощности излучения; Получение главного элемента амплитуды излучения; Получение первой поправки к амплитуде излучения;.
Консультанты по разделам выпускной квалификационной работы	
Раздел	Консультант
Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	Доцент, к.т.н. Кащук И.В
Социальная ответственность	Ассистент, к.ф.-м.н. Гоголева Т.С.

Дата выдачи задания на выполнение выпускной квалификационной работы по линейному графику	01.04.2020
---	------------

Задание выдал руководитель:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Зав. каф. - рук. отд. на правах кафедры ОМИИ	Трифонов Андрей Юрьевич	д. ф.-м. н., профессор		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович		

**ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА
«СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ»**

Студенту:

Группа	ФИО
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович

Школа	ИШЯТ	Отделение школы (НОЦ)	ОЯТЦ
Уровень образования	Магистр	Направление/специальность	14.04.02 Ядерные физика и технологии/ Технологии радиационной безопасности

Тема ВКР:

Излучение темного фотона электроном в электромагнитных полях специального вида	
Исходные данные к разделу «Социальная ответственность»:	
1. Характеристика объекта исследования (вещество, материал, прибор, алгоритм, методика, рабочая зона) и области его применения	Получение амплитуды излучения с точностью до первых поправок для мощности спонтанного излучения темных и электромагнитных фотонов электроном, движущимся в электромагнитных полях произвольного вида. Предполагается, что результаты исследования будут востребованы специалистами в области физики высоких энергий.
Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:	
1. Правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности: – специальные (характерные при эксплуатации объекта исследования, проектируемой рабочей зоны) правовые нормы трудового законодательства; – организационные мероприятия при компоновке рабочей зоны.	– ГОСТ 12.1.038.-82 ССБТ Электробезопасность; – СанПин 2.2.2/2.4.1340-03 Гигиенические требования к ПЭВМ и организация работы; – СанПин 2.2.4/2.1.8.055-96 Электромагнитные излучения радиочастотного диапазона; – ГОСТ Р12.1.004-91 ССБТ Пожарная безопасность; – СП 52.13330.2011; – СанПиН 2.2.1/2.1.1.1278-03
2. Производственная безопасность: 2.1. Анализ выявленных вредных и опасных факторов 2.2. Обоснование мероприятий по снижению воздействия	Вредные факторы: – отклонение показателей микроклимата; – повышенный уровень шума; – электромагнитное излучение; – недостаточная освещённость рабочего места; Опасные факторы: – электрический ток.
3. Экологическая безопасность:	– анализ воздействия процесса исследования на окружающую среду.
4. Безопасность в чрезвычайных ситуациях:	– анализ наиболее типичной ЧС - пожар в рабочем помещении.

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	01.04.2020
---	------------

Задание выдал консультант:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ассистент, ОЯТЦ	Гоголева Т.С.	к.ф.-м.н.		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0AM84	Ворончихин И.В.		

**ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА
«ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСООБЪЕКТИВНОСТЬ
И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ»**

Студенту:

Группа	ФИО
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович

Школа	ИШЯТ	Отделение Школа	ОЯТЦ
Уровень образования	Магистр	Направление/специальность	14.04.02 Ядерные физика и технологии/ Технологии радиационной безопасности

Исходные данные к разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»:

1. <i>Стоимость ресурсов научного исследования (НИ): материально-технических, энергетических, финансовых, информационных и человеческих</i>	<i>Стоимость материальных ресурсов и специального оборудования определены в соответствии с рыночными ценами г. Томска Тарифные ставки исполнителей определены штатным расписанием НИ ТПУ</i>
2. <i>Нормы и нормативы расходования ресурсов</i>	<i>Норма амортизационных отчислений на специальное оборудование</i>
3. <i>Используемая система налогообложения, ставки налогов, отчислений, дисконтирования и кредитования</i>	<i>Отчисления во внебюджетные фонды 30 %</i>

Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:

1. <i>Анализ конкурентных технических решений (НИ)</i>	<i>Расчет конкурентоспособности SWOT-анализ</i>
2. <i>Формирование плана и графика разработки и внедрения (НИ)</i>	<i>Структура работ. Определение трудоемкости. Разработка графика проведения исследования</i>
3. <i>Составление бюджета инженерного проекта (НИ)</i>	<i>Расчет бюджетной стоимости НИ</i>
4. <i>Оценка ресурсной, финансовой, бюджетной эффективности (НИ)</i>	<i>Интегральный финансовый показатель. Интегральный показатель ресурсоэффективности. Интегральный показатель эффективности.</i>

Перечень графического материала

1. Оценка конкурентоспособности ИР
2. Матрица SWOT
3. Диаграмма Ганта
4. Бюджет НИ
5. Основные показатели эффективности НИ

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	01.04.2020
---	------------

Задание выдал консультант:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент ОСГН ШБИП	Кашук Ирина Вадимовна	к.тн, доцент		

Задание принял к исполнению студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович		

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Школа: ИШЯТ

Направление подготовки: 14.04.02 Ядерные физика и технологии

Уровень образования Магистр

Отделение школы (НОЦ): ОЯТЦ

Период выполнения: Весенний семестр 2019/2020 учебного года

Форма представления работы:

Магистерская диссертация

**КАЛЕНДАРНЫЙ РЕЙТИНГ-ПЛАН
выполнения выпускной квалификационной работы**

Срок сдачи студентом выполненной работы:	20.06.2020
--	------------

Дата контроля	Название раздела (модуля) / вид работы (исследования)	Максимальный балл раздела (модуля)
4.04.2020	Разработка технического задания на НИР	5
17.04.2020	Выбор направления исследования	7
6.05.2020	Теоритическое исследование	24
16.05.2020	Теоритические вывод и обоснование формул	41
24.05.2020	Получение результатов	13
30.05.2020	Оформление отчёта по НИР	10

Составил преподаватель:

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Зав. каф. - рук. отд. на правах кафедры ОмИИ	Трифонов Андрей Юрьевич	д. ф.-м. н., профессор		

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель ООП	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент ОЯТЦ	Веригин Дан Александрович	к.ф.-м.н. доцент		

Реферат

Выпускная квалификационная работа содержит 100 с., 14 рис., 20 табл., 21 источников.

Ключевые слова: Спонтанное излучение, темный фотон, квазиклассическое приближение, кинематическое смешивание, уравнение Дирака.

Цель работы – в рамках квазиклассического подхода получить с точностью до первых квантовых поправок амплитуды излучения для мощности спонтанного излучения темных и электромагнитных фотонов электроном, движущихся в электромагнитных полях произвольного вида.

В процессе исследования проводились:

1. Разобрать метод квазиклассического приближения методом комплексного роста Маслова;
2. Получить формулу для полной мощности излучения;
3. Методом комплексного роста Маслова получить матричные элементы токов перехода, определяющие мощность излучения обычного и темного фотонов;
4. Полученные выражения представить в виде функционалов от классической траектории излучающего электрона;
5. Произвести учет квантовых поправок связанных с отдачей излучаемого фотона.

Область применения: Анализ экспериментальных данных.

Значимость работы: Изучение свойств излучения темного фотона.

Выпускная квалификационная работа выполнена в отделении ядерно-топливного цикла ИШЯТ ТПУ. Работа выполнена в системе компьютерной вёрстки L^AT_EX.

Содержание

Введение	13
1 Феноменология темной материи	16
1.1 Экспериментальные аргументы существования темной материи	16
1.1.1 Ротационные кривые в галактиках	16
1.1.2 Гравитационное линзирование	17
1.1.3 Термодинамический метод	18
1.2 Темная материя	19
1.3 Гало темной материи	19
1.3.1 Классификация темной материи	19
1.4 Темный фотон	21
1.4.1 Парафотон	21
1.4.2 Кинематическое смешивание темного и электромагнитного фотонов	21
1.5 Эксперимент NA64	22
1.5.1 Методология эксперимента NA64	22
1.5.2 Экспериментальная установка NA64	23
2 Решение уравнения Дирака в квазиклассическом подходе	25
2.1 Квазиклассические решение уравнения Дирака	26
2.1.1 Собственные вектора и значения главного символа гамильтониана .	26
2.1.2 Разложение решения уравнения Дирака по собственным векторам главного символа гамильтониана	28
2.1.3 Решение с точностью до $\hbar^{3/2}$	32
2.1.4 Уравнение Шредингера и Баргмана-Мишеля-Телегди	33
2.2 Решение уравнения Шредингера	34
3 Вероятность и мощность спонтанного излучения	36
3.1 Квантование поля векторной массивной частицы со спином 1	36
3.1.1 4-потенциал массивного векторного поля	36
3.1.2 Вторичное квантование поля темного фотона	41
Вектор поляризации.	41
3.2 Мощность излучения	41
4 Мощность излучения темного и электромагнитного фотонов в квазиклассическом приближении методом комплексного роста Маслова	43
4.1 Амплитуда излучения	43
4.1.1 Амплитуда излучения главного элемента асимптотики	43
4.1.2 Амплитуда излучения первой поправки	46
Элемент M_{II}	48

Элемент M_{III}	51
Элемент M_{IV}	52
5 Социальная ответственность	55
5.1 Правовые и организационный вопросы обеспечения безопасности	55
5.2 Производственная безопасность	57
5.3 Анализ опасных производственных факторов и обоснование мероприятий по их устранению	58
5.3.1 Отклонение показателей микроклимата	58
5.3.2 Превышение уровня шума	59
5.3.3 Электромагнитное излучение и освещенность	59
5.4 Электробезопасность	60
5.5 Экологическая безопасность	61
5.6 Безопасность в чрезвычайных ситуациях	62
5.6.1 Возможные чрезвычайные ситуации	62
5.6.2 Пожарная безопасность	62
5.7 Выводы по разделу	65
6 Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	66
6.1 Оценка коммерческого потенциала и перспективности проведения исследований с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения	67
6.1.1 Анализ конкурентных технических решений	67
6.1.2 SWOT – анализ	68
6.2 Планирование научно-исследовательской работы	72
6.2.1 Структура работ в рамках научного исследования	72
6.2.2 Определение трудоемкости выполнения НИОКР	73
6.2.3 Разработка графика проведения научного исследования	74
6.2.4 Календарный план-график в виде диаграммы Ганта	75
6.3 Бюджет научно-технического исследования (НТИ)	76
6.3.1 Расчет материальных затрат научно-технического исследования . .	77
6.3.2 Расчет амортизации специального оборудования	77
6.3.3 Основная заработная плата исполнителей темы	78
6.3.4 Отчисления во внебюджетные фонды (страховые отчисления) . . .	80
6.3.5 Накладные расходы	81
6.4 Определение ресурсной (ресурсосберегающей), финансовой, бюджет-ной, социальной и экономической эффективности исследования	82
6.5 Выводы по разделу	85
Заключение	86

Приложение А	87
Приложение Б	96
Приложение В	97
Литература	98

Введение

В конце 60-х годов, астроном Вера Рубин из Института Карнеги, установила, что большинство звезд в спиральных галактиках движутся по орбитам примерно с одинаковой угловой скоростью, что нарушало 2 закон Кеплера и свидетельствовало о наличии скрытой массы [1].

Другое доказательство существования тёмной материи было получено благодаря методу гравитационной линзы. Такие массивные объекты, как галактики и их скопления, искривляют лучи света, исходящего от звёзд, находящихся за ними. Но гравитации видимых космических тел не хватает, чтобы свет искривлялся так, как это показывают наблюдения. [2]

Ещё один аргумент — открытие огромного количества раскалённого газа в скоплениях галактик. Масса обычной материи слишком мала, чтобы этот газ удерживать, — он должен был давно улететь в космическую пустоту [3].

При исследовании динамики удаленных галактик возникло противоречие между данными наблюдения и теоретическими предсказаниями. Решение данной проблемы возможно с помощью введения понятия скрытой массы, впоследствии названной темной материей. В настоящее время такой подход стал общепринятым, однако поиски в темном секторе усложняет то, что темная материя электрически нейтральна и подвержена только гравитационным взаимодействиям.

Опубликованные в 2015 году данные наблюдений космической обсерватории «Планк» демонстрируют, что 85% состоит из темной материи [4].

Одним из первых кто рассмотрел идею введения массивной векторной частицы был Окунь Л.Б. [5]. В данном подходе он вводил в электродинамику массивные фотоны, которые имели название парафотоны, и рассматривал экспериментальные методы их проверки. Первый экспериментальный метод это измерение разности потенциалов между двух коаксиально расположенных сфер, который должен изменится из-за модификации закона Кулона на малых расстояниях. Поиски такой разности потенциалов проводились Плимpton и Лотон, а и позже Бартлетт, Гольдхаген, и и Филлипс. В последнем эксперименте с параметрам $R = 46$ см, $R = 38$ см получена оценка на константу связи для второго парафотона $\alpha_2 < 10^{-16}$ и на массу $m_2 \approx 10^{-2}$ см⁻¹ (используется система $\hbar = c = 1$). Вторым экспериментальным методом было наблюдение за спектрами удаленных звезд и галактик, который должен значительно искажается из-за перехода видимого парафотона в невидимый парифотон т.к. разность масс данных парафотонов не равна нулю.

Интенсивные исследования тёмной материи, проводятся как на крупнейших ускорителях (LHC, CEBAF) так и в экспериментах, не использующих ускорители (CAST, ADMX). Одна из трудностей в исследовании тёмной материи заключается в том, что она может наблюдаться только при гравитационном взаимодействии. Однако, имеется уникальная возможность существования новой силы взаимодействия между «тёмным» сектором и видимым веществом, передаваемая новым векторным бозоном (тёмным фотоном) [6].

Тёмный фотон может образовываться в реакции вида: $e^- Z \rightarrow Z A'$, когда пучок электронов e^- попадает на активную мишень Z . Далее такой бозон может распасться на два лептона из тёмного сектора. Проведённые в 2016 году исследования по прямому поиску векторного бозона в суб-гэвном регионе масс в эксперименте NA64, SPS CERN, показали для набранной статистики в электронов, попавших на мишень, отсутствие сигналов, характерных для такого процесса. Таким образом, были получены новые, более строгие, ограничения на константу смешивания A' с фотонами: $10^{-5} < \epsilon < 10^{-2}$ для массы $m_{A'} < 1 \text{ ГэВ}$ [8].

Если масса тёмного фотона небольшая т.е. от одного до тысячи электронвольт или меньше, то могут возникать осцилляции между нашим фотоном и тёмным, аналогичные осцилляциям нейтрино. Если скрытые фотоны существуют, они могли бы рождаться в реакции рассеяния электронов высокой энергии в активной мишени полного поглощения. А происходило бы это благодаря квантовому эффекту смешивания с обычным фотоном тормозного излучения, испускаемого электронами в поле ядра. Так как тёмные фотоны очень слабо взаимодействуют с обычным веществом, они бы уходили из мишени и уносили из детектора существенную часть энергии пучка.

Поглощение энергии падающих электронов в калориметре ECAL сопровождается испусканием тормозного излучения. В реакции рассеяния электронов, при попадании в ECAL, на ядрах вследствие смешения может родиться темный фотон. При попадании электрона на калориметр часть энергии первичного пучка остается в ECAL, а оставшаяся часть полной энергии уносится темным фотоном, который без взаимодействий проходит через весь калориметр, что приводит к недостатку энергии в детекторе. Один из основных источников фона в эксперименте связан с возможным присутствием низкоэнергетического хвоста в распределении энергии электронов, попавших в калориметр. Этот хвост вызван взаимодействием электронов и рождением частиц до попадания в калориметр. Неопределенности, возникающие из-за недостатка знаний о произошедших взаимодействиях до калориметра, являются потенциально крупнейшим источником систематической неопределенности в точных расчётах. Чтобы улучшить отбор первичных электронов с высокой энергией и дополнительно подавить фон от возможного присутствия электронов с низкой энергией в пучке, можно использовать синхротронное излучение от электронов высокой энергии в дипольном магните.

В данной работе используется метрика в пространстве Минковского $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Цель и задачи работы

В рамках квазиклассического подхода получить с точностью до первых квантовых поправок амплитуды излучения для мощности спонтанного излучения темных и электромагнитных фотонов электроном, движущихся в электромагнитных полях произвольного вида.

Задачи магистерской диссертации работы:

1. Разобрать метод квазиклассического приближения методом комплексного ростка Маслова;
2. Получить формулу для полной мощности излучения;
3. Методом комплексного ростка Маслова получить матричные элементы токов перехода, определяющие мощность излучения обычного и темного фотонов;
4. Полученные выражения представить в виде функционалов от классической траектории излучающего электрона;
5. Произвести учет квантовых поправок связанных с отдачей излучаемого фотона.

1 Феноменология темной материи

1.1 Экспериментальные аргументы существования темной материи

1.1.1 Ротационные кривые в галактиках

Первые попытки получить общую плотность вещества в окрестности солнечной системы в результате экспериментальных наблюдений были сделаны Опики в 1915 г., Каптейн в 1922 г. и Оорт в 1932 г., которые обнаружили, что полная плотность вещества может быть объяснена известными звездными скоплениями, если принять во внимание экстраполяцию слабых карликовых звезд. В отличие от этого Джинс обнаружил, что на каждую яркую звезду должны приходиться две невидимых звезды, что противоречило первому результату. Цвикки в 1933 г. получил еще большее расхождение между массами видимых объектов и наблюдаемой массы звездных систем, к которым они принадлежат. В итоге Цвикки пришел к выводу, что для удержания галактик вместе, кластер должен содержать огромное количество невидимой материи.

Одним из наиболее достоверных и наглядных аргументов существования темной материи являются ротационные кривые, которые представляют собой зависимость скорости вращения звезд от удаленности от центра галактики. В 1979 г. Вера Рубин опубликовала статью по результатам исследования вращательных свойств 21 спиральных галактик класса Sc (по классификации Хаббла) [1]. Галактики класса Sc имеют очень широкие диапазоны светимости и массы. На рисунке 4 изображены результаты полученные Рубин, где красной линией показано теоритическое поведение галактик согласно ньютоновской механике без скрытой массы:

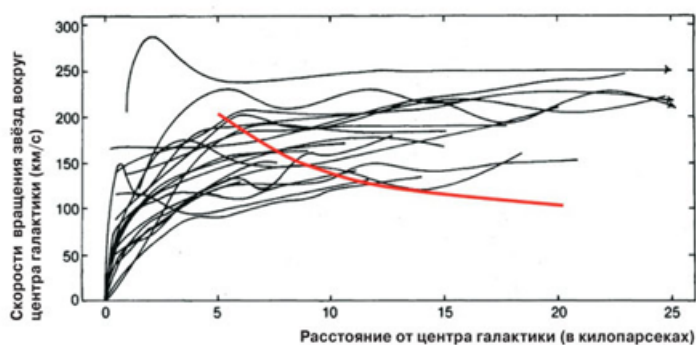


Рис. 1: Распределение скоростей в галактиках и галактических скоплениях

Согласно законам Ньютона скорость звезд v в галактике зависит от радиуса до центра галактики r следующим образом:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

где G - гравитационная постоянная; M - масса центра галактики. В экспериментальных измерениях получено, что с увеличением радиуса, начиная с некоторого расстояния, ротационные кривые звезд в галактике остаются постоянной, а не убывает как это должно быть согласно ньютоновской механике, откуда следует, что $M(r) \sim r$. Это означает присутствие темной материи в аккреционный диск. Из вида ротационных кривых следует что плотность распределения массы темной материи ρ в галактике имеет зависимость вида:

$$\rho \sim \frac{M(r)}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}.$$

В данной зависимости делается предположение о сферической симметрии распределения темной материи относительно центра галактики. Это предположение основано на отсутствии диссипации энергии в виду слабого взаимодействия темной материи, из-за чего темная материя не собирается в аккреционный диск, в отличие от видимой материи.

Численно распределение темной материи в галактике Млечный путь хорошо аппроксимируется моделью Наварро-Френка-Уайта:

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}$$

где $\rho_s = 20 \text{ кпк}$ - скалярный радиус.

1.1.2 Гравитационное линзирование

Явление искривления светового луча под воздействием гравитации было предсказано в общей теории относительности, а обнаружение гравитационных линз явилось одним из подтверждений общей теории относительности. Идея космического сдвига (слабое линзирование) для галактик восходит к лекции, прочитанной Ричардом Фейнманом в Калифорнийском технологическом институте в 1964 году.

Слабое линзирование представляет собой отклонения траектории фотонов, излучаемых звездами в других галактиках, массивными структурами, которые находятся между звездой и наблюдателем, что приводит к искажению форм наблюдаемых галактик. Эти сдвиги имеют порядок нескольких процентов, что позволяет прямыми измерениями построить карту плотности массы во вселенной. По мере того, как они движутся от фоновой галактики к наблюдателю, фотоны отклоняются из-за флуктуаций массы вдоль линии обзора рисунок 2. Гравитационная линза сильнее всего искривляет свет, проходящий ближе

к массивному центру, и меньше искривляет свет, который проходит дальше от массивного центра, откуда следует, что гравитационная линза не имеет точки фокусировки в отличие от оптической линзы, но обладает фокальной линией.

Утверждать, что гравитационное линзирование произошло под действием темной материи позволяет тот факт, что явление слабого линзирования наблюдается для галактик и скоплений галактик масса которых не достаточна для создания гравитационной линзы и необходима дополнительная масса для создания эффекта. На рисунке 3 приведено изображение скопления галактик *C10024+17*, для которых проявляется эффект гравитационного линзирования под влиянием темной материи.

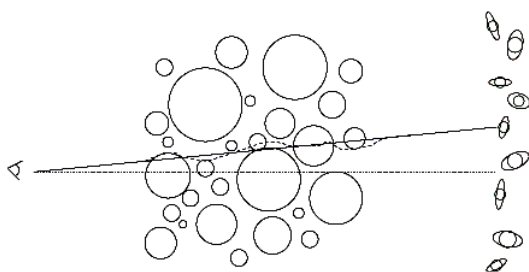


Рис. 2: Эффект гравитационного линзирования



Рис. 3: Темное кольцо на изображении скопления галактик *C10024+17*, связанное с темной материей

1.1.3 Термодинамический метод

Космическое фоновое излучение предлагает чрезвычайно мощный способ проверки происхождения колебаний и ограничения содержания вещества, геометрии и поздней эволюции Вселенной. Температура и плотность газа могут быть определены на основе энергии и потока рентгеновского излучения от этого газа, что дает возможность оценить его массу. На основе данного подхода многими лабораториями было получено, что если учитывать только массу звёзд и газа в галактиках и скоплениях галактик, то данная масса недостаточна для удержания входящего в галактики и скопления горячего газа. Согласно современным наблюдениям темная материя занимает 85 % от всей плотности материи во вселенной.

1.2 Темная материя

1.3 Гало темной материи

Гало тёмной материи это компонент галактик, окружающий галактический аккреционный диск и распространяющийся за пределы видимой части галактики. Основной вклад в массу галактики дает масса гало темной материи, которое не наблюдается напрямую, а только косвенно, путем влияния на движения звезд в галактике.

Нижняя граница допустимой массы определяется числом частиц, которые могут содержаться в данной ячейке фазового пространства, задается спиновой статистикой частиц. Если темная скалярная, то бозе-статистика говорит, что нет ограничения на количество частиц, которые могут быть упакованы в одну и ту же точку в фазовом пространстве. В этом случае число заполнения темной материей пространства настолько высоко, что его можно эффективно рассматривать как классическое поле. Используя оценку для карликовых галактик можно получить, что нижняя граница массы $m_{scalar} > 10^{-22}$ еВ. Используя аналогичный подход для фермионов, оценивая массу гало для карликовых галактик, получена нижняя граница массы $m_{scalar} > 0.7$ кеВ. [7]

Существует проблема сингулярного гало, которая возникает при численном моделировании распределения темной материи, в которых получено, что темная материя будет образовывать сингулярность в центре галактики и иметь наибольшую плотность распределения в областях с высокой барионной плотностью. Однако в экспериментальных наблюдениях было обнаружено, что темная материя заполняет пустоты между галактик и не вызывает сингулярностей.

В случае если темная материя существует, то это может оказывать влияние на видимом секторе:

1. динамике галактической структуры;
2. аномального магнитного момента мюона;
3. радиуса заряда протона.

Для поиска темной материи необходимы детекторы, которые обладают высокой чувствительностью, либо высокая интенсивность взаимодействий.

1.3.1 Классификация темной материи

На ранних стадиях существования вселенной, когда взаимодействие темной и барионной материями были неупругие, то данные виды материи находились в термическом и

химическом равновесии, т.е. частицы темной материи постоянно пополняются. При расширении вселенной частицам темной материи стало все труднее находить партнера для перехода в видимый сектор и взаимодействия темной и барионной материи становятся упругими. В итоге произошло замерзание плотности темной материи, после которого темная и барионная материя находятся в термодинамическом равновесии.

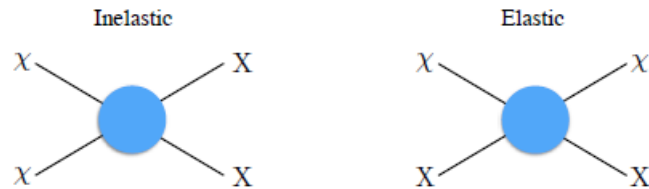


Рис. 4: Неупругое и упругое рассеяние темной \mathcal{X} и барионной материи X

Классификация темной материи построена на предположении, что на ранних стадиях эволюции вселенной темная материя и барионная материя, образуя космическую плазму, находились в термодинамическом и химическом равновесии и при резком падении температуры взаимодействие между барионной и темной материей прекратилось. В зависимости от температуры, при которой это произошло, выделяют:

1. Горячая темная материя. В данном случае частицы были ультррелятивистские;
2. Холодная темная материя. В данном случае частицы были нерелятивистские;
3. Теплая темная материя. В момент выхода из теплового равновесия эти частицы были релятивистскими, но на данном этапе они являются нерелятивистскими.

Если бы темная материя была горячей, то при движении с релятивистскими скоростями происходило бы разглаживание неоднородности плотности материи, что препятствовало образованию наблюдаемой структуры космической сети. Откуда следует, что темная материя является либо холодной, либо теплой т.е. движется с нерелятивистскими скоростями.

Для тепловой получено ограничение, исходя из нерелятивистского движения на поздних этапах вселенной, что нижний предел массы данных частиц лежит в области ~ 3.3 кэВ, тогда структура вселенной будет соответствовать наблюдаемой.

1.4 Темный фотон

1.4.1 Парафотон

Первым кто высказал идею о существовании гипотетической частицы со схожими как у электромагнитного фотона свойствами был Окунь Л. Б.. Сверхлегкая гипотетическая векторная частица могла бы занять исключительное положение, которая взаимодействовала бы, как обычный фотон, только с электромагнитным током, поскольку из-за электрической нейтральности эксперименты с обычным веществом не дают любые ограничения на константы связи таких частиц. Окунь Л. Б. использовал модификацию электродинамики, путем введения двух фотонов с потенциалами A_1 и A_2 , которые имеют название парафотоны с массами $m_1 < m_2$ с константами связи e_1 и e_2 . Лагранжиан в этом случае имеет вид[5]:

$$L = -\frac{1}{4} (F_{1\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} (F_{2\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} m_1^2 A_{1\mu} + \frac{1}{2} m_2^2 A_{2\mu} + j_\mu (e_1 A_{1\mu} + e_2 A_{2\mu})$$

где j_μ - обычный электромагнитный ток.

1.4.2 Кинематическое смешивание темного и электромагнитного фотонов

Стандартная модель физики частиц описывает сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия в терминах калибровочной теории, основанной на $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ -симметрии. Данная модель феноменологически успешна, но не дает объяснения происхождения этой симметрии. Вполне возможно, что более полная теория природы включить дополнительные калибровочные взаимодействия. Введение абелевого калибровочного бозона темного сектора может обеспечить связь темного сектора и стандартной модели. Предполагается, что темный фотон может кинематически смешиваться с электромагнитным фотоном и тем самым взаимодействовать с видимой материей.

По грубым предположениям масса темного фотона должна лежать в пределах от МэВ до 10 ГэВ. Нижняя граница определяется наблюдаемым гравитационным взаимодействием темной материи и видимой материи, а так же данными полученными на ускорителях. Верхняя граница определяется кинематическими характеристиками ускорителей. Диапазон масс от МэВ до нескольких ГэВ представляет наибольший интерес для темного сектора, так как в этом случае возможно установить тепловое равновесие темной материей и видимой материей вселенной.

Одной из трудностей изучения темной материи является то, что взаимодействий осуществляется только посредством гравитационных взаимодействий. Возможно предположить, что существует векторная массивная частица-медиатор, которая отвечает за взаи-

модействие между видимым сектором и темной материей путем кинематического смешивания с электромагнитным фотоном. Данное предположение связано со спонтанным нарушением калибровочной симметрии $U(1)$ [11]. За смешивание электромагнитного и темного фотона отвечает элемент в общем лагранже $\frac{1}{2}\epsilon F^{\nu\mu}F'_{\nu\mu}$. А общий лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\psi,A} + \mathcal{L}_{\chi,A'} + \mathcal{L}_{A,A'},$$

где $\mathcal{L}_{\psi,A}$ - лагранжиан взаимодействия частицы стандартной модели и электромагнитного фотона:

$$\mathcal{L}_{\psi,A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eA^{\mu}) - M_{\psi} \} \psi,$$

$\mathcal{L}_{\chi,A'}$ - взаимодействие темного фотона и темного фермиона:

$$\mathcal{L}_{\chi,A'} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda_{M_{A'}}^2 A'_{\mu}A'^{\mu} + \bar{\chi} \{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - g'A'^{\mu}) - M_{\chi} \} \chi,$$

$\mathcal{L}_{A,A'}$ - лагранжиан взаимодействия темного и электромагнитного фотонов:

$$\mathcal{L}_{A,A'} = \frac{1}{2}\epsilon F_{\mu\nu}F'^{\mu\nu},$$

Возможные методы поиска темного фотона:

1. тормозное излучение $e^{-}Z \rightarrow e^{-}A'Z$. В этом случае электрон падает в мишень, которая состоит из ядер с зарядом Z ;
2. аннигиляция электрон-позитронной пары $e^{-}e^{+} \rightarrow \gamma A'$;
3. распад мезонов.

1.5 Эксперимент NA64

1.5.1 Методология эксперимента NA64

В эксперименте NA64 идет прямой поиск темных фотонов (A') в суб-ГэВ регионе, для которого используется реакция:

$$e^{-}Z \rightarrow e^{-}ZA', \quad A' \rightarrow \text{invisible},$$

с энергией электрона $e^{-}100$ ГэВ и активной мишенью Z . В этой реакции за счет кинетического смешивания электромагнитного и темного фотона происходит рождение темного фотона и его дальнейший распад на частицы из темного сектора, которые не взаимодействуют с видимым сектором и уносят с собой часть энергии. Таким образом, в случае рождения темного фотона с энергией $E_{A'} = fE_0$, где E_0 - начальная энергия электрона и

f - доля начальной энергии электрона перешедшей в темный фотон, будут фиксироваться события, количество которых выше ожидаемого фона, с потерей большого количества энергии $E_{A'}$ и рассеянием оставшейся часть энергии $E_e = (1-f)E_0$ электроном в мишени. При этом полагается, что частицы из темного сектора, которые получаются в результате распада темного фотона, проходят детектор без распада в видимый сектор.

1.5.2 Экспериментальная установка NA64

Схематичное представление установки NA64 показано на рисунке 5.

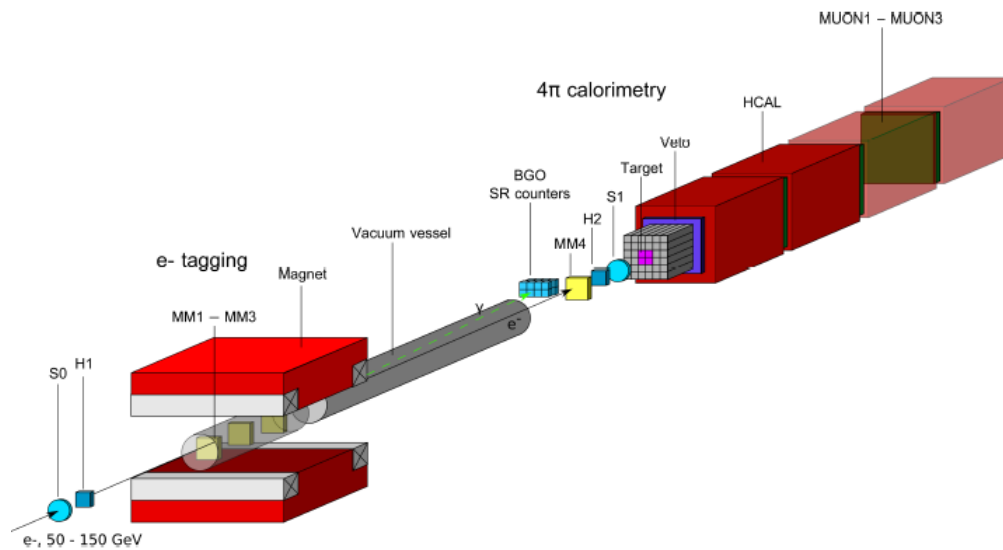


Рис. 5: Схематичное представление установки NA64

Камеры MicroMegas (MM), которые используются для обнаружения и определения положения, времени прибытия и импульса ионизирующих частиц, находятся внутри вакуумной трубы и магните напряженностью 1,5 Т перед установкой.

Три сцинтилляционных счетчика S0, S1, S2 используются для определения прохождения пучка определенной части траектории и выполняют роль триеров для начала записи событий.

В установке используется электромагнитный калориметр высокой плотности (ECAL), представляющий собой блок из $6 \times 6 \times 2$ ячеек для определения первичной энергии взаимодействия электрона с ECAL. Каждая ячейка состоит из сцинтиллятор-свинцовых слоев. Продольно колориметр подразделен на предливневой детектор (PreShower) состоящий из первых 36 ячеек и содержащий 16 слоев, а остальные 36 ячеек представляют собой главную часть ECAL и содержат 134 слоя. Важной характерной особенностью ECAL является то, что световоды WLS имеют вид спирали чтобы избежать утечки энергии через них.

Высокоэффективный счетчик Veto для идентификации b- и c-адронов и измерения расстояние между точкой столкновения (рождения b-, c-адронов) и точкой их распада на другие частицы с точностью в 10 микрон.

Два сцинтилляционных годоскопа H1, H2, которые состоят из оптических волокон в двух плоскостях и ориентированных перпендикулярно, что позволяет определить координаты пролетающей частицы.

Герметичный адрон калориметр HCAL, расположенный на нижнем конце установки, чтобы обнаружить все конечные продукты из первичной реакции в ECAL.

Вакуумная труба длиной 15 м между магнитом и ECAL предотвращает поглощение фотонов синхротронного излучения, для последующего обнаружения в конце вакуумной трубы детектором SRD, состоящем из массива 8 кристаллов BGO.

Один из основных источников фона в эксперименте связан с возможным присутствием низкой энергии в распределении электронов пучка по энергиям. Этот хвост в распределении энергии вызван взаимодействием электронов с материалом установки, например, входных окон линий пучка, остаточного газа и т.д. Еще один источник электронов низкой энергии происходит из-за распада пиона или мюона на линии пучка. Данные реакции являются крупнейшим источником систематической неопределенности в эксперименте. Для улучшения отбора первичных электронов высоких энергий и дополнительного подавления фона используется высокоэнергетическая система мечения, использующую синхротронное излучение (SR) от электронов высоких энергий в дипольном магните. В виду большой энергии электрона синхротронное излучение и попад электрона в мишень регистрируются одновременно.

Проведённые в 2016 году исследования по прямому поиску векторного бозона в суб-ГэВ регионе масс в эксперименте NA64, SPS CERN, показали, что для набранной статистики в $4,3 \cdot 10^{10}$ событий, попавших на мишень, отсутствуют сигналы характерные рождению темного фотона. Откуда следует, что были получены новые, более строгие, ограничения на константу смешивания темного фотона A' с электромагнитным фотоном $10^{-5} < \epsilon < 10^{-2}$ и массы $1 < \text{ГэВ}$.

2 Решение уравнения Дирака в квазиклассическом подходе

Последовательной релятивистской квантовой механики не существует. Только квантовая теория поля адекватно описывает реальную физическую картину, что происходит из-за нестабильности вакуума при наличии полей, что ведет к рождению частиц, и точное построение квантовой теории с фиксированным числом частиц невозможно. Построение квазиклассических асимптотик решений релятивистских волновых уравнений одновременно приводит к построению последовательной, с точностью до любого порядка разложения по $\sqrt{\hbar}$, релятивистской квантовой механики. Вероятность нестабильности вакуума имеет характер пропорциональный $e^{-\frac{1}{\hbar}}$, то в квазиклассическом приближении вакуум можно считать стабильным.

Будем рассматривать операторы $\hat{A} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, упорядоченные по Вейлю, символы которых бесконечно дифференцируемые и растущие не быстрее чем полином. Квантование Вейля имеет вид:

$$\hat{A}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}, t, \hbar) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} A(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, t, \hbar) e^{i\langle \hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\eta} \rangle + i\langle \hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\zeta}$$

где \mathbb{S} - пространство Шварца; $A(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, t, \hbar)$ - вейлевский символ оператора $\hat{A}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}, t, \hbar)$. Функция $\phi(z, t) \in \mathbb{S}$ принадлежит пространству Шварца:

1. $\phi(z, t) \in C^\infty$;
2. растут вместе со своими производными по z при $|z| \rightarrow \infty$ не быстрее, чем полином, и равномерно по $t \in \mathbb{R}$;
3. для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ и $T > 0$ существуют постоянные $M^\alpha(T)$ и $m \in \mathbb{N}$, такие что:

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(z, t)}{\partial z^{|\alpha|}} \right| \leq M^\alpha(T) (1 + |z|)^m, \quad z \in \mathbb{R}^{2n}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

где мультииндексы $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{2n}$:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_{2n}^{\alpha_{2n}},$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} V(z)}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} V(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \dots \partial z_{2n}^{\alpha_{2n}}}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{2n}!$$

Евклидово и эрмитово скалярное произведение:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^n p_j x_j, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n p_j^* x_j.$$

Решение уравнения Дирака будем искать в классе $\mathbb{CS}_D(Z(t), N, \hbar)$ - квазиклассических сосредоточенных на фазовой траектории $Z(t) = (\mathbf{P}(t), \mathbf{X}(t))$, где $\mathbf{P}(t)$ - импульсная часть фазовой траектории [21]; $\mathbf{X}(t)$ - координатная часть. Функции данного класса сингулярно зависят от \hbar и обобщают понятие уединенной волны. Волновая функция $\psi \in \mathbb{CS}_D(Z(t), N, \hbar)$ если выполняются условия:

1. Справедливо уравнение Дирака: $\left\{ -i\hbar\partial_t + \widehat{\mathcal{H}}_D \right\} \psi = 0$
2. Для волновой функции в x -представлении и p -представлении существуют обобщенные пределы:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\psi(\mathbf{x}, t, \hbar)|^2 = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)),$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\psi(\mathbf{p}, t, \hbar)|^2 = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t)),$$

т.е. в любой фиксированный момент времени $\psi(\mathbf{p}, t, \hbar)$ в пределе при $\hbar \rightarrow 0$ сосредоточены в окрестности точки, лежащей на фазовой траектории. Такой подход к определению дает максимально широкий спектр состояний в пространстве всех квантовомеханических состояний в котором можно говорить о переходе от квантовой механики к классической. Если волновая функция $\psi \in \mathbb{CS}_D(Z(t), N, \hbar)$ то $\mathbf{P}(t), \mathbf{X}(t)$ являются решением соответствующей классической системы Гамильтона, т.е. невозможно получить квазиклассическую сосредоточенность на фазовых кривых, не являющихся классическими траекториями данной системы.

2.1 Квазиклассические решение уравнения Дирака

2.1.1 Собственные вектора и значения главного символа гамильтониана

Уравнение Дирака в гамильтоновой форме имеет вид:

$$\left\{ -i\hbar\partial_t + \widehat{\mathcal{H}}_D \right\} \psi = 0,$$

гамильтониан Дирака без учета аномального взаимодействия Паули:

$$\widehat{\mathcal{H}}_D = \left\langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{\mathcal{P}} \right\rangle + \alpha_0 m_0 c^2 + e\Phi(\mathbf{x}, t)\mathbb{I}_4,$$

где $(\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$ - α -матрицы Дирака; $\widehat{\mathcal{P}} = \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ - оператор обобщенного импульса; $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{x}, t)$ - векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля соответственно; m_0 - масса фермиона.

Гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}_D$ квантовой системы при квантовании Вейля связан с символом гамильтониана $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t, \hbar)$ следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_D(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{x}}, t, \hbar) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t, \hbar) \widehat{\Delta}(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{p} d\mathbf{x}$$

$$\widehat{\Delta}(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle \widehat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}, \boldsymbol{\eta} \rangle + i\langle \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta} \rangle} d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\zeta}$$

где $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t, 0) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ - главный символ гамильтониана, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_p^3$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^3$. Главный символ гамильтониана уравнения Дирака в виде блочной матрицы:

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \{e\Phi(\mathbf{x}, t) + m_0c^2\} \mathbb{I}_2 & c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{P} \rangle \\ c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{P} \rangle & \{e\Phi(\mathbf{x}, t) - m_0c^2\} \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения для матричного оператора удовлетворяют выражениям:

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)f = \lambda f, \quad \det \|H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) - \lambda \mathbb{I}_4\| = 0,$$

подставив явное выражение главного символа гамильтониана через матрицы Паули в матричное уравнение получим:

$$\begin{vmatrix} \{e\Phi(\mathbf{x}, t) + m_0c^2 - \lambda\} \mathbb{I}_2 & c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{P} \rangle \\ c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{P} \rangle & \{e\Phi(\mathbf{x}, t) - m_0c^2 - \lambda\} \mathbb{I}_2 \end{vmatrix} = 0,$$

для вычисления определителя блочной матрицы используем формулу [12]:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det (AD - ACA^{-1}B)$$

и с учетом свойства матриц Паули:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha} \rangle \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle + i \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}] \rangle$$

получим, что

$$AD = \left\{ (e\Phi(\mathbf{x}, t) - \lambda)^2 - (m_0c^2)^2 \right\} \mathbb{I}_2, \quad ACA^{-1}B = CB = \{c^2\mathcal{P}^2\} \mathbb{I}_2,$$

подставив в матричное уравнение получим собственные значения главного символа гамильтониана:

$$\lambda^\pm = e\Phi(\mathbf{x}, t) \pm \sqrt{m_0^2c^4 + c^2\mathcal{P}^2} = e\Phi(\mathbf{x}, t) \pm \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t).$$

Найдем собственные вектора для собственного значения $\lambda^+ = e\Phi(\mathbf{x}, t) + \varepsilon$:

$$\begin{cases} (m_0c^2 - \varepsilon) \psi^{(+)} + c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{P} \rangle \varphi^{(+)} = 0 \\ c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{P} \rangle \varphi^{(+)} - (m_0c^2 + \varepsilon) \psi^{(+)} = 0 \end{cases},$$

определитель этой системы равен нулю т.е. функции линейно-зависимы. Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \psi^{(+)} \\ \varphi^{(+)} \end{pmatrix} = \frac{N}{m_0c^2 + \varepsilon} \psi^{(+)} \begin{pmatrix} m_0c^2 + \varepsilon \\ c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \rangle \end{pmatrix},$$

где произвольные функции $\psi^{(+)}$ нормированы, тогда для собственных векторов нормировочная константа имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi^{(+)*}) \psi^{(+)} d^3x = 1, \quad N = \frac{m_0c^2 + \varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon(m_0c^2 + \varepsilon)}},$$

аналогично для собственного значения $\lambda^- = e\Phi(\mathbf{x}, t) - \varepsilon$. В итоге получим для главного символа гамильтониана:

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \Pi_{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \lambda^{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \Pi_{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t),$$

собственные вектора:

$$\Pi_+(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(m_0c^2 + \varepsilon)}} \begin{pmatrix} m_0c^2 + \varepsilon \\ c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\Pi_-(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(m_0c^2 + \varepsilon)}} \begin{pmatrix} -m_0c^2 - \varepsilon \\ c \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \rangle \end{pmatrix}.$$

Полученные матрицы ортогональны и нормированны т.е. справедливы выражения:

$$\Pi_+^{\dagger} \Pi_- = 0, \quad \Pi_+^{\dagger} \Pi_+ = 0, \quad \Pi_+^{\dagger} \Pi_+ = \mathbb{I}_2, \quad \Pi_-^{\dagger} \Pi_- = \mathbb{I}_2.$$

2.1.2 Разложение решения уравнения Дирака по собственным векторам главного символа гамильтониана

Матрицы Π_+ и Π_- собственные вектора линейной эрмитовой матрицы $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ т.е. $\Pi_{\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$ и образуют ортонормированный базис. Разложим волновую функцию по собственным векторам главного символа гамильтониана :

$$\psi(\mathbf{x}, t, \hbar) = \Pi_+(t) \mathcal{U} + \Pi_-(t) \mathcal{V},$$

где $\Pi_+(t) = \Pi_+(P(t), X(t), t)$, и $\Pi_-(t) = \Pi_-(P(t), X(t), t)$ взяты на фазовой траектории; \mathcal{U}, \mathcal{V} - траекторно сосредоточенные спиноры класса \mathcal{JP}_{\hbar}^t . Спинор $\mathcal{U} \in \mathcal{JP}_{\hbar}^t$ если его можно представить в виде:

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, t, \hbar) = \mathcal{U}(t) \Phi(\mathbf{x}, t, \hbar),$$

где $\mathcal{U}(t)$ - спинор т.е. $\mathcal{U}^+(t)\mathcal{U}(t) = 1$; $\Phi(\mathbf{x}, t, \hbar)$ - траекторно сосредоточенная функция отвечающая классу \mathcal{P}_{\hbar}^t . Класс траекторно сосредоточенных функций представляет собой:

$$\mathcal{P}_{\hbar}^t = \mathcal{P}_{\hbar}^t(Z(t), S(t)) = \left\{ \Phi : \Phi(\mathbf{x}, t, \hbar) = \varphi\left(\frac{\Delta\mathbf{x}}{\sqrt{\hbar}}, t, \hbar\right) e^{\frac{i}{\hbar}[S(t) + \langle \mathbf{P}(t), \Delta\mathbf{x} \rangle]} \right\},$$

где $Z(t) = (P(t), X(t))$ - траектория на фазовом пространстве; $\varphi(\eta, t, \hbar)$ - функция из пространства Шварца \mathbb{S} по переменной η ; $\Delta\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{p}$ - смещение переменных на фазовую траекторию:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - X(t), \quad \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - P(t).$$

Функция принадлежит пространству Шварца $\varphi(x) \in \mathbb{S}$:

$$\varphi(x) \in C^\infty[a, b], \quad \forall m, l \in \mathbb{N}, \quad \exists M_{ml} \in \mathbb{R} : \left| x^m \frac{\partial^l \varphi(x)}{\partial x^l} \right| < M_{ml},$$

Введем операторы, которые представляют собой сдвиг операторов импульса и координаты на фазовую траекторию частицы:

$$\Delta\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} - P(t), \quad \Delta\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - X(t),$$

для операторов $\Delta\hat{\mathbf{p}}$, $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ действующих на классе траекторно сосредоточенных функций \mathcal{P}_{\hbar}^t справедлива оценка [21]:

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = \hat{O}(\sqrt{\hbar}), \quad \Delta\hat{\mathbf{p}} = \hat{O}(\sqrt{\hbar}),$$

под ограниченным оператором понимается такой, для которого на классе основных функций \mathcal{D}_0 справедливо :

$$\frac{\|\hat{F}\Psi\|}{\|\Psi\|} = O(\hbar^\alpha), \quad \Psi \in \mathcal{D}_0, \quad \hbar \rightarrow 0.$$

Разложим гамильтониан уравнения Дирака в ряд Тейлора по степеням малости операторов $\Delta\hat{\mathbf{p}}$, $\Delta\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_D(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}, t, \hbar) &= \hat{\mathcal{H}}_D(P(t) + \Delta\hat{\mathbf{p}}, X(t) + \Delta\hat{\mathbf{x}}, t, \hbar) = H_0(Z(t), t) + \\ &+ \langle H_{0z}(Z(t), t) \cdot \Delta\hat{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta\hat{\mathbf{z}} \cdot H_{0zz}(Z(t), t) \Delta\hat{\mathbf{z}} \rangle, \end{aligned}$$

где введено обозначение $z_j = x_j$, $z_{n+j} = p_j$, $j = \overline{1, n}$. Матрицы $H_{0z}(Z(t), t)$ и $H_{0zz}(Z(t), t)$ представляют собой:

$$H_{0z}(Z(t), t) = \left\| \frac{\partial H_0}{\partial z_i} \right\|_{2n \times 1}, \quad H_{0zz}(Z(t), t) = \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial z_i \partial z_j} \right\|_{2n \times 2n}.$$

Откуда получим:

$$H_0(Z(t), t) = \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}(t) \rangle - e \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(X(t), t) \rangle + \alpha_0 m_0 c^2 + e\Phi(X(t), t)\mathbb{I}_4,$$

$$H_{0x}(Z(t), t) = -e \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_x \mathbf{A}(X(t), t) \rangle + e\partial_x \Phi(X(t), t)\mathbb{I}_4,$$

$$H_{0xx}(Z(t), t) = -e \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \partial_x^2 \mathbf{A}(X(t), t) \rangle + e \partial_x^2 \Phi(X(t), t) \mathbb{I}_4,$$

$$H_{0xp}(Z(t), t) = 0, \quad H_{0p}(Z(t), t) = \boldsymbol{\alpha}, \quad H_{0pp}(Z(t), t) = 0.$$

Обозначим элемент разложения по переменной \mathbf{x} в ряд Тейлора по степени малости переменной $\Delta \mathbf{x}$:

$$d_T^n f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!} \partial_k^n f(x, t) \Delta x_k^n, \quad d_T^{0, \dots, n} = \sum_{j=0}^n d_T^j.$$

Подставим в уравнение Дирака разложение до второго порядка оператора гамильтона по степеням малости операторов $\Delta \hat{\mathbf{p}}$, $\Delta \hat{\mathbf{x}}$ получим:

$$\left\{ -i\hbar \partial_t + \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \hat{\mathbf{p}} \rangle + H_0(Z(t), t) - e \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot (d_T^1 \mathbf{A}(X(t), t) + d_T^2 \mathbf{A}(X(t), t)) \rangle + \right. \\ \left. + e (d_T^1 \Phi(X(t), t) + d_T^2 \Phi(X(t), t)) \mathbb{I}_4 \right\} \psi = 0.$$

Действие $\langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \hat{\mathbf{P}}_2 \rangle$ и $i\hbar \partial_t$ на матрицы $\Pi_{\pm}(t)$ имеет вид:

$$\langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta \hat{\mathbf{P}}_2 \rangle \Pi_{\pm}(t) = \pm \Pi_{\pm}(t) \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \hat{\mathbf{P}}_2 \rangle + \Pi_{\mp}(t) \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \hat{\mathbf{P}}_2 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \hat{\mathbf{P}}_2 \rangle \right),$$

$$\partial_t \Pi_{\pm}(t) = \frac{i}{2} \Pi_{\pm}(t) \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \mp \frac{\gamma}{2} \Pi_{\mp}(t) \left(\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right),$$

где $\varepsilon(t) = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \mathcal{P}^2(t)}$ и использованы обозначения:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{c}{\varepsilon(t)} \mathcal{P}(t), \quad \mathcal{P}(t) = \mathbf{P}(t) - \frac{e}{c} \mathbf{A}(X(t), t), \quad \gamma = \frac{\varepsilon(t)}{m_0 c^2},$$

$$\Delta \hat{\mathcal{P}}(t) = \Delta \hat{\mathbf{p}}(t) - \frac{e}{c} \mathbf{A}(X(t), t), \quad \Delta \hat{\mathcal{P}}_n(t) = \Delta \hat{\mathbf{p}}(t) - \frac{e}{c} d_T^{1, \dots, n} \mathbf{A}(X(t), t).$$

Собственные значения главного символа гамильтониана λ^{\pm} на классе функций \mathcal{P}_{\hbar}^t удовлетворяют уравнениям классической системы гамильтона с решением на фазовой траектории $Z(P(t), X(t))$ [21].

На основе собственных значений λ^{\pm} построим гамильтониан уравнения Шредингера, в котором главным символом является λ^+ , тогда справедлива оценка [16]:

$$\left\{ -i\hbar \partial_t - \hat{\lambda} \right\} \Psi = \hat{O}(\hbar^{3/2}),$$

$$\hat{\lambda} = \lambda^+(t) + \langle \lambda_z, \Delta \hat{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{\mathbf{z}}, \lambda_{zz} \Delta \hat{\mathbf{z}} \rangle,$$

где производные имеют вид:

$$\lambda_{\mathbf{x}}^{\pm} = e \Phi_{\mathbf{x}} \mp e \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}_{\mathbf{x}} \rangle, \quad \lambda_{\mathbf{p}}^{\pm} = \pm c \boldsymbol{\beta}, \quad \lambda_{pp}^{\pm} = \pm \frac{c^2}{\varepsilon} \|\delta_{ij} - \beta_i \beta_j\|,$$

$$\lambda_{\mathbf{px}}^\pm = (\lambda_{\mathbf{xp}}^\pm)^T = -\frac{e}{c} \lambda_{\mathbf{pp}}^\pm \left\| \mathbf{A}_{x_j}^i \right\|, \quad \lambda_{\mathbf{xx}}^\pm = \left\| e \Phi_{x_i x_j} \mp e \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}_{x_i x_j} \rangle - \frac{e^2}{c^2} \langle \mathbf{A}_{x_i}, \lambda_{\mathbf{pp}}^\pm \mathbf{A}_{x_i} \rangle \right\|,$$

в данных обозначения запишем вспомогательное выражение:

$$\frac{1}{2} \langle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{\mathbf{pp}}^+ \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle = \widehat{\lambda} - \langle \dot{\mathbf{X}}(t), \Delta \widehat{\mathbf{p}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{P}}(t), \Delta \widehat{\mathbf{x}} \rangle - e \Phi_{\mathbf{xx}} - \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}_{\mathbf{xx}} \rangle$$

Подставим ψ в виде разложения по собственным векторам главного символа гамильтониана и сгруппируем элементы по базисным матрицам $\Pi_\pm(t)$ получим:

$$\begin{aligned} & \Pi_+(t) \left\{ \left(\frac{\hbar \langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{2(1+\gamma^{-1})} - i\hbar \partial_t + c \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathbf{p}} \rangle + \lambda^+ - e \langle \boldsymbol{\beta}, d_T^{1,2} \mathbf{A} \rangle + e d_T^{1,2} \Phi \right) \mathcal{U} + \right. \\ & + \left[-\frac{i\hbar\gamma}{2} \left(\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right) + c \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_2 \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_2 \rangle \right) \right] \mathcal{V} \left. \right\} + \\ & + \Pi_-(t) \left\{ \left(\frac{\hbar \langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{2(1+\gamma^{-1})} - i\hbar \partial_t - c \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathbf{p}} \rangle + \lambda^- - e \langle \boldsymbol{\beta}, d_T^{1,2} \mathbf{A} \rangle + e d_T^{1,2} \Phi \right) \mathcal{V} + \right. \\ & + \left. \left[\frac{i\hbar\gamma}{2} \left(\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right) + c \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_2 \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_2 \rangle \right) \right] \mathcal{U} \right\} = \\ & = \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \end{aligned}$$

выделим оператор $\widehat{\lambda}$ в выражениях при матрицах $\Pi_\pm(t)$ и с учетом его разложения до второго порядка по степеням малости операторов $\Delta \widehat{\mathbf{p}}$, $\Delta \widehat{\mathbf{x}}$, используя обозначения:

$$R = \frac{i\hbar\gamma}{2} \left(\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right) + c \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_2 \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_2 \rangle \right),$$

$$M = -2\varepsilon - 2c \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathbf{p}} \rangle + (-i\hbar \partial_t + \widehat{\lambda}) - \frac{1}{2} \langle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{\mathbf{pp}}^+ \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle,$$

получим:

$$\begin{aligned} & \Pi_+(t) \left\{ \left(-i\hbar \partial_t + \widehat{\lambda} - \frac{1}{2} \langle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{\mathbf{pp}}^+ \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \frac{\hbar \langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{2(1+\gamma^{-1})} \right) \mathcal{U} + R^+ \mathcal{V} \right\} + \\ & + \Pi_-(t) \{ M \mathcal{V} + R \mathcal{U} \} = \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \end{aligned}$$

где для слагаемых в этом выражении действующих на классе \mathcal{P}_\hbar^t справедливы оценки:

$$2\varepsilon = \widehat{O}(1), \quad \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathbf{p}} \rangle = \widehat{O}(\hbar^{1/2}), \quad (-i\hbar \partial_t + \widehat{\lambda}) = \widehat{O}(\hbar), \quad \langle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{\mathbf{pp}}^+ \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle = \widehat{O}(\hbar),$$

$$\frac{i\hbar\gamma}{2} \left(\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right) = \widehat{O}(\hbar),$$

$$\left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right) = \widehat{O}(\hbar^{1/2}).$$

$$d_T^n \mathbf{A} = \widehat{O}(\hbar^{n/2}), \quad d_T^n \Phi = \widehat{O}(\hbar^{n/2}).$$

2.1.3 Решение с точностью до $\hbar^{3/2}$

В виду линейной независимости матриц $\Pi_{\pm}(t)$ получим систему уравнений, приравняв выражения при матрицах $\Pi_{\pm}(t)$ к оценке $\widehat{O}(\hbar^{3/2})$. Решение данных систем будем искать в виде разложения функций \mathcal{U} и \mathcal{V} в ряд по степени малости $\hbar^{1/2}$ до порядка $\hbar^{3/2}$, где функции $\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{V}^{(i)} \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\hbar}^t$:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(0)} + \hbar^{1/2}\mathcal{U}^{(1)} + \hbar\mathcal{U}^{(2)}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^{(0)} + \hbar^{1/2}\mathcal{V}^{(1)} + \hbar\mathcal{V}^{(2)}.$$

Спинор $\mathcal{U} \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\hbar}^t$ если его можно представить в виде:

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, t, \hbar) = \mathcal{U}(t)\Phi(\mathbf{x}, t, \hbar),$$

где $\mathcal{U}(t)$ - спинор т.е. $\mathcal{U}^+(t)\mathcal{U}(t) = 1$; $\Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\hbar}}, t\right)$ - траекторно сосредоточенная функция отвечающая классу \mathcal{C}_{\hbar}^t , который представляет собой:

$$\mathcal{C}_{\hbar}^t = \mathcal{C}_{\hbar}^t(Z(t), S(t)) = \left\{ \Phi : \Phi(\mathbf{x}, t, \hbar) = \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\hbar}}, t\right) e^{\frac{i}{\hbar}[S(t) + \langle \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{x} \rangle]} \right\},$$

где $\varphi(\eta, t)$ - функция из пространства Шварца \mathbb{S} по переменной η .

Подставив в уравнение:

$$M\mathcal{V} + R\mathcal{U} = \widehat{O}(\hbar^{3/2}),$$

разложение функций \mathcal{U} и \mathcal{V} по $\hbar^{1/2}$ с учетом оценок для операторов $\Delta \widehat{\mathbf{p}}, \Delta \widehat{\mathbf{x}}$ получим:

$$\mathcal{V}^0 = 0, \quad \mathcal{V}^1 = Q_1\mathcal{U}^0, \quad \mathcal{V}^2 = Q_1\mathcal{U}^1 + Q_2\mathcal{U}^0$$

где введены обозначения:

$$\hbar^{1/2}Q_1 = \frac{c}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right),$$

$$\hbar Q_2 = -\frac{e}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\sigma}, d_T^2 \mathbf{A} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma}, d_T^2 \mathbf{A} \rangle \right) +$$

$$+ \frac{i\hbar\gamma}{2} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right) - \frac{c}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \langle \boldsymbol{\sigma}, \Delta \widehat{\mathbf{p}} \rangle \hbar^{1/2} Q_1.$$

Подставив в первое уравнение разложение \mathcal{V} получим уравнение на \mathcal{U} до второго порядка разложения по степеням малости $\hbar^{1/2}$:

$$\left\{ -i\hbar\partial_t + \hat{\lambda} - \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{pp}^+ \Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right\} \{ \mathcal{U}^{(0)} + \hbar^{1/2} \mathcal{U}^{(1)} + \hbar \mathcal{U}^{(2)} \} +$$

$$+ \left\{ \frac{-i\hbar\gamma}{2} \left(\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \frac{\langle \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \rangle \right) + c \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \hat{\mathcal{P}}_2 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \hat{\mathcal{P}}_2 \rangle \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \{ Q_1 \mathcal{U}^0 + Q_1 \mathcal{U}^1 + Q_2 \mathcal{U}^0 \} = \hat{O}(\hbar^{3/2}),$$

распишем и приравняем выражения при одинаковых порядках при \hbar^k . Для порядка \hbar получим уравнение:

$$\left\{ -i\hbar\partial_t + \hat{\lambda} - \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{pp}^+ \Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + 2\varepsilon Q_1^2 \right\} \mathcal{U}^0 = 0,$$

с учетом промежуточных соотношений:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, [\Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \times \Delta \hat{\mathcal{P}}_1] \rangle = -\frac{i\hbar e}{c} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}(t) \rangle,$$

$$\left[\langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \Delta \hat{\mathcal{P}}_1] \rangle \right]_+ = -\frac{i\hbar e}{c} \langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}(t)]] \rangle$$

где $[\cdot, \cdot]_+$ - антикоммутатор; получим уравнение:

$$\left\{ -i\hbar\partial_t + \hat{F} \right\} \mathcal{U}^0 = 0$$

где использовано обозначение:

$$\hat{F} = \hat{\lambda} + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \frac{\hbar e c}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}(t)]] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}(t) \rangle \right).$$

2.1.4 Уравнение Шредингера и Баргмана-Мишеля-Телегди

Решение уравнения будем искать в виде:

$$\mathcal{U}^0(\mathbf{x}, t) = \varphi^{(0)}(\mathbf{x}, t) \mathcal{U}(t),$$

где функция $\varphi^{(0)}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}_\hbar^t$. Тогда функция $\varphi^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left\{ -i\hbar\partial_t + \hat{\lambda} \right\} \varphi^{(0)} = 0.$$

откуда получим уравнение на спинор $\mathcal{U}(t)$:

$$\left\{ -i\hbar \frac{d}{dt} + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \frac{\hbar e c}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, [\boldsymbol{\beta} \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}(t)]] \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}(t) \rangle \right) \right\} \mathcal{U}(t) = 0$$

с учетом формулы для производной от относительной скорости $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ по времени [21]:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{ec}{\varepsilon} (\mathbf{E}(t) + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}(t)] - \boldsymbol{\beta} \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{E}(t) \rangle), \quad \frac{\beta^2}{1 + \gamma^{-1}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma},$$

получим выражение:

$$\left\{ -i\hbar \frac{d}{dt} + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}_0 \rangle \right\} \mathcal{U}(t) = 0$$

где $\mu_0 = \frac{\hbar e}{2m_0 c}$ - магнетон Бора и введено обозначение \mathbf{D}_0 :

$$\mathbf{D}_0 = \frac{\mu_0}{\gamma} \left\{ \frac{[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}(t)]}{1 + \gamma^{-1}} - \mathbf{H}(t) \right\}.$$

Рассмотрим векторную комбинацию спинора и сопряженного ему спинора:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathcal{U}^+ \boldsymbol{\sigma} \mathcal{U},$$

взяв производную от этого выражения с учетом уравнения для спинора \mathcal{U} получим:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^+ [\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}_0 \rangle, \boldsymbol{\sigma}]_+ \mathcal{U},$$

упростив выражение получим уравнение на $\boldsymbol{\eta}$:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{2}{\hbar} [\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{D}_0],$$

которое представляет собой уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди в системе покоя.

2.2 Решение уравнения Шредингера

Для решения уравнения Дирака в квазиклассическом подходе необходимо решить вспомогательное уравнение Шредингера построенное на основе собственных значений главного символа гамильтониана Дирака. Данное уравнение имеет вид:

$$\left\{ -i\hbar \partial_t + \widehat{\lambda} \right\} \varphi^{(0)} = 0$$

$$\widehat{\lambda} = \lambda^+(t) + \langle \lambda_z, \Delta \widehat{\mathbf{z}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta \widehat{\mathbf{z}}, \lambda_{zz} \Delta \widehat{\mathbf{z}} \rangle,$$

где $\varphi^{(0)} \in C_{\hbar}^t$; используется обозначение $\Delta z_k = \widehat{p}_k$, $\Delta z_n + k = \widehat{x}_k$, $k = \overline{1, n}$; $2n$ - размерность фазового пространства. С учетом коммутационных соотношений для импульса и координат получим:

$$[\Delta z_a, \Delta z_b]_- = i\hbar J_{ab}, \quad J_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b = \overline{1, 2n}$; J_{ab} - единичная симплектическая матрица размером $2n \times 2n$. Производные от матричных элементов имеют вид:

$$\lambda_{\mathbf{x}}^{\pm} = e\Phi_{\mathbf{x}} \mp e \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}_{\mathbf{x}} \rangle, \quad \lambda_{\mathbf{p}}^{\pm} = \pm c\boldsymbol{\beta}, \quad \lambda_{\mathbf{pp}}^{\pm} = \pm \frac{c^2}{\varepsilon} \|\delta_{ij} - \beta_i \beta_j\|,$$

$$\lambda_{\mathbf{p}\mathbf{x}}^{\pm} = (\lambda_{\mathbf{x}\mathbf{p}}^{\pm})^T = -\frac{e}{c}\lambda_{\mathbf{p}\mathbf{p}}^{\pm} \left\| \mathbf{A}_{x_j}^i \right\|, \quad \lambda_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^{\pm} = \left\| e\Phi_{x_i x_j} \mp e \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}_{x_i x_j} \rangle - \frac{e^2}{c^2} \langle \mathbf{A}_{x_i}, \lambda_{\mathbf{p}\mathbf{p}}^{\pm} \mathbf{A}_{x_i} \rangle \right\|.$$

Решение данного уравнения будем искать в виде:

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \hat{a}(t)\Phi(\mathbf{x}, t), \quad \hat{a}(t) = N_a \langle b(t), \Delta \hat{\mathbf{z}} \rangle,$$

где $\hat{a}(t)$ - оператор линейный по операторам $\Delta \hat{\mathbf{z}}$; N_a - постоянная; $b(t)$ - неизвестный вектор $2n$ -вектор. Потребуем чтобы оператор $\hat{a}(t)$ был оператором симметрии т.е. функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$ так же была решением уравнения. Тогда в этом случае оператор $\hat{a}(t)$ должен удовлетворять уравнению Гейзенберга:

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{a}(t)}{\partial t} + [\hat{\lambda}, \hat{a}(t)]_- = 0$$

подставив в это уравнение явный вид оператора $\hat{a}(t)$ и с учетом коммутационных соотношений для операторов $\Delta \hat{\mathbf{z}}$ получим:

$$\langle b, (\dot{Z} - \lambda_z(t)) \rangle + \langle \Delta \hat{\mathbf{z}}, -\dot{b} + \lambda_{zz} Jb \rangle = 0$$

откуда следует система гамильтониана:

$$\dot{Z} = J\lambda_z(z, t),$$

и система уравнений на неизвестный вектор b :

$$\dot{b} = \lambda_{zz}(z, t) Jb,$$

обозначив $b = -Ja(t)$ получим систему:

$$\dot{a} = J\lambda_{zz}(z, t)a,$$

которая называется система в вариациях.

Частное решение системы будем искать в виде:

$$\varphi_0^{(0)} = N_{\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\phi_0(t) + \hbar\phi_1(t) + \langle \mathbf{m}(t), \Delta \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta \mathbf{x}, Q(t) \Delta \mathbf{x} \rangle \right) \right\}$$

где N_{\hbar} - нормировочная константа; $\mathbf{m}(t)$ - n -вектор; $Q(t)$ - $n \times n$ матрица; $\phi_0(t), \phi_1(t)$ - функции времени.

3 Вероятность и мощность спонтанного излучения

3.1 Квантование поля векторной массивной частицы со спином 1

В теории поля массивные частицы со спином 1 описываются как кванты векторных полей. Такие векторные бозоны играют роль посредников взаимодействий в физике частиц. В случае массивных частиц существует три степени свободы, тогда как в безмассовом случае число дополнительно уменьшается до двух степеней свободы. Массивные векторные поля допускают дополнительное продольное состояние поляризации. Уменьшение степеней свободы должно приниматься во внимание как ограничение при квантовании теории.[14] Важными примерами являются калибровочные поля электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий.

Возможно предположить, что существует векторная массивная частица-медиатор, которая отвечает за взаимодействие между видимым сектором и темной материей путем кинематического смешивания с электромагнитным фотоном. Данное предположение связано со спонтанным нарушением калибровочной симметрии $U(1)$ [11]. В квантовой физике за фундаментальные величины, описывающие электромагнитное взаимодействие, принимают векторный потенциал и тензор электромагнитной напряженности. Векторный потенциал не наблюдается физически и определяется с точностью до градиента от скалярной функции. Аналогичными величинами будет описываться и темный фотон.

3.1.1 4-потенциал массивного векторного поля

Темный фотон это массивная векторная частица со спином 1, которая, по теоретическим предположениям, обладает схожими квантовыми числами с электромагнитным фотоном, с массой в пределах $0.002 - 0.4$ ГэВ и константой смешивания с электромагнитным фотоном $\epsilon < 1.2 \cdot 10^{-4}$. Взаимодействие со стандартной моделью осуществляется через смешивание с электромагнитным фотоном . Общий лагранжиан имеет вид [20][6]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\psi,A} + \mathcal{L}_{\chi,A'} + \mathcal{L}_{A,A'}, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{L}_{\psi,A}$ - лагранжиан взаимодействия частицы стандартной модели и электромагнитного фотона:

$$\mathcal{L}_{\psi,A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eA^{\mu}) - M_{\psi} \} \psi,$$

$\mathcal{L}_{\chi,A'}$ - взаимодействие темного фотона и темного фермиона:

$$\mathcal{L}_{\chi,A'} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda_{M_{A'}}^2 A'_{\mu}A'^{\mu} + \bar{\chi} \{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - g'A'^{\mu}) - M_{\chi} \} \chi,$$

$\mathcal{L}_{A,A'}$ - лагранжиан взаимодействия темного и электромагнитного фотонов:

$$\mathcal{L}_{A,A'} = \frac{1}{2} \epsilon F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu},$$

где $F^{\mu\nu}$ - тензор напряженности электромагнитного поля; A^μ , A'^μ - 4-вектор потенциала электромагнитного и темного фотонов; $F'^{\mu\nu} = \partial^\nu A'^\mu - \partial^\mu A'^\nu$ - тензор поля темного фотона; $\lambda_{M_{A'}} = \frac{M_{A'} c}{\hbar}$ - длина Комптона темного фотона; $M_{A'}$, M_χ , M_ψ - масса темного фотона, темного фермиона и частицы стандартной модели соответственно; γ_μ - γ -матрицы Дирака; g' - заряд темного фермиона.

Рассмотрим случай, когда присутствуют только чистые поля электромагнитного и темного фотона с учетом их смешивания, тогда в этом лагранжиан будет иметь вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_{M_{A'}}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} \epsilon F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu},$$

Используем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0,$$

для темного фотона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\mu A'_\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial (F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\mu A'_\nu)} + \frac{\epsilon}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F'^{\alpha\beta}}{\partial A'_\nu} = \left(-\frac{1}{2} F'^{\alpha\beta} + \frac{\epsilon}{2} F_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A'_\nu)} = \\ &= \left(-\frac{1}{2} F'^{\alpha\beta} + \frac{\epsilon}{2} F_{\alpha\beta} \right) (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) = -F'^{\mu\nu} + \epsilon F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'_\nu} = \frac{\lambda_{M_{A'}}^2}{2} \frac{\partial (A'_\mu A'^\mu)}{\partial A'_\nu} = \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\mu \frac{\partial A'_\mu}{\partial A'_\nu} = \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\mu \delta_\mu^\nu = \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\nu,$$

получим уравнение:

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} + \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\nu = \epsilon \partial_\mu F_{\mu\nu},$$

где взяв 4-дивергенцию ∂_ν от полученного уравнения для темного фотона, получим выражение:

$$\partial_\nu A'^\nu = 0,$$

которое в случае электромагнитного фотона представляет собой калибровку Лоренца, а в случае массивного векторного поля является прямым следствием уравнений движения.

Использував уравнение Эйлера-Лагранжа для электромагнитного фотона:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\epsilon}{2} F'_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} + \frac{\epsilon}{2} F'_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \frac{\partial F_{kl}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} + \epsilon F'_{\mu\nu},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0,$$

получим уравнение для электромагнитного фотона:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \epsilon \partial_\mu F'_{\mu\nu}.$$

Тогда с учетом смешивания темного и электромагнитного фотонов необходимо рассмотреть систему из двух уравнений в тензорном виде:

$$\begin{cases} \partial_\mu F'^{\mu\nu} + \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\nu = \epsilon \partial_\mu F^{\mu\nu} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = \epsilon \partial_\mu F'^{\mu\nu}, \end{cases}$$

При данной постановке задачи результаты полученные для потенциала электромагнитного фотона не должны противоречить существующим формулам. Так как электромагнитное поле проявляется не непосредственно через потенциал, а только через напряженности магнитного и электрического поля то для полученного потенциала электромагнитного фотона должна выполняться калибровочная инвариантность. В отличие от темного фотона условие лоренцевской $\partial_\nu A^\nu = 0$ калибровки не следует непосредственно из уравнения для электромагнитного фотона.

Подставив второе уравнение в первое, получим что в первом уравнении останется только 4-потенциал для темного фотона:

$$\begin{cases} \partial_\mu F'^{\mu\nu} + \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\nu = \epsilon^2 \partial_\mu F'^{\mu\nu} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = \epsilon \partial_\mu F'^{\mu\nu}, \end{cases}$$

расписав тензор поля темного фотона с учетом $\partial_\nu A'^\nu = 0$ и лоренцевой калибровки для электромагнитного фотона получим систему на 4 потенциалы:

$$\begin{cases} \left\{ \hat{\square} + \frac{\lambda_{M_{A'}}^2}{1-\epsilon^2} \right\} A'^\nu = 0, \\ \hat{\square} \{A^\nu - \epsilon A'^\nu\} = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

для первого уравнения системы (3.2) будем искать частное решение в виде плоской волны:

$$A'^\nu = e'^\nu_{(\lambda)} e^{-ix_\beta \varkappa^\beta}$$

где $e'^\nu_{(\lambda)} = (e_{0(\lambda)}, e_{(\lambda)})$ - 4-вектор поляризации; $e_{0(\lambda)}$, $e_{(\lambda)}$ - скалярная и векторная поляризации, соответственно; $x^\beta = (ct, \mathbf{x})$ - 4-вектор координаты; $\varkappa^\beta = (\omega, \boldsymbol{\varkappa})$ - волновой 4-вектор темного фотона. Подставив частное решение в первое уравнение системы (3.2) получим условие на решение уравнения для 4-потенциала A'^ν темного фотона в виде плоских волн:

$$\omega = \sqrt{\varkappa^2 c^2 + \frac{\lambda_{M_{A'}}^2}{1-\epsilon^2} c^2},$$

тогда общее решение уравнения на A'^ν системы (3.2) можно представить как разложение на плоские волны:

$$A'^\nu = \sum_{\varkappa, \lambda} e'^\nu_{(\lambda)} \left(c_{\varkappa\lambda} e^{-ix_\beta \varkappa^\beta} + c_{\varkappa\lambda}^+ e^{ix_\beta \varkappa^\beta} \right).$$

Во втором уравнении системы (3.2) используя обозначение $\tilde{A}^\nu = A^\nu - \epsilon A'^\nu$, получим уравнение:

$$\hat{\square} \tilde{A}^\nu = 0, \quad (3.3)$$

которое по виду совпадает с однородным уравнением Даламбера, которое описывает электромагнитный фотон без учета смешивания электромагнитного и темного фотонов и имеет известное решение.

Явление смешивания позволяет взаимодействовать темному фотону с частицами стандартной модели используя электромагнитный фотон как переносчик данного взаимодействия. С учетом выражения для \tilde{A}^ν 4-потенциал электромагнитного фотона с учетом смешивания с темным фотоном имеет вид:

$$A^\nu = \tilde{A}^\nu + \epsilon A'^\nu$$

где \tilde{A}^ν - 4-потенциал электромагнитного фотона получаемый из уравнения (3.3) без учета смешивания.

Рассмотрим лагранжиан учитывающий взаимодействие полей электромагнитного и темного фотонов и фермиона стандартной модели:

$$\mathcal{L}_{\psi, A, A'} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_{M_{A'}}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} \epsilon F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \bar{\psi} \{ \gamma_\mu (i\partial^\mu - eA^\mu) - M_\psi \} \psi,$$

выделив потенциал \tilde{A}^ν в лагранжиане, с учетом выражения для тензора электромагнитной напряженности фотона без смешивания $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \epsilon F'_{\mu\nu}$, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi, A, A'} = & -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} - \epsilon F'_{\mu\nu}) (F^{\mu\nu} - \epsilon F'^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} (1 - \epsilon^2) + \frac{1}{2} \lambda_{M_{A'}}^2 A'_\mu A'^\mu + \\ & + \bar{\psi} \{ \gamma_\mu (i\partial^\mu - e(A^\mu - \epsilon A'^\mu)) - M_\psi \} \psi - e\epsilon A'^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \end{aligned}$$

в итоге получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi, A, A'} = & -\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} (1 - \epsilon^2) + \frac{1}{2} \lambda_{M_{A'}}^2 A'_\mu A'^\mu + \\ & + \bar{\psi} \left\{ \gamma_\mu \left(i\partial^\mu - e\tilde{A}^\mu \right) - M_\psi \right\} \psi - e\epsilon A'^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \end{aligned}$$

переобозначим 4-потенциал электромагнитного фотона удовлетворяющего уравнению Даламбера $\tilde{A}^\nu = A^\nu$ на основе калибровочной инвариантности, а так же переопределим поле темного фотона:

$$A'_\mu \rightarrow \frac{A'_\mu}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad M_{A'} \rightarrow M_{A'} \sqrt{1 - \epsilon^2} \Rightarrow F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} (1 - \epsilon^2) \rightarrow F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu},$$

тогда получим выражение для лагранжиана:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi, A, A'} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_{M_{A'}}^2 A'_\mu A'^\mu + \\ & + \bar{\psi} \{ \gamma_\mu (i\partial^\mu - eA^\mu) - M_\psi \} \psi - e\epsilon A'^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \end{aligned}$$

в полученном выражении за взаимодействие фермиона стандартной модели и темного фотона отвечает элемент:

$$\mathcal{L}_{\psi, A'} = -e\epsilon A'^{\mu} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi.$$

Проделанные преобразования лагранжиана (3.1) соответствуют смещению поля и тензора электромагнитной напряженности для электромагнитного фотона:

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + \epsilon A'^{\nu} \Rightarrow F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow (F_{\mu\nu} + \epsilon F'_{\mu\nu}) (F^{\mu\nu} + \epsilon F'^{\mu\nu})$$

данное смещение поля калибровочно-инвариантно из-за условия $\partial_{\nu} A'^{\nu} = 0$. Из этого следует, что смещение поля на величину $\epsilon A'^{\nu}$ для электромагнитного фотона не должно сказаться на физически наблюдаемых величинах для электромагнитного фотона.

Подставив полученный лагранжиан в уравнение Эйлера-Лагранжа для фермиона получим:

$$\{\gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eA^{\mu}) - M_{\psi}\} \psi - e\epsilon A'^{\mu} \gamma_{\mu} \psi = 0,$$

для электромагнитного фотона:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = e j^{\nu},$$

для темного фотона:

$$\partial_{\mu} F'^{\mu\nu} + \lambda_{M_{A'}}^2 A'^{\mu} = e\epsilon j^{\nu},$$

где $j^{\nu} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi$ - ток вероятности, удовлетворяющий уравнению непрерывности $\partial_{\nu} j^{\nu} = 0$. Рассмотрим электромагнитное поле в картине Фарри, тогда 4-потенциал электромагнитного поля можно представить в виде [9]:

$$A^{\nu} = A_{cl}^{\nu} + A_{qu}^{\nu}$$

где A_{cl}^{ν} - классический 4-потенциал, который соответствует внешним электрическому и магнитному полям; A_{qu}^{ν} - 4-потенциал, который квантуется и соответствует рождению и уничтожению электромагнитного фотона. Тогда уравнение движения фермиона разобьется на уравнение Дирака в произвольном электромагнитном поле и действию квантованных полей электромагнитного и темного фотона. Необходимо проквантовать 4-потенциал электромагнитного фотона ($\lambda = 1, 2$):

$$A_{qu}^{\nu} = \sum_{k, \lambda} e'_{(\lambda)} \left(c_{k\lambda} e^{-ix_{\beta} k^{\beta}} + c_{k\lambda}^{+} e^{ix_{\beta} k^{\beta}} \right),$$

и 4-потенциал темного фотона ($\lambda = 1, 2, 3$):

$$A'^{\nu} = \sum_{z, \lambda} e'_{(\lambda)} \left(c_{z\lambda} e^{-ix_{\beta} z^{\beta}} + c_{z\lambda}^{+} e^{ix_{\beta} z^{\beta}} \right).$$

3.1.2 Вторичное квантование поля темного фотона

Произведем вторичное квантование полученного 4-потенциала и будем рассматривать коэффициенты как операторы т.е. произведем разложение поля на осцилляторы используя операторы уничтожения и рождения, соответственно:

$$c_{k\lambda} \rightarrow \widehat{c}_{k\lambda}, \quad c_{k\lambda}^+ \rightarrow \widehat{c}_{k\lambda}^+,$$

которые действуют на функцию от числа массивных фотонов $f_{N_{k\lambda}}$, тогда каждая мода рассматривается как независимый осциллятор со своими собственными операторами рождения $\widehat{c}_{k\lambda}^+$ и уничтожения $\widehat{c}_{k\lambda}$ и который обладает коммутационными соотношениями:

$$[\widehat{c}_{k\lambda}, \widehat{c}_{k'\lambda'}^+] = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [\widehat{c}_{k\lambda}, \widehat{c}_{k'\lambda'}] = 0, \quad [\widehat{c}_{k\lambda}^+, \widehat{c}_{k'\lambda'}^+] = 0.$$

В итоге получим оператор:

$$\widehat{A}^\nu = \sum_{k,\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_\lambda^\nu \left(\widehat{c}_{k\lambda} e^{-ix_\beta k^\beta} + \widehat{c}_{k\lambda}^+ e^{ix_\beta k^\beta} \right),$$

Вектор поляризации. Из уравнений движения следует выражение $\partial_\nu A^\nu = 0$, из которого можно получить связь вектора поляризации и волнового 4-вектора массивного векторного бозона:

$$e_\lambda^\nu k_\nu = 0,$$

перейдем в систему покоя для массивного векторного бозона, тогда волновой 4-вектор будет иметь вид $k_\nu = (m, 0, 0, 0)$ откуда следует $e_\lambda^0 = 0$, т.е. 4-потенциал массивного векторного бозона имеет 3 независимые степени свободы, которые можно описать используя вектор поляризации. На вектора поляризации для массивного векторного поля можно наложить условие ортонормированности и вещественности:

$$e_\lambda^\nu e_{\lambda'}^\nu = \delta_{\lambda\lambda'}$$

3.2 Мощность излучения

Вторично проквантовав выражение для потенциала темного фотона A'^ν и используя представление Фарри, добавив вторично квантованное поле электромагнитного фотона A^ν получим выражение с заданными коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} \widehat{A}^\nu + \varepsilon \widehat{A}'^\nu &= \frac{1}{\sqrt{2V}} \int \sum_\lambda e_{(\lambda)}^\nu \left(\widehat{c}_{k\lambda} e^{-ix_\beta k^\beta} + \widehat{c}_{\lambda k}^+ e^{ix_\beta k^\beta} \right) \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} + \\ &+ \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2V}} \int \sum_\lambda e'_{(\lambda)}^\nu \left(\widehat{c}'_{\lambda k} e^{-ix_\beta k^\beta} + \widehat{c}'_{k\lambda}^+ e^{ix_\beta k^\beta} \right) \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4}, \end{aligned}$$

$$[\widehat{c}_{k\lambda}, \widehat{c}_{k'\lambda'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [\widehat{c}_{k\lambda}, \widehat{c}_{k'\lambda'}] = 0, \quad [\widehat{c}_{k\lambda}^+, \widehat{c}_{k'\lambda'}^+] = 0.$$

Матрица рассеяния S в первом порядке приближения теории возмущений для излучения темного и электромагнитного фотонов [14]:

$$\widehat{S}^{(1)} = i \int j_\nu (\widehat{A}^\nu + \varepsilon \widehat{A}'^\nu) d^4x, \quad \langle \beta | \widehat{S}^{(1)} | \alpha \rangle = \frac{e_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\nu'\nu}(t) dt,$$

$$M_{\nu'\nu}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\nu'}^+(\mathbf{x}, t) \left\{ \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\omega t} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{k})} + \varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}'_{(\lambda)} \rangle e^{-i\omega' t} e^{-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varkappa})} \right\} \psi_\nu(\mathbf{x}, t) d^3x,$$

где j_μ - ток перехода; e_0 - заряд электрона; $M_{\nu'\nu}(t)$ - амплитуда излучения; ν, ν' - мульти-индексы начального и конечного состояния, характеризующие номер состояния n и спин частицы σ ; $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ - 4-волновой вектор электромагнитного фотона; $\psi_\nu(\mathbf{x}, t)$ - волновая функция электрона в квазиклассическом приближении; $\boldsymbol{\alpha}$ - α -матрицы Дирака; $\boldsymbol{\varkappa}^\mu = (\omega', \boldsymbol{\varkappa})$ - 4-волновой вектор темного фотона; циклические частоты электромагнитного и темного фотонов, соответственно:

$$\omega = c |\mathbf{k}| \omega' = \sqrt{|\boldsymbol{\varkappa}|^2 c^2 + \lambda_{M_{A'}}^2 c^2},$$

Формула для получения полной мощности излучения имеет вид:

$$W = \frac{e_0^2}{2\pi} \int \frac{d^4 \boldsymbol{\varkappa}}{(2\pi \hbar)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\nu'\nu}(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\nu'\nu}^*(t') dt',$$

4 Мощность излучения темного и электромагнитного фотонов в квазиклассическом приближении методом комплексного ростка Маслова

Матрица рассеяния S в первом порядке приближения [18] с матричными элементами $\langle \beta | \widehat{S}^{(1)} | \alpha \rangle$ в случае излучения темного и электромагнитного фотона с учетом смешивания:

$$\widehat{S}^{(1)} = i \int j_\mu \widehat{A}'^\mu d^4x, \quad \langle \beta | \widehat{S}^{(1)} | \alpha \rangle = \frac{e_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\nu'\nu}(t) dt,$$

$$M_{\nu'\nu}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\nu'}^+(\mathbf{x}, t) \left\{ \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\omega t} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{k})} + \epsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}'_{(\lambda)} \rangle e^{-i\omega' t} e^{-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varkappa})} \right\} \psi_\nu(\mathbf{x}, t) d^3x,$$

$$\omega' = \sqrt{|\boldsymbol{\varkappa}|^2 c^2 + \lambda_{M_{A'}}^2 c^2}, \quad \omega = c |\mathbf{k}|.$$

Формула для получения полной мощности излучения имеет вид:

$$W = \frac{e_0^2}{2\pi} \int \frac{d^4\boldsymbol{\varkappa}}{(2\pi\hbar)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\nu'\nu}(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\nu'\nu}^*(t') dt',$$

где j_μ - ток перехода; $M_{\nu'\nu}(t)$ - амплитуда излучения; ν, ν' - мультииндексы начального и конечного состояния, характеризующие номер состояния n и спин частицы σ ; $\mathbf{e}_{(\lambda)}$ и $\mathbf{e}'_{(\lambda)}$ - вектора характеризующие поляризацию электромагнитного и темного фотонов соответственно; ω' и ω - частота темного и электромагнитного фотонов соответственно; $\boldsymbol{\varkappa}^\mu = (\omega', \boldsymbol{\varkappa})$

4.1 Амплитуда излучения

4.1.1 Амплитуда излучения главного элемента асимптотики

Волновые функции электрона в электромагнитном поле в квазиклассическом приближении с точностью до порядка малости по \hbar^0 :

$$\psi_\nu(\mathbf{x}, t) = \Pi_+(t) \mathcal{U}(t) |\nu, t\rangle, \quad |\nu, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \{\widehat{a}^+\}^\nu(t) |0, t\rangle,$$

$$|0, t\rangle = N_\hbar \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\phi_0(t) + \hbar\phi_1(t)) \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\langle P(t), \Delta\mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta\mathbf{x}, Q(t)\Delta\mathbf{x} \rangle \right) \right\},$$

где $\mathcal{U}(t)$ - спинор, который является решением уравнения Баргмана-Мишеля-Телегди и удовлетворяет условию $\mathcal{U}^+(t)\mathcal{U}(t) = 1$; $|\nu, t\rangle$ - траекторно-когерентные состояния; $\widehat{a}(t)$ - оператор симметрии, который находится из системы в вариациях.

Найдем амплитуду перехода для электромагнитного фотона. Для темного фотона формулы будут аналогичные, за исключением константы смешивания и волнового вектора.

$$M_{\nu'\nu}(t) = \mathcal{U}^+(t)\mathcal{U}(t) \int \langle \nu', t | \Pi_+^+(t) \langle \alpha, e_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_+(t) | \nu, t \rangle d^3x,$$

с учетом формулы:

$$\Pi_{\pm}(t) \langle \alpha, e_{(\lambda)} \rangle \Pi_{\pm}(t) = \pm \frac{c}{\varepsilon(t)} \langle \mathcal{P}, e_{(\lambda)} \rangle \sigma_0,$$

получим выражение для амплитуды излучения:

$$M_{\nu'\nu}(t) = \frac{c}{\varepsilon(t)} \langle \mathcal{P}, e_{(\lambda)} \rangle \mathcal{U}^+(t)\mathcal{U}(t) \int \langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} | \nu, t \rangle d^3x.$$

Рассмотрим подынтегральное выражение. С учетом связи траекторно-когерентных состояний $|\nu, t\rangle$ и производящей функции $|\alpha, t\rangle$ для них:

$$|\alpha, t\rangle = \widehat{D}(\alpha) |0, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\langle \alpha, \widehat{a}^+ \rangle} |0, t\rangle, \quad |\nu, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \alpha^\nu} e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} |\alpha, t\rangle \Big|_{\alpha=0},$$

где $\widehat{D}(\alpha)$ - оператор сдвига. Матричный элемент записанный через производящие функции:

$$\langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} | \nu, t \rangle = \frac{e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{X}(t) \rangle}}{\sqrt{\nu! \nu'!}} \frac{\partial^{|\nu+\nu'|}}{\partial \alpha^\nu \partial (\beta^*)^{\nu'}} e^{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \langle \beta, t | e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} | \alpha, t \rangle.$$

Операторы симметрии и сдвиг оператора координат на фазовую траекторию связаны соотношением:

$$-i\Delta \widehat{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} - C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \right),$$

откуда видно, что $\Delta \widehat{\mathbf{x}}$ является частным случаем оператора сдвига $\widehat{D}(\alpha)$. Тогда справедливо тождество Вейля для $\Delta \widehat{\mathbf{x}}$:

$$e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} = e^{-\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \rangle},$$

с учетом действия операторов симметрии на производящие функции квазиклассических траекторно-когерентных состояний:

$$\widehat{\mathbf{a}} |\alpha, t\rangle = \alpha |\alpha, t\rangle, \quad \langle \beta, t | \widehat{\mathbf{a}}^+ = \langle \beta, t | \beta^*,$$

получим для матричного элемента:

$$\begin{aligned} \langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} | \nu, t \rangle &= \frac{e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{X}(t) \rangle}}{\sqrt{\nu! \nu'!}} e^{\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \\ &\cdot \frac{\partial^{|\nu+\nu'|}}{\partial \alpha^\nu \partial (\beta^*)^{\nu'}} e^{\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C(t) D_0^{-1/2} \beta^* \rangle} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \alpha \rangle} \langle \beta, t | \alpha, t \rangle \Big|_{\alpha=\beta=0}, \end{aligned}$$

с учетом выражения для производящих функций:

$$\langle \beta, t | \alpha, t \rangle = \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \langle \alpha, \beta^* \rangle \right\},$$

взяв производную по β^* , тогда матричный элемент примет вид:

$$\langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} | \nu, t \rangle = \frac{e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{X}(t) \rangle}}{\sqrt{\nu! \nu'!}} e^{\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \cdot \left. \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \alpha^\nu} \left(\alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^\nu e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \alpha \rangle} \right|_{\alpha=0}.$$

Используя замену переменных:

$$\gamma = \alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k}, \quad (\zeta)_l = -\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(\mathbf{k} C^+(t) D_0^{-1/2} \right)_l (\gamma)_l$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \gamma} = -\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \mathbf{k} C^+(t) D_0^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\alpha_0 = 0 \Rightarrow \gamma_0 = -\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k}, \quad \zeta_{l_0} = \frac{\hbar}{2} \left(D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)_l \left(D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)_l,$$

и формулу Родрига для полиномов Лагерра:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} \frac{e^x}{x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \{ x^{n+\alpha} e^{-x} \},$$

с учетом обобщения на знак получим формулу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \alpha^\nu} \left\{ \left(\alpha \mp \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^\nu e^{\pm \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \alpha \rangle} \right\} \Big|_{\alpha=0} &= \\ &= \nu! \left(\mp \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu-\nu} L_\nu^{\nu-\nu}(\zeta), \quad (4.1) \end{aligned}$$

где $L_\nu^{\nu-\nu}(\zeta) = \prod_{l=1}^N L_{\nu_l}^{\nu_l-\nu_l}(\zeta_l)$ - полиномы Лагерра

нескольких переменных и введено обозначение:

$$(\zeta)_l = \frac{\hbar}{2} \left(D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)_l \left(D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)_l, \quad (\zeta')_l = \frac{\hbar}{2} \left(D_0^{-1/2} C^*(t) \boldsymbol{x} \right)_l \left(D_0^{-1/2} C^T(t) \boldsymbol{x} \right)_l,$$

матричный элемент имеет вид:

$$\langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} | \nu, t \rangle = \sqrt{\frac{\nu!}{\nu'!}} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{X}(t) \rangle} e^{\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu} L_\nu^{\nu'-\nu}(\zeta),$$

В итоге амплитуда излучения для электромагнитного и темного фотонов имеет вид:

$$M_{\nu'\nu}(t) = \sqrt{\frac{\nu!}{\nu'!}} \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \cdot \left\{ e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{X}(t) \rangle} e^{\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu} L_{\nu}^{\nu'-\nu}(\boldsymbol{\zeta}) + \varepsilon e^{-i\langle \boldsymbol{\varkappa}, \mathbf{X}(t) \rangle} e^{\frac{\hbar}{4} \langle \boldsymbol{\varkappa}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \boldsymbol{\varkappa} \rangle} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^*(t) \boldsymbol{\varkappa} \right)^{\nu'-\nu} L_{\nu}^{\nu'-\nu}(\boldsymbol{\zeta}') \right\}.$$

4.1.2 Амплитуда излучения первой поправки

В итоге волновая функция уравнения Дирака для положительно частотной части до порядка малости по $\hbar^{\frac{1}{2}}$ имеет вид:

$$\psi_{\nu+}(\mathbf{x}, t, \hbar) = \left\{ \Pi_+(t) + \Pi_-(t) \left(\hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 \right) \right\} \mathcal{U}^0,$$

где

$$\hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 = \frac{c}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right), \quad \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1(t) = \Delta \widehat{\mathbf{p}}(t) - \frac{e_0}{c} d_T^1 \mathbf{A}(X(t), t)$$

$$\langle \boldsymbol{\beta}, d_T^1 \mathbf{A}(X(t), t) \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, \langle \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{A}, \Delta \mathbf{x} \rangle \rangle$$

Найдем амплитуду перехода для электромагнитного фотона:

$$M_{\nu'\nu}(t) = \int \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \left(\Pi_+^T(t) + \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1^+ \Pi_-^T(t) \right) \cdot \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \left(\Pi_+(t) + \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 \right) \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle d^3x,$$

амплитуда излучения разбивается на четыре слагаемых:

$$M_{\nu'\nu}(t) = M_I + M_{II} + M_{III} + M_{IV},$$

где M_I - амплитуда в приближении \hbar^0 , амплитуды M_{II} , M_{III} , M_{IV} подлежат определению:

$$M_I = \int \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \Pi_+^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_+(t) \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle d^3x,$$

$$M_{II} = \int \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \Pi_+^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle d^3x,$$

$$M_{III} = \int \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1^+ \Pi_-^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_+(t) \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle d^3x,$$

$$M_{IV} = \int \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1^+ \Pi_-^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle d^3x.$$

Для матриц $\Pi_{\pm}(t)$ справедливо:

$$\Pi_{\pm}^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \Pi_{\pm}(t) = \pm \langle \boldsymbol{\beta}(t), \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \sigma_0$$

$$\Pi_{\pm}^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \Pi_{\mp}(t) = \frac{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma} \rangle \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle.$$

С учетом свойств матриц Паули и выражения:

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{\sigma}, \left[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_{(\lambda)} \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \right] \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{\sigma}, \left[\boldsymbol{\beta} \times \left[\boldsymbol{\beta} \times \left[\mathbf{e}_{(\lambda)} \times \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \right] \right] \right] \right\rangle = \\ &= -\beta^2 \left\langle \boldsymbol{\sigma}, \left[\mathbf{e}_{(\lambda)} \times \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \right] \right\rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \mathbf{e}_{(\lambda)}, \left[\boldsymbol{\beta} \times \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \right] \rangle, \end{aligned}$$

в итоге получим:

$$\begin{aligned} \Pi_{+}^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \Pi_{-}(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 &= \frac{\gamma^{-1} - 3}{1 + \gamma^{-1}} \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \langle \mathbf{e}_{(\lambda)}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle - \\ &- i(\gamma^{-1} - 2) \left\langle \boldsymbol{\sigma}, \left[\mathbf{e}_{(\lambda)} \times \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \right] \right\rangle - \frac{i}{1 + \gamma^{-1}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \mathbf{e}_{(\lambda)}, \left[\boldsymbol{\beta} \times \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \right] \rangle. \end{aligned}$$

Найдем коммутатор:

$$\begin{aligned} K_I &= \left[e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \rangle}, \left\langle \boldsymbol{\beta}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \right]_{-} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{n/2}}{n!} \cdot \\ &\cdot \left(\left\langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle^n \left\langle \boldsymbol{\beta}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\beta}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \left\langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle^n \right), \end{aligned}$$

перенесем матрицы в скалярном произведении:

$$\begin{aligned} K_I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{n/2}}{n!} \cdot \\ &\cdot \left(\left\langle \mathbf{k} C^+(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle^n \left\langle \boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \left\langle \mathbf{k} C^+(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle^n \right), \end{aligned}$$

с учетом коммутационных соотношений для операторов симметрии:

$$\left[\widehat{a}_j, (\widehat{a}_i^+)^{\nu_k} \right]_{-} = \nu_k (\widehat{a}_j^+)^{\nu_k - 1} \delta_{ji}, \quad \left[(\widehat{a}_i)^{\nu_k}, \widehat{a}_j^+ \right]_{-} = \nu_k (\widehat{a}_j)^{\nu_k - 1} \delta_{ji},$$

и того, что $\left(\mathbf{k} C(t) D_0^{-1/2} \right)_j$ число, то оно коммутирует с $\left\langle \mathbf{k} C(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle$, и выражения:

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \left\langle \mathbf{k} C^+(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle &= \left(\boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2} \right)_j (\widehat{\mathbf{a}}^+)_j \left(C(t) D_0^{-1/2} C^+ \mathbf{k} \right)_l (\widehat{\mathbf{a}})_l = \\ &= - \left(\boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2} \right)_j \left(C(t) D_0^{-1/2} C^+ \mathbf{k} \right)_l \delta_{lj} + \left(C(t) D_0^{-1/2} C^+ \mathbf{k} \right)_l (\widehat{\mathbf{a}})_l \left(\boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2} \right)_j (\widehat{\mathbf{a}}^+)_j = \\ &= - \left\langle \boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2}, D_0^{-1/2} C^+ \mathbf{k} \right\rangle + \left\langle \mathbf{k} C^+(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{\beta} C^T(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \end{aligned}$$

и так как оператор \hat{a}_j^+ не действует на матрицы $C(t)$ и $D_0^{-1/2}$ то его можно пронести и прокоммутировать с оператором рождения:

$$K_I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{n/2}}{n!} \left(\left\langle \mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}} \right\rangle^n \left\langle \boldsymbol{\beta}C^T(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \boldsymbol{\beta}C^T(t)D_0^{-1/2}, D_0^{-1/2}C^+\mathbf{k} \right\rangle \left\langle \mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}} \right\rangle^{n-1} - \right. \\ \left. - \left\langle \mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{\beta}C^T(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \left\langle \mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}} \right\rangle^{n-1} \right),$$

так как при $n = 0$ выражение получается нулевым, тогда упростив получим:

$$K_I = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left\langle \boldsymbol{\beta}C^T(t)D_0^{-1/2}, D_0^{-1/2}C^+\mathbf{k} \right\rangle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!} \left\langle \mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2}, \hat{\mathbf{a}} \right\rangle^{n-1},$$

в итоге коммутатор равен:

$$\left[e^{\pm\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1/2}\hat{\mathbf{a}} \rangle}, \left\langle \boldsymbol{\beta}, C(t)D_0^{-1/2}\hat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \right]_{-} = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left\langle \boldsymbol{\beta}, C(t)D_0^{-1}C^+\mathbf{k} \right\rangle e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1/2}\hat{\mathbf{a}} \rangle}.$$

Аналогично получим коммутатор в случае матрицы $B(t)$:

$$\left[e^{\pm\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1/2}\hat{\mathbf{a}} \rangle}, \left\langle \boldsymbol{\beta}, B(t)D_0^{-1/2}\hat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle \right]_{-} = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left\langle \boldsymbol{\beta}, B(t)D_0^{-1}C^+\mathbf{k} \right\rangle e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1/2}\hat{\mathbf{a}} \rangle}.$$

Элемент M_{II} . Рассмотрим матричный элемент для вклада M_{II} :

$$\langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \mathcal{U}^+(t) \Pi_+^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \hat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle = \\ = \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} \langle \nu', t | e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \left\{ \frac{\gamma^{-1} - 3}{1 + \gamma^{-1}} \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \langle \mathbf{e}_{(\lambda)}, \Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle - \right. \\ \left. - i(\gamma^{-1} - 2) \langle \boldsymbol{\eta}, [\mathbf{e}_{(\lambda)} \times \Delta \hat{\mathcal{P}}_1] \rangle - \frac{i}{1 + \gamma^{-1}} \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \mathbf{e}_{(\lambda)}, [\boldsymbol{\beta} \times \Delta \hat{\mathcal{P}}_1] \rangle \right\} | \nu, t \rangle$$

с учетом свойства смешанного произведения:

$$\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \rangle = \langle [\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \mathbf{c} \rangle$$

можно записать:

$$\langle \nu', t | e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \mathcal{U}^+(t) \Pi_+^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \hat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle = \\ = \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} \langle \nu', t | e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \langle \mathbf{d}, \Delta \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle | \nu, t \rangle$$

где введено обозначение:

$$\mathbf{d} = \frac{\gamma^{-1} - 3}{1 + \gamma^{-1}} \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_{(\lambda)} - i(\gamma^{-1} - 2) [\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{e}_{(\lambda)}] - \frac{i}{1 + \gamma^{-1}} \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta} \rangle [\mathbf{e}_{(\lambda)} \times \boldsymbol{\beta}]$$

Рассмотрим выражение для M_{II} , в котором временно опустим множитель $\frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle}$:

$$M_{II} = \langle \nu', t | e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \langle \mathbf{d}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle | \nu, t \rangle = \langle \nu', t | e^{-\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle} \cdot e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \rangle} \left\{ \langle \mathbf{d}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}(t) \rangle - \frac{e_0}{c} \langle \mathbf{d}, \langle \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{A}, \Delta \mathbf{x} \rangle \right\} | \nu, t \rangle,$$

для оператора импульса смещенного на фазовую траекторию справедливо:

$$\Delta \widehat{\mathcal{P}} = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(B(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ - B^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \right)$$

подставив получим:

$$M_{II} = e^{-\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \langle \nu', t | e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \rangle} \left(-i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \cdot \left\{ \left\langle \mathbf{d} B^T(t) D_0^{-1/2} - \frac{e_0}{c} \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{d}, \mathbf{A} \rangle C^T(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \right\rangle + \left\langle \frac{e_0}{c} \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{d}, \mathbf{A} \rangle C^+(t) D_0^{-1/2} - \mathbf{d} B^+(t) D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \right\rangle \right\} | \nu, t \rangle,$$

прокоммутировав экспоненту с оператором рождения и оператор уничтожения:

$$M_{II} = e^{-\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \langle \nu', t | e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle} \left(-i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \cdot \left\{ \langle \mathcal{F}^I, \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \rangle + \langle \mathcal{F}^{II}, \widehat{\mathbf{a}} \rangle \right\} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \widehat{\mathbf{a}} \rangle} | \nu, t \rangle,$$

где обозначено:

$$\mathcal{F}^I(\mathbf{d}) = \mathcal{F}^I = \mathbf{d} B^T(t) D_0^{-1/2} - \frac{e_0}{c} \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{d}, \mathbf{A} \rangle C^T(t) D_0^{-1/2},$$

$$\mathcal{F}^{II}(\mathbf{d}) = \mathcal{F}^{II} = \frac{e_0}{c} \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{d}, \mathbf{A} \rangle C^+(t) D_0^{-1/2} - \mathbf{d} B^+(t) D_0^{-1/2}$$

используя формулу для производящей функции траекторно-сосредоточенных состояний и действуя операторами рождения и уничтожения на производящие функции с учетом скалярного произведения производящих функций:

$$M_{II} = \left(-i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\nu! \nu'!}} e^{-\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \frac{\partial^{|\nu+\nu'|}}{\partial \alpha^\nu \partial (\mathbf{l}^*)^{\nu'}} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C(t) D_0^{-1/2} \mathbf{l}^* \rangle} e^{\langle \alpha, \mathbf{l}^* \rangle} \cdot \left\{ \langle \mathcal{F}^I, \mathbf{l}^* \rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \rangle + \langle \mathcal{F}^{II}, \alpha \rangle \right\} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1/2} \alpha \rangle} \Big|_{\alpha=\mathbf{l}=0},$$

распишем мультииндексы:

$$M_{II} = \left(-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1}C^T(t)\mathbf{k} \rangle} \prod_{k,j} \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu'_k!}} \frac{\partial^{|\nu_k + \nu'_k|}}{\partial \alpha_k^{\nu_k} \partial (\mathbf{l}^*)_{\mathbf{k}}^{\nu'_k}} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(D_0^{-1/2}C(t)\mathbf{k})_j \mathbf{l}_j^* + \alpha_j \mathbf{l}_j^*} \cdot \left\{ \langle \mathcal{F}^I, \mathbf{l}^* \rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2}C^+(t)\mathbf{k} \rangle + \langle \mathcal{F}^{II}, \alpha \rangle \right\} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2})_j \alpha_j} \Big|_{\alpha=l=0},$$

с учетом коммутирования псевдодифференциального оператора и экспоненты:

$$\partial_x^n (F(x)e^{S(x)}) = e^{S(x)} (\partial_x S(x) + \partial_x)^n F(x)$$

если принять во внимание, что $\partial_x^2 S(x) = 0$ и $\partial_x^2 F(x) = 0$, то получим:

$$\partial_x^n (F(x)e^{S(x)}) = e^{S(x)} \{ (\partial_x S(x))^n F(x) + n (\partial_x S(x))^{n-1} \partial_x F(x) \}$$

продифференцировав выражение для M_{II} по \mathbf{l}^* и подставив $\mathbf{l}^* = 0$

$$M_{II} = \left(-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1}C^T(t)\mathbf{k} \rangle} \prod_{k,j} \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu'_k!}} \frac{\partial^{|\nu_k|}}{\partial \alpha_k^{\nu_k}} e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2})_j \alpha_j} \cdot \left[\left(\alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}D_0^{-1/2}C(t)\mathbf{k} \right)_j^{\nu'_k} \delta_{jk} \left\{ \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2}C^+(t)\mathbf{k} \rangle + \langle \mathcal{F}^{II}, \alpha \rangle \right\} + \nu'_k \left(\alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}D_0^{-1/2}C(t)\mathbf{k} \right)_j^{\nu'_k - 1} \delta_{jk} \mathcal{F}_k^I \right] \Big|_{\alpha=0},$$

где обозначено:

$$\nu_k^{(\pm)} = \{ \nu_1 \pm \delta_{1k}, \nu_2 \pm \delta_{2k}, \dots, \nu_n \pm \delta_{nk} \}$$

используя формулу Лейбница для ν_k -ой производной по переменной α_k :

$$M_{II} = \left(-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1}C^T(t)\mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu'_k!}} \cdot \left[\frac{\partial^{|\nu_k|}}{\partial \alpha_k^{\nu_k}} \left\{ e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2})_k \alpha_k} \left(\alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}D_0^{-1/2}C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu'_k} \right\} \cdot \left(\langle \mathcal{F}^{II}, \alpha \rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2}C^+(t)\mathbf{k} \rangle \right) + \nu_k \frac{\partial^{|\nu_k-1|}}{\partial \alpha_k^{\nu_k-1}} \left\{ e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2})_k \alpha_k} \left(\alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}D_0^{-1/2}C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu'_k} \right\} \mathcal{F}_k^{II} + \nu'_k \frac{\partial^{|\nu_k|}}{\partial \alpha_k^{\nu_k}} \left\{ e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{k}C^+(t)D_0^{-1/2})_k \alpha_k} \left(\alpha - \sqrt{\frac{\hbar}{2}}D_0^{-1/2}C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu'_k-1} \right\} \mathcal{F}_k^I \right] \Big|_{\alpha=0},$$

используя формулу для полиномов Лагерра 4.1 и подставляя $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
M_{II} = & \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} \left(-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1}C^T(t)\mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu_k'}} \cdot \\
& \cdot \left[\nu_k! \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu_k' - \nu_k} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t)\mathbf{k} \rangle L_{\nu_k}^{\nu_k' - \nu_k}(\zeta_k) + \right. \\
& \quad + \nu_k! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu_k' - \nu_k + 1} \mathcal{F}_k^{II} L_{\nu_k - 1}^{\nu_k' - \nu_k + 1}(\zeta_k) + \\
& \quad \left. + \nu_k' \nu_k! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu_k' - \nu_k - 1} \mathcal{F}_k^I L_{\nu_k}^{\nu_k' - \nu_k - 1}(\zeta_k) \right],
\end{aligned}$$

Элемент M_{III} . Рассмотрим матричный элемент для вклада M_{III} :

$$\begin{aligned}
M_{III} = & \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1^+ \Pi_-^T(t) \langle \alpha, e_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_+(t) \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle = \\
= & \left(\langle \nu', t | e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \mathcal{U}^+(t) \Pi_+^T(t) \langle \alpha, e_{(\lambda)} \rangle \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu', t \rangle \right)^+ = \\
= & \left(\frac{c}{2\epsilon(t)} e^{i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} \langle \nu', t | e^{i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \langle \mathbf{d}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle | \nu', t \rangle \right)^+
\end{aligned}$$

тогда, с учетом связи $\Delta \mathbf{x}$ и операторов рождения и уничтожения можно записать с расписанными мультииндексами:

$$\begin{aligned}
M_{III} = & \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1}C^T(t)\mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu_k'}} \left(\frac{\partial^{|\nu_k + \nu_k'|}}{\partial (\alpha^*)_{\mathbf{k}}^{\nu_k} \partial (\mathbf{l})_{\mathbf{k}}^{\nu_k'}} \cdot \right. \\
& \cdot e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (D_0^{-1/2} C(t)\mathbf{k})_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^* + \alpha_{\mathbf{k}}^* \mathbf{l}_{\mathbf{k}}} \left\{ \langle \mathcal{F}^I, \alpha^* \rangle - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t)\mathbf{k} \rangle + \langle \mathcal{F}^{II}, \mathbf{l} \rangle \right\} \cdot \\
& \left. e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} ((t)D_0^{-1/2} C^* \mathbf{k})_{\mathbf{k}} \mathbf{l}_{\mathbf{k}}} \right) \Big|_{\alpha = \mathbf{l} = 0},
\end{aligned}$$

продифференцировав выражение для M_{III} по $\alpha_{\mathbf{k}}^*$ и подставив $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
M_{III} = & \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t)D_0^{-1}C^T(t)\mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu_k'}} \left(\frac{\partial^{|\nu_k'|}}{\partial \mathbf{l}_{\mathbf{k}}^{\nu_k'}} \cdot \right. \\
& \cdot e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (D_0^{-1/2} C^*(t)\mathbf{k})_{\mathbf{k}} \mathbf{l}_{\mathbf{k}}} \left[\left(\mathbf{l} + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu_k} \left\{ -\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t)\mathbf{k} \rangle + \langle \mathcal{F}^{II}, \mathbf{l} \rangle \right\} + \right. \\
& \left. \left. + \nu_k \left(\mathbf{l} + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t)\mathbf{k} \right)_k^{\nu_k - 1} \mathcal{F}_k^I \right] \right) \Big|_{\mathbf{l} = 0},
\end{aligned}$$

используя формулу Лейбница для ν'_k -ой производной по переменной l_k :

$$\begin{aligned}
M_{III} = & \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu'_k!}} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\partial^{|\nu'_k|}}{\partial l_k^{\nu'_k}} \left\{ \left(l + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k})_k l_k} \right\} \right. \\
& \cdot \left(\langle \mathcal{F}^{II}, l \rangle - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \rangle \right) + \\
& + \nu'_k \frac{\partial^{|\nu'_k-1|}}{\partial l_k^{\nu'_k-1}} \left\{ \left(l + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k})_k l_k} \right\} \mathcal{F}_k^{II} + \\
& \left. + \nu_k \frac{\partial^{|\nu'_k|}}{\partial l_k^{\nu'_k}} \left\{ \left(l + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-1} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k})_k l_k} \right\} \mathcal{F}_k^I \right] \Big|_{l=0}^+,
\end{aligned}$$

используя формулу для полиномов Лагерра 4.1 и подставляя $l = 0$:

$$\begin{aligned}
M_{III} = & \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu'_k!}} \cdot \\
& \cdot \left[-\nu'_k! \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-\nu'_k} \langle \mathcal{F}^I, D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \rangle L_{\nu'_k}^{\nu_k-\nu'_k}(\zeta_k) + \right. \\
& + \nu'_k! \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-\nu'_k+1} \mathcal{F}_k^{II} L_{\nu'_k-1}^{\nu_k-\nu'_k+1}(\zeta_k) + \\
& \left. + \nu_k \nu'_k! \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-\nu'_k-1} \mathcal{F}_k^I L_{\nu'_k}^{\nu_k-\nu'_k-1}(\zeta_k) \right] \Big|_{l=0}^+,
\end{aligned}$$

комплексно сопрягая выражение:

$$\begin{aligned}
M_{III} = & \left(i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \right) \frac{c}{2\epsilon(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} e^{-\frac{\hbar}{4}\langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \prod_k \frac{1}{\sqrt{\nu_k! \nu'_k!}} \cdot \\
& \cdot \left[-\nu'_k! \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-\nu'_k} \langle (\mathcal{F}^I)^*, D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \rangle L_{\nu'_k}^{\nu_k-\nu'_k}(\zeta_k) + \right. \\
& + \nu'_k! \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-\nu'_k+1} (\mathcal{F}^{II})_k^* L_{\nu'_k-1}^{\nu_k-\nu'_k+1}(\zeta_k) + \\
& \left. + \nu_k \nu'_k! \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^*(t) \mathbf{k} \right)_k^{\nu_k-\nu'_k-1} (\mathcal{F}^I)_k^* L_{\nu'_k}^{\nu_k-\nu'_k-1}(\zeta_k) \right],
\end{aligned}$$

Элемент M_{IV} . Рассмотрим матричный элемент для вклада M_{IV} :

$$M_{IV} = \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \widehat{Q}_1^+ \Pi_-^T(t) \langle \alpha, e_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_-(t) \widehat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle$$

с учетом коммутаторов:

$$\left[\Delta \widehat{\mathcal{P}}_{1i}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_{1j} \right]_- = \frac{i\hbar e_0}{c} \varepsilon_{ijk} H_j, \quad \left[\Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right]_- = \frac{i\hbar e_0}{c} [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]$$

Элемент M_{IV} примет вид:

$$\begin{aligned} & \langle \nu', t | \mathcal{U}^+(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1^+ \Pi_-^T(t) \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle e^{-i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Pi_-(t) \hbar^{1/2} \widehat{Q}_1 \mathcal{U}(t) | \nu, t \rangle = \\ & = -\frac{c^2}{4\varepsilon^2(t)} e^{-i\langle \mathbf{X}(t), \mathbf{k} \rangle} \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_{(\lambda)} \rangle \langle \nu', t | e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \left\{ -\langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle^2 + \langle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \right. \\ & \quad \left. + i \left(\frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta} \rangle \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H} \rangle \right) \right\} | \nu, t \rangle \end{aligned}$$

Используя обозначение:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{i,j}^I(A, B) = \\ & = \left(\langle \mathbf{e}_i A^T D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle - \langle \mathbf{e}_i A^+ D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \rangle \right) \left(\langle \mathbf{e}_j B^T D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}}^+ \rangle - \langle \mathbf{e}_j B^+ D_0^{-1/2}, \widehat{\mathbf{a}} \rangle \right) \end{aligned}$$

где A и B - некоторые заданные матрицы. Расписав $\Delta \widehat{\mathcal{P}}_1$ с учетом связи операторов $\Delta \widehat{\mathbf{x}}$ и $\Delta \widehat{\mathbf{p}}$ с операторами рождения и уничтожения получим соотношение:

$$\begin{aligned} & \langle \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \langle \boldsymbol{\beta}, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle = \sum_{k,j} (\delta_{kj} - \beta_k \beta_j) \Delta \widehat{\mathcal{P}}_{1k} \Delta \widehat{\mathcal{P}}_{1j} = \\ & = \sum_{k,j} (\delta_{kj} - \beta_k \beta_j) \langle \mathbf{e}_k, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \langle \mathbf{e}_j, \Delta \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sum_{k,j,l,n} (\delta_{kj} - \beta_k \beta_j) \{ \mathcal{N}_{k,j}^I(B, B) + \\ & \quad + \left(\frac{e_0}{c} \right)^2 \langle \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{A} \rangle, \mathbf{e}_l \rangle \langle \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{A} \rangle, \mathbf{e}_n \rangle \mathcal{N}_{l,n}^I(C, C) - \\ & \quad - \frac{e_0}{c} \langle \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{A} \rangle, \mathbf{e}_n \rangle \mathcal{N}_{n,k}^I(C, B) - \frac{e_0}{c} \langle \partial_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{A} \rangle, \mathbf{e}_n \rangle \mathcal{N}_{k,n}^I(B, C) \} \end{aligned}$$

Рассмотрим матричный элемент:

$$\begin{aligned}
& \langle \nu', t | e^{-i\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \mathcal{N}_{k,j}^I(A, B) | \nu, t \rangle = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\nu! \nu'!}} e^{-\frac{\hbar}{4} \langle \mathbf{k}, C^*(t) D_0^{-1} C^T(t) \mathbf{k} \rangle} \left\{ \nu! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu} L_{\nu}^{\nu'-\nu}(\zeta) \cdot \right. \\
& \cdot \frac{\hbar}{2} \left(A D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \right)_k \left(B D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \right)_j + \nu! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu+1} L_{\nu-1}^{\nu'-\nu+1}(\zeta) \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left[\left(-D_0^{-1/2} A^+(t) \mathbf{e}_k \right) \left(B D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \right)_j + \left(-D_0^{-1/2} B^+(t) \mathbf{e}_j \right) \left(A D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \right)_k \right] + \\
& + \nu! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu+2} L_{\nu-2}^{\nu'-\nu+2}(\zeta) \cdot \left(D_0^{-1/2} A^+(t) \mathbf{e}_k \right) \left(D_0^{-1/2} B^+(t) \mathbf{e}_j \right) + \\
& + \nu' \nu! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu-1} L_{\nu}^{\nu'-\nu-1}(\zeta) \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left[\left(D_0^{-1/2} A^+(t) \mathbf{e}_k \right) \left(B D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \right)_j + \left(D_0^{-1/2} B^+(t) \mathbf{e}_j \right) \left(A D_0^{-1/2} C^+(t) \mathbf{k} \right)_k \right] - \\
& - 2\nu' \nu! \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu} L_{\nu-1}^{\nu'-\nu}(\zeta) \cdot \left(D_0^{-1/2} A^+(t) \mathbf{e}_k \right) \left(D_0^{-1/2} B^+(t) \mathbf{e}_j \right) + \\
& + \nu! \nu' (\nu' - 1) \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2}} D_0^{-1/2} C^T(t) \mathbf{k} \right)^{\nu'-\nu-2} L_{\nu}^{\nu'-\nu-2}(\zeta) \cdot \left(D_0^{-1/2} A^T(t) \mathbf{e}_k \right) \left(D_0^{-1/2} B^T(t) \mathbf{e}_j \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

5 Социальная ответственность

Введение

Целью данного раздела выпускной квалификационной работы является выявление, анализ и минимализация опасных и вредных факторов при выполнении научно-исследовательской работы.

Сейчас имеется ряд экспериментальных фактов, объяснение которых не может быть произведено в рамках стандартной физики. Для решения этой проблемы водиться понятия темной материи. Согласно теоретическим представлениям темная материя может взаимодействовать только через гравитационное взаимодействие. Вводится так же предположение, согласно которому есть частица медиатор - темный фотон, которая может смешиваться с электромагнитным фотоном. Темный фотон, согласно теоретическим предположениям, представляет собой векторную массивную частицу со схожими квантовыми числами электромагнитного фотона. Данная научно-исследовательская работа заключается в получении конечной формулы для спектрально-угловое распределение спонтанного излучения темных и электромагнитных фотонов электроном, движущимся в электромагнитных полях произвольного вида. Конечная формула получается с использованием S -матрицы в первом приближении, где описание движения электрона ведется в квазиклассическом приближении методом комплексного роста Маслова. Данная научно-исследовательская работа относится к фундаментальному разделу физики и не имеет прямого социального воздействия или применения. Использование результатов данной работы возможно в научных центрах, а ее потребители это исследователи.

5.1 Правовые и организационный вопросы обеспечения безопасности

Весь персонал обязан знать и строго соблюдать правила техники безопасности. Обучение персонала технике безопасности и производственной санитарии состоит из вводного инструктажа и инструктажа на рабочем месте ответственным лицом. Проверка знаний правил техники безопасности проводится квалификационной комиссией после обучения на рабочем месте. Проверяемому, присваивается соответствующая его знаниям и опыту работы квалификационная группа по технике безопасности и выдается специальная удостоверение.

Основным местом работы является рабочий стол с ПЭВМ, для того чтобы максимизировать эффективность работы и минимизировать вредные и опасные факторы воздей-

ствия следует учитывать особенности вида труда, такие как планировка рабочего места труда. Рациональная планировка рабочего места предусматривает четкий порядок и постоянство размещения предметов, средств труда и документации. То, что требуется для выполнения работ чаще, должно располагаться в зоне легкой досягаемости рабочего пространства. Зоны досягаемости рук в горизонтальной плоскости изображены на рисунке 6.

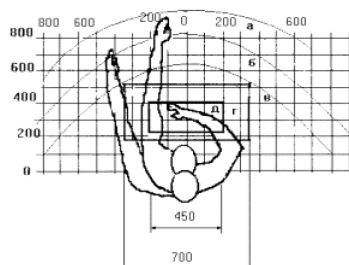


Рис. 6: Зоны досягаемости рук в горизонтальной плоскости. а - зона максимальной досягаемости рук; б - зона досягаемости пальцев при вытянутой руке; в - зона легкой досягаемости ладони; г - оптимальное пространство

При проектировании письменного стола должны быть учтены следующие требования:

1. высота рабочей поверхности стола рекомендуется в пределах 680-800 мм;
2. высота рабочей поверхности, на которую устанавливается клавиатура, должна быть 650 мм;
3. рабочий стол должен быть шириной не менее 700 мм и длиной не менее 1400 мм;
4. должно иметься пространство для ног высотой не менее 600 мм, шириной - не менее 500 мм, глубиной на уровне колен - не менее 450 мм и на уровне вытянутых ног - не менее 650 мм.

Организация рабочего места показана на рис. 7.

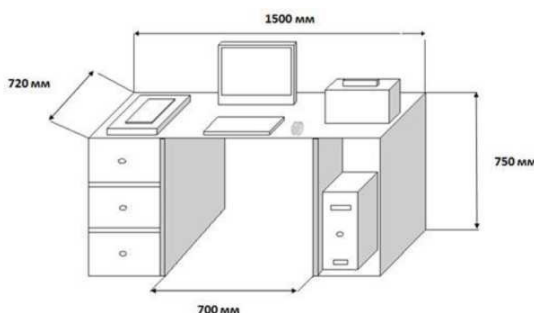


Рис. 7: Схема организации рабочего места

Рабочее кресло должно быть подъёмно-поворотным и регулируемым по высоте и углам наклона сиденья и спинки, а также расстоянию спинки до переднего края сиденья. Рекомендуется высота сиденья над уровнем пола 420-550 мм. Конструкция рабочего

кресла должна обеспечивать: ширину и глубину поверхности сиденья не менее 400 мм; поверхность сиденья с заглублённым передним краем. Монитор должен быть расположен на уровне глаз оператора на расстоянии 500-600 мм. Согласно нормам, угол наблюдения в горизонтальной плоскости должен быть не более 45° к нормали экрана. Лучше если угол обзора будет составлять 30°. Кроме того, должна быть возможность выбирать уровень контрастности и яркости изображения на экране. Должна предусматриваться возможность регулирования экрана:

1. по высоте +3 см;
2. по наклону от 10 до 20 градусов относительно вертикали;
3. в левом и правом направлениях.

Клавиатуру следует располагать на поверхности стола на расстоянии 100-300 мм от края. Нормальным положением клавиатуры является её размещение на уровне локтя оператора с углом наклона к горизонтальной плоскости 15°. Более удобно работать с клавишами, имеющими вогнутую поверхность, четырёхугольную форму с закруглёнными углами. Конструкция клавиши должна обеспечивать оператору ощущение щелчка. Цвет клавиш должен контрастировать с цветом панели.

5.2 Производственная безопасность

Производственные условия на рабочем месте характеризуются наличием опасных и вредных факторов, которые классифицируются по группам элементов: физические, химические, биологические, психофизиологические. Опасные и вредные факторы для данной научно исследовательской работы приведены в таблице 1 .

Работа выполнялась с использованием современной вычислительной техники, что позволило достичь высокой эффективности процесса и уменьшения временных затрат на его проведение. На инженера, который работает на компьютере, воздействуют следующие факторы:

1. физические: температура и влажность воздуха; шум; статическое электричество; электромагнитное поле низкой частоты; освещённость; наличие излучения;
2. психофизиологические опасные и вредные производственные факторы делятся на: физические перегрузки (статические, динамические) и нервно-психические перегрузки (умственное перенапряжение, монотонность труда, эмоциональные перегрузки).

Таблица 1: Возможные опасные и вредные факторы

Факторы (ГОСТ 12.0.003.2015)	Этапы работы			Нормативные документы
	Разработка	Изготовление	Эксплуатация	
1. Отклонение показателей микроклимата	+	-	-	Микроклимат производственного помещения СанПиН 2.2.4.548-96
2. Превышение уровня шума	+	-	-	Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории застройки СН 2.2.4/2.1.8.562-96.
3. Повышенный уровень электромагнитного излучения	+	-	-	СанПин 2.2.4/2.1.8.055-96 Электромагнитные излучения радиочастотного диапазона;
4. Повышенное значение напряжения в электрической цепи, замыкание которой может произойти через тело человека	+	-	-	ГОСТ 12.1.030-81, Система стандартов безопасности труда. Электробезопасность. Защитное заземление, зануление

5.3 Анализ опасных производственных факторов и обоснование мероприятий по их устранению

5.3.1 Отклонение показателей микроклимата

Микроклимат – комплекс физических факторов внутренней среды помещений, оказывающий влияние на тепловой обмен организма и здоровье человека. Воздух рабочей зоны (микроклимат) производственных помещений определяют следующие параметры: температура, относительная влажность, скорость движения воздуха. Оптимальные значения характеристик микроклимата и приведены в таблице 2.

Температура – степень нагретости воздуха в рабочем помещении. По закону при восьмичасовом рабочем дне температура воздуха в офисном помещении должна составлять 23-25°C в теплое время года и 22-24 °C в холодное (при относительной влажности 40-60%). Отклонение от нормы разрешено лишь на 1–2 °C. Допустимое колебание темпе-

Таблица 2: Оптимальные параметры микроклимата

Период года	Температура, С	Относительная влажность, %	Скорость движения воздуха, м/с
Холодный	22-24	40-60	0,1
Тёплый	23-25	40-60	0,1

ратуры во время рабочего дня - не больше 3–4 °С. К мероприятиям по оздоровлению воздушной среды в производственном помещении относятся: правильная организация вентиляции и кондиционирования воздуха, отопление помещений. Вентиляция может осуществляться естественным и механическим путём. При объеме помещения до 20³ в него должно подаваться, не менее 30³/ наружного воздуха на одного человека. В случае объема помещения более 40³ на одного человека допускается естественная циркуляция, но с учетом отсутствия выделения вредных веществ.

5.3.2 Превышение уровня шума

Шум и вибрация ухудшают условия труда, оказывают вредное воздействие на организм человека, а именно, на органы слуха и на весь организм через центральную нервную систему. В результате этого ослабляется внимание, ухудшается память, снижается реакция, увеличивается число ошибок при работе. Шум может создаваться работающим оборудованием, установками кондиционирования воздуха, осветительными приборами дневного света, а также проникать извне. В работе приведены следующие значения уровня шума в помещениях офисов, проектных и научно-исследовательских организаций:

1. допустимый уровень – 45 дБ;
2. максимальный уровень – 60 дБ;
3. оптимальный уровень – 50 дБ.

5.3.3 Электромагнитное излучение и освещенность

При выполнении работы на ЭВМ уровень шума в рабочем помещении не должен превышать 50 дБ. Экран и системные блоки производят электромагнитное излучение. Основная его часть происходит от системного блока и видеокабеля. Напряженность электромагнитного поля на расстоянии 50 см вокруг экрана по электрической составляющей должна быть не более:

1. в диапазоне частот 5 Гц-2 кГц – 25 В/м;

2. в диапазоне частот 2 кГц-400 кГц – 2,5 В/м.

Плотность магнитного потока должна быть не более:

1. в диапазоне частот 5 Гц-2 кГц – 250 нТл;
2. в диапазоне частот 2 кГц - 400 кГц – 25 нТл.

Существуют следующие способы защиты от ЭМП:

1. увеличение расстояния от источника (экран должен находиться на расстоянии не менее 50 см от пользователя);
2. применение приэкранных фильтров, специальных экранов и других средств индивидуальной защиты.

При работе с компьютером источником ионизирующего излучения является дисплей. Под влиянием ионизирующего излучения в организме может происходить нарушение нормальной свертываемости крови, увеличение хрупкости кровеносных сосудов, снижение иммунитета и др. Мощность дозы облучения при расстоянии до дисплея 20 см составляет 18 мкЗв/с. По нормам конструкция ЭВМ должна обеспечивать мощность экспозиционной дозы рентгеновского излучения в любой точке на расстоянии 0,05 м от экрана не более 100 мкР/час.

Утомляемость органов зрения может быть связана как с недостаточной освещенностью, так и с чрезмерной освещенностью, а также с неправильным направлением света. В производственном помещении применяется общее равномерное освещение с помощью люминесцентных ламп. Согласно требованиям освещенность рабочих поверхностей должна быть не менее 200 лк.

5.4 Электробезопасность

Электробезопасность – система организационных и технических мероприятий и средств, обеспечивающих защиту людей от вредного и опасного воздействия электрического тока, электрической дуги, электромагнитного поля и статического электричества. Влияние электрического тока на организм человека носит разносторонний характер, и может привести как к легкому, так и к тяжелому исходу. Проходя через организм человека, электрический ток оказывает термическое и биологическое действия:

1. нагрев тканей вплоть до ожогов;
2. разложение крови и плазмы - нарушение физико-химического состава;
3. возбуждение тканей организма (судороги).

Действие тока может привести к электрической травме. Таким образом, действие тока на организм человека может быть местным и общим. Общее (рефлекторное) поражение – электрический удар, представляет для человека наибольшую опасность: нарушается работа центральной нервной и сердечно - сосудистой систем, что приводит к фибрилляции и параличу сердца, а также к остановке дыхания. Степень опасности и исход поражения электрическим током зависят от ряда причин. Основными из них являются: величина тока, проходящего через организм; путь прохождения тока; продолжительность действия тока; частота тока и сопротивление человека в момент соприкосновения с токоведущими частями, которые, в свою очередь, зависят от состояния окружающей среды (температура, влажность воздуха и т.д.). Безопасной для человека является величина переменного тока – 10 мА, постоянного – 50 мА, безопасное напряжение 12 В. Помещение, в котором проводится работа, относится к группе помещений без повышенной опасности: сухое (влажность воздуха не превышает 75%), не жаркое (температура не превышает 28°С), с токонепроводящими полами, без токопроводящей пыли и химически активной среды. Все провода, подводящие напряжение к электрооборудованию, электроизолированы и находятся в заземленной металлической оплетке. Рубильник распределительного щитка имеет пластмассовый кожух. Также имеются отключающие автоматы. Выполнен контур защитного заземления из стальной полосы сечением 30 мм² по периметру помещения. Все электрические приборы в лаборатории заземлены. Согласно заземляющее устройство должно иметь в любое время года сопротивление не более 0,4 Ом. Для предотвращения появления статического электричества и защиты от его влияния в помещении необходимо использовать нейтрализаторы и увлажнители, а полы должны иметь антистатическое покрытие. Конструкция пола в помещении обеспечивает сток и отвод статического электричества. Покрытие пола выполнено из гладких, прочных, обладающих антистатическими свойствами материалов.

5.5 Экологическая безопасность

Для экологической безопасности принимается ряд необходимых мероприятий для рационального использования ресурсов и уменьшения вредного воздействия на окружающую среду. Энергетика является глобальным экономическим фактором, что объясняет актуальность изучения взаимосвязи экологии и энергетических систем. Помещение, в котором выполнялась работа, не является потребителем большой мощности, так как ПЭВМ и остальное оборудование не являются мощным оборудованием.

Поскольку работа ведется в уже существующем здании, то ущерб связанный со строительством не производится. Электромагнитное излучение от ПЭВМ действует только

на его пользователя. При применении рекомендуемых мер предосторожности данное воздействие минимизируется.

Любая экономия электроэнергии уменьшает вредное воздействие на окружающую среду. Поскольку ПЭВМ является чувствительным к пусковым токам и при запуске потребляет большое количество электроэнергии, то не рекомендуется часто производить выключение и включение ПЭВМ. Рекомендуется использовать режим ожидания ПЭВМ, в котором потребление электроэнергии меньше, но который не требует отключать ПЭВМ.

Современное, электронное оборудование, содержит драгметаллы, токсичные и прочие опасные для экологии и здоровья человека вещества. Согласно N 89-ФЗ от 24.06.1998 – «Об отходах производства и потребления» запрещено выбрасывать технику наряду с обыкновенным мусором. Требуется специальная утилизация техники, которой занимаются специализированные организации.

5.6 Безопасность в чрезвычайных ситуациях

5.6.1 Возможные чрезвычайные ситуации

Одним из важнейших факторов в безопасности жизнедеятельности людей является подготовленность к чрезвычайным ситуациям. Чрезвычайная ситуация – это совокупность таких обстоятельств, которые сопровождаются разрушениями зданий, сооружений, материальных ценностей, поражения и гибелью людей.

Чрезвычайные ситуации можно разделить на три основные группы:

1. ЧС техногенного характера (пожары, взрывы, обрушение зданий, различные выбросы радиоактивных веществ, биологически опасных веществ, аварийно химических веществ и т.д.);
2. ЧС природного характера (геофизические – землетрясения, извержения вулканов; метеорологические – бури, ураганы, смерчи; гидрологические – цунами, половодье и т.д.; природные пожары);
3. ЧС экологического характера (эрозия, опустынивание, разрушение озонового слоя, загрязнение водной среды)

Наиболее возможной чрезвычайной ситуацией в случае теоритических расчетов и исследований являет пожарная и взрывная опасность.

5.6.2 Пожарная безопасность

В зависимости от характеристики используемых в производстве веществ и их количества, по пожарной и взрывной опасности помещения подразделяются на категории А, Б, В, Г, Д. Используемое помещение по степени пожаровзрыво-опасности относится к категории В, так как содержит твердые сгорающие вещества. Возможные причины загорания:

1. работа с открытой электроаппаратурой;
2. короткие замыкания в блоке питания;
3. несоблюдение правил пожарной безопасности;
4. наличие горючих компонентов: документы, двери, столы, изоляция кабелей и т.п.

Мероприятия по пожарной профилактике разделяются на: организационные, технические, эксплуатационные и режимные. Организационные мероприятия предусматривают правильную эксплуатацию оборудования, правильное содержание зданий и территорий, противопожарный инструктаж рабочих и служащих, обучение производственного персонала правилам противопожарной безопасности, издание инструкций, плакатов, наличие плана эвакуации. К техническим мероприятиям относятся: соблюдение противопожарных правил, норм при проектировании зданий, при устройстве электропроводов и оборудования, отопления, вентиляции, освещения, правильное размещение оборудования. К режимным мероприятиям относятся, установление правил организации работ, и соблюдение противопожарных мер. Для предупреждения возникновения пожара от коротких замыканий, перегрузок и т. д. необходимо соблюдение следующих правил пожарной безопасности:

1. исключение образования горючей среды (герметизация оборудования, контроль воздушной среды, рабочая и аварийная вентиляция);
2. применение при строительстве и отделке зданий негорючих или трудно сгораемых материалов;
3. правильная эксплуатация оборудования (правильное включение оборудования в сеть электрического питания, контроль нагрева оборудования);
4. правильное содержание зданий и территорий (исключение образования источника воспламенения - предупреждение самовозгорания веществ, ограничение огневых работ);
5. обучение производственного персонала правилам противопожарной безопасности;
6. издание инструкций, плакатов, наличие плана эвакуации;
7. соблюдение противопожарных правил, норм при проектировании зданий, при устройстве электропроводов и оборудования, отопления, вентиляции, освещения;
8. правильное размещение оборудования;

9. своевременный профилактический осмотр, ремонт и испытание оборудования.

В помещении с электрооборудованием, во избежание поражения электрическим током, целесообразно использовать углекислотные или порошковые огнетушители. Данные огнетушители предназначены для тушения загораний различных веществ и материалов, электроустановок под напряжением до 1000 В, горючих жидкостей. Химические и пенные огнетушители не допустимы. Огнетушители следует располагать на защищаемом объекте в соответствии с требованиями таким образом, чтобы они были защищены от воздействия прямых солнечных лучей, тепловых потоков, механических воздействий и других неблагоприятных факторов (вибрация, агрессивная среда, повышенная влажность и т. д.). Они должны быть хорошо видны и легкодоступны в случае пожара. Предпочтительно размещать огнетушители вблизи мест наиболее вероятного возникновения пожара, вдоль путей прохода, а также около выхода из помещения. Огнетушители не должны препятствовать эвакуации людей во время пожара. Согласно требованиям пожарной безопасности, на этаже находится 2 огнетушителя ОП-3 - огнетушители переносные порошковые, лестничные пролеты оборудованы гидрантами, имеется кнопка пожарной сигнализации. При возникновении аварийной ситуации необходимо:

1. сообщить руководству (дежурному);
2. позвонить в аварийную службу или МЧС;
3. принять меры по ликвидации аварии в соответствии с инструкцией.

5.7 Выводы по разделу

В данном разделе были рассмотрены требования по технике безопасности, электро-безопасности, пожарной безопасности и проанализированы условия труда на рабочем месте. В результате можно сделать вывод, что работа в данном помещении не приведет к ухудшению здоровья и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к ней нормативными документами в области охраны труда и окружающей природной среды. По поводу экологической безопасности можно сказать, что деятельность не представляет опасности окружающей среде в виду развитой инфраструктуры по утилизации списанной техники.

6 Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение

Введение

В настоящее время потенциал научного исследования определяется скорее коммерческой ценностью исследования, чем масштабом открытия, оценить которое на этапах введения высокотехнологического и ресурсоэффективного продукта бывает достаточно трудно.

Оценка коммерческого потенциала разработки является необходимым условием при поиске источников финансирования для проведения научного исследования. Это важно для исследователей, которые должны представлять состояние и перспективы проводимых научных исследований.

Целью данной главы является определение перспективности науч-но-исследовательского проекта, разработка механизма управления и со-провождения конкретных проектных решений на этапе реализации. Предусмотрено рассмотрение следующих задач:

1. Оценка коммерческого потенциала разработки;
2. Планирование научно-исследовательской работы;
3. Расчет бюджета научно-исследовательской работы;
4. Определение ресурсной, финансовой, бюджетной эффективности исследования.

Данная научно-исследовательская работа заключается в получении конечной формулы для спектрально-угловое распределение спонтанного излучения темных и электромагнитных фотонов электроном, движущимся в электромагнитных полях произвольного вида. Конечная формула получается с использованием S -матрицы в первом приближении, где описание движения электрона ведется в квазиклассическом приближении методом комплексного роста Маслова.

6.1 Оценка коммерческого потенциала и перспективности проведения исследований с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения

Единственным потребителем проводимой научно-исследовательской работы будут научно-исследовательские центры для анализа экспериментальных данных ядерных реакций. В ближайшем будущем расширение рынка для данной работы не будет, так как данная работа носит теоретический характер и не может быть адаптирована под промышленность в ближайшее время.

6.1.1 Анализ конкурентных технических решений

Был проведен детальный анализ конкурентных исследований, применяемых и существующих на данный момент. Детальный анализ необходимо проводить систематически из-за постоянного изменения рынка. Такой анализ позволяет вносить коррективы в научное исследование, чтобы повысить конкурентоспособность. Так же необходимо оценить сильные и слабые стороны разработок конкурентов.

Для этой цели может быть использована вся имеющаяся информация о конкурентных разработках:

1. конкурентоспособность исследования;
2. уровень завершенности научного исследования;
3. бюджет исследования;
4. использование на рынке;
5. финансовое положение конкурентов, тенденции его изменения и т.д.

Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения позволяет провести оценку сравнительной эффективности научного исследования и определить направления для ее будущего повышения. Целесообразно проводить данный анализ с помощью оценочной карты, приведенной в таблице 3. В этой таблице сравнивается техническая ресурсоэффективность, и экономическая эффективность разработки метода расчета дифференциального сечения фоторождения в резонансной области энергий:

1. B_{ϕ} – расчет в квазиклассическом приближении
2. B_{k1} – точное решение уравнений для конкретных полей и получение на основе этого мощности излучения;
3. B_{k2} – оценка мощности излучения напрямую из конфигурации установки.

Таблица 3: Оценочная карта для сравнения конкурентных технических решений

Критерии оценок	Вес критерия	Балы			Конкурентоспособность		
		Б _ф	Б _{к1}	Б _{к2}	Б _ф	Б _{к1}	Б _{к2}
Технические критерии оценки ресурсоэффективности							
Трудоемкость	0.3	5	1	1	1.5	0.3	0.3
Точность расчетов	0.3	2	1	3	0.6	0.3	0.9
Различные конфигурации	0.3	3	5	1	0.9	1.5	0.3
Экономические критерии оценки эффективности							
Финансирование научных исследований	0.1	2	3	3	0.6	0.9	0.9
Итого	1	12	10	8	2.5	1.9	1.9

Проведенный анализ конкурентных технических решений показал, что исследование имеет конкурентоспособность по сравнению с прямой оценкой мощности и точным решением.

6.1.2 SWOT – анализ

SWOT – Strengths (сильные стороны), Weaknesses (слабые стороны), Opportunities (возможности) и Threats (угрозы) – представляет собой комплексный анализ проекта. SWOT-анализ применяют для исследования внешней и внутренней среды проекта.

Сильные стороны – это факторы, характеризующие преимущества проекта. Сильные стороны свидетельствуют о том, что у проекта есть отличительное качество или особые ресурсы, являющиеся важными с точки зрения конкуренции. Другими словами, сильные стороны – это ресурсы, которыми располагает руководство проекта и которые могут быть использованы для достижения поставленных целей.

Слабые стороны – это недостаток, упущение или ограниченность проекта, которые препятствуют достижению его целей. Это то, что плохо получается в рамках проекта или где он располагает недостаточными ресурсами по сравнению с конкурентами.

Возможности включают в себя предпочтительную ситуацию в настоящем или будущем, возникающую в условиях окружающей среды проекта, т.е. тенденцию, изменение или предполагаемую потребность, которая поддерживает спрос на результаты исследования и позволяет улучшить свою конкурентоспособность научно-исследовательской работы.

Угроза представляет собой нежелательную ситуацию, в настоящем или будущем, т.е. тенденцию или изменение в условиях окружающей среды проекта, которые имеют или угрожающий характер для его конкурентоспособности исследования. В качестве угрозы может выступать барьер, ограничение или что-либо еще, что может повлечь за собой проблемы.

Первый этап, составляется матрица SWOT, в которую описаны слабые и сильные стороны проекта и выявленные возможности и угрозы для реализации проекта, которые проявились или могут появиться в его внешней среде, приведены в таблице 4.

SWOT-анализ данного научно-исследовательского проекта представлен в таблице 4.

Таблица 4: SWOT-анализ

Сильные стороны	Слабые стороны
С1. Произвольность начальной конфигурации электромагнитных полей	Сл1. Увеличение сложности с повышением точности расчетов.
С2. Относительная простота получения мощности с малой точностью расчетов	Сл2. Отсутствие точного решения
Возможности	Угрозы
В1. Учет дополнительных эффектов	У1. Получение для данной конфигурации оценок другим способом.
В2. На основе общности расчетов получение конфигурации электромагнитных полей в которой мощность максимальна для новых экспериментов.	У2. Невостребованность исследований в данном направлении из-за появления новых экспериментальных фактов
В3. Возможность проверки результатов в эксперименте НА64.	

На втором этапе на основании матрицы SWOT строятся интерактивные матрицы возможностей и угроз, позволяющие оценить эффективность проекта, а также надежность его реализации. Соотношения параметров представлены в таблицах 5 - 8.

Таблица 5: Интерактивная матрица проекта возможности проекта и сильные стороны

Сильные стороны проекта			
Возможности проекта		C1	C2
	B1	-	-
	B2	+	-
	B3	-	+

Таблица 6: Интерактивная матрица проекта возможности проекта и слабые стороны

Слабые стороны проекта			
Возможности проекта		Сл1	Сл2
	B1	-	+
	B2	-	-
	B3	-	-

Таблица 7: Интерактивная матрица проекта угрозы проекта и сильные стороны

Сильные стороны проекта			
Возможности проекта		C1	C2
	У1	+	-
	У2	-	+

Таблица 8: Интерактивная матрица проекта угрозы проекта и слабые стороны

Слабые стороны проекта			
Возможности проекта		Сл1	Сл2
	У1	+	-
	У2	-	-

Таблица 9: Интерактивная матрица проекта возможности проекта и слабые стороны

	Сильные стороны	Слабые стороны
	<p>С1. Произвольность начальной конфигурации электромагнитных полей</p> <p>С2. Относительная простота получения мощности с малой точностью расчетов</p>	<p>Сл1. Увеличение сложности с повышением точности расчетов.</p> <p>Сл2. Отсутствие точного решения</p>
Возможности	Направления развития	Сдерживающие факторы
<p>В1. Учет дополнительных эффектов</p> <p>В2. На основе общности расчетов получение конфигурации электромагнитных полей в которой мощность максимальна для новых экспериментов.</p> <p>В3. Возможность проверки результатов в эксперименте NA64</p>	<p>В2С1. Использование возможности расчета для произвольных электромагнитных полей для участия в новых экспериментах.</p> <p>В3С2. Возможность проверки расчетов на основе оценки мощности в эксперименте NA64 и сверка с уже имеющимися оценками</p>	<p>В1Сл1. Возможность учесть в низком порядке приближения дополнительные эффекты и получить оценку влияния этого эффекта.</p>
Угрозы	Угрозы развития	Уязвимости
<p>У1. Получение для данной конфигурации оценок другим способом.</p>	<p>У1С1. В виду общности расчетов, работа не привязана к одному конкретному эксперименту.</p>	<p>У1Сл1. Слишком быстрое увеличение сложности оценки мощности излучения по сравнению с прямой оценкой мощности.</p>

Продолжение таблицы 9

У2. Невостробованность исследований в данном направлении из-за появления новых экспериментальных фактов	У2С2. При появлении новых экспериментальных фактов, которые исключают дальнейшую работу над проектом, получение оценок менее затратно по умственным ресурсам, чем точное решение.	
---	---	--

В результате SWOT-анализа показана перспективность работы в виду ее общности и простоты начальных оценок. Из уязвимостей основным является угроза быстрого увеличения сложности расчетов, но она компенсируется тем, что точность прямых оценок ограничена, а точность исследуемого метода нет.

6.2 Планирование научно-исследовательской работы

6.2.1 Структура работ в рамках научного исследования

Научно-исследовательские работы и опытно-конструкторские разработки разбиваются на этапы в соответствии с ГОСТ 15.101-98, (для НИР) и ГОСТ Р 15.201-2000 (для ОКР). В зависимости от характера и сложности НИОКР ГОСТ допускает деление этапов на отдельные виды работ.

Для выполнения научных исследований формируется рабочая группа, в состав которой могут входить научные сотрудники и преподаватели, инженеры, техники и лаборанты, численность групп может варьироваться от 3 до 15 человек. В рамках данной работы была сформирована рабочая группа, в состав которой вошли: научный руководитель; студент.

Планирование комплекса научно-исследовательских работ осуществляется в порядке:

1. определение структуры работ в рамках научного исследования;
2. определение количества исполнителей для каждой из работ;
3. установление продолжительности работ;

4. построение графика проведения научных исследований.

В данном разделе составлен перечень этапов и работ по выполнению НИР. Порядок этапов и работ при выполнении ВКР приведен в таблице 10.

Таблица 10: Перечень этапов и работ по выполнению НИР

Основные этапы	Номер работы	Содержание работы	Исполнитель
Разработка технического задания на НИР	1	Составление и утверждение технического задания	Руководитель
Выбор направления исследования	2	Изучение материалов по теме	Студент
	3	Выбор направления исследования	Руководитель
	4	Разработка методики выполнения работ	Руководитель
	5	Составление календарного плана	Руководитель
Теоритическое исследование	6	Поиск литературы	Студент
	7	Изучение литературы	Студент
Теоритические вывод и обоснование формул	8	Теоретические выводы и обоснование формул	Студент
Получение результатов	9	Получение результатов	Студент
	10	Графическое представление результатов	Студент
Оформление отчёта по НИР	11	Проверка результатов	Руководитель
	12	Составление отчета	Студент

6.2.2 Определение трудоемкости выполнения НИОКР

Следующим этапом является определение трудоемкости выполнения НИОКР. Трудоемкость выполнения НИОКР оценивается экспертным путем в человеко-днях и носит вероятностный характер, т.к. зависит от множества трудно учитываемых факторов. Для определения, ожидаемого (среднего) значения трудоемкости работ используется следующая формула:

$$(t_{ож})_i = \frac{3(t_{min})_i + (t_{max})_i}{5}$$

где $(t_{ож})_i$ – ожидаемая трудоемкость выполнения i -ой работы, (чел.-дн.); $(t_{min})_i$ - минимально возможная трудоемкость выполнения заданной i -ой работы (оптимистическая оценка: в предположении наиболее благоприятного стечения обстоятельств), (чел.-дн.); $(t_{max})_i$ – максимально возможная трудоемкость выполнения заданной i -ой работы (пессимистическая оценка: в предположении наиболее неблагоприятного стечения обстоятельств),

(чел.-дн). Вычисленные трудоемкости по представленному методу с использованием данных их таблицы 10 занесены в таблицу ?? :

Исходя из ожидаемой трудоемкости работ, определяется продолжительность каждой работы в рабочих днях Tr , учитывающая параллельность выполнения работ несколькими исполнителями. Такое вычисление необходимо для обоснованного расчета заработной платы, так как удельный вес зарплаты в общей сметной стоимости научных исследований составляет около 65 %.

$$(Tr)_i = \frac{(t_{ож})_i}{ч_i}$$

где $(Tr)_i$ – продолжительность одной работы; $(t_{ож})_i$ – ожидаемая трудоемкость выполнения одной работы; $ч_i$ – численность исполнителей, выполняющих одновременно одну и ту же работу на данном этапе чел. В ходе данной работы количество человек, выполнявших каждую из работ на каждом из этапов, равняется одному.

Результаты вычисления продолжительности каждой работы, рассчитываемые с использованием вышеприведенной формулы и с использованием данных из таблицы 10, приводятся в таблице 11 .

6.2.3 Разработка графика проведения научного исследования

Был разработан календарный план работ. В ходе данной работы был построен ленточный графика проведения НИР в форме диаграмм Ганта. Диаграмма Ганта – горизонтальный ленточный график, на котором работы по теме представляются протяженными во времени отрезками, характеризующимися датами начала и окончания выполнения данных работ. Для удобства построения календарного план-графика, длительность этапов в рабочих днях переводится в календарные дни и рассчитывается по следующей формуле:

$$(Tk)_i = (Tr)_i k$$

где $(Tk)_i$ – продолжительность выполнения одной работы в кален. дн; $(Tr)_i$ – продолжительность одной работы в раб. дн; k – коэффициент календарности, предназначен для перевода рабочего времени в календарное. Расчёт коэффициента календарности производится по следующей формуле:

$$k = \frac{T_{кг}}{T_{кг} - T_{вд} - T_{пд}}$$

где, $T_{кг}$ – количество календарных дней в году $T_{кг} = 365$ дней; $T_{вд}$ – количество выходных дней в году $T_{вд} = 52$ дня; $T_{пд}$ – количество праздничных дней в году, $T_{пд} = 14$ дней. Подставив значения в формулу получим $k = 1.22$. Расчетные данные сведены в таблице 11, на основании которой был построен календарный план-график.

Таблица 11: Календарный план-график проведения НИОКР по теме

№	Содержание работы	Исполнитель	$(t_{min})_i$	$(t_{max})_i$	$(t_{ож})_i$	τ_i	$(Tр)_i$	$(Tк)_i$
1	Составление и утверждение технического задания	Руководитель	2	4	2,8	1	2,8	3
2	Изучение материалов по теме	Инженер	3	5	3,8	1	3,8	5
3	Выбор направления исследования	Руководитель	2	3	2,4	1	2,4	3
4	Разработка методики выполнения работ	Руководитель	1	3	1,8	1	1,8	2
5	Составление календарного плана	Руководитель	2	3	2,4	1	2,4	3
6	Поиск литературы	Инженер	2	5	3,2	1	3,2	4
7	Изучение литературы	Инженер	10	15	12	1	12	15
8	Теоретические выводы и обоснование формул	Инженер	7	10	8,2	1	8,2	10
9	Получение результатов	Инженер	3	5	3,8	1	3,8	5
10	Графическое представление результатов	Инженер	2	4	2,8	1	2,8	3
11	Проверка результатов	Руководитель	2	5	3,2	1	3,2	4
12	Составление отчета	Инженер	3	4	3,4	1	3,4	4

6.2.4 Календарный план-график в виде диаграммы Ганта

На основании полученных данных был построен план-график в виде диаграммы Ганта. График строится с разбивкой по месяцам и декадам (10 дней) за период времени дипломирования. При этом работы на графике следует выделить различной штриховкой в зависимости от исполнителей, ответственных за ту или иную работу. Календарный план-график выполнения данной дипломной работы представлен ниже на рисунках 8 и 9.

Рис. 8: Календарный план-график в виде диаграммы Ганта

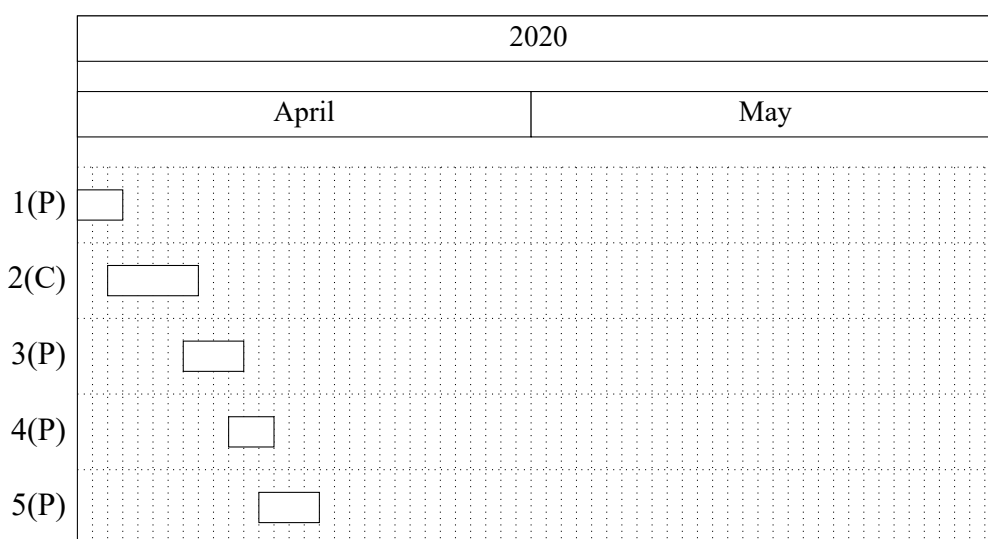
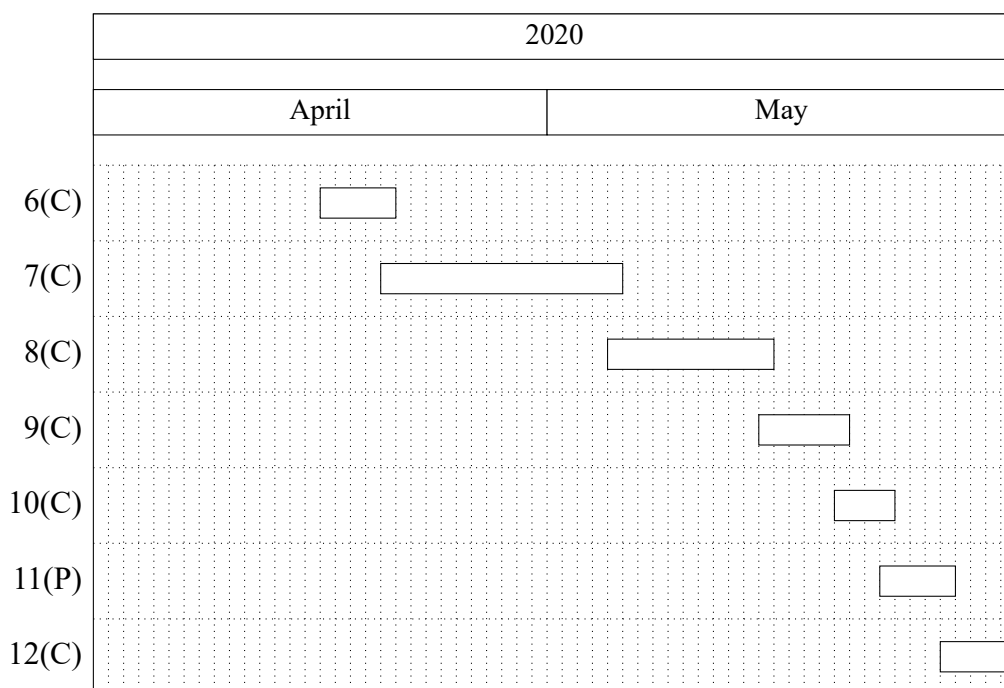


Рис. 9: Календарный план-график в виде диаграммы Ганта (Продолжение)



6.3 Бюджет научно-технического исследования (НТИ)

При планировании бюджета НТИ должно быть обеспечено полное и достоверное отражение всех видов расходов, связанных с его выполнением. В процессе формирования бюджета НТИ используется следующая группировка затрат по статьям:

1. материальные затраты НТИ;

2. основная заработная плата исполнителей темы;
3. дополнительная заработная плата исполнителей темы;
4. отчисления во внебюджетные фонды (страховые отчисления);
5. затраты научные и производственные командировки;
6. контрагентные расходы;
7. накладные расходы.

ЗП рук. 36 800 ЗП инж. 12 135

6.3.1 Расчет материальных затрат научно-технического исследования

Материальные затраты — это затраты организации на приобретение сырья и материалов для создания готовой продукции.

Данная часть включает затрат всех материалов, используемых при выполнении научно-исследовательской работы. Результаты расчета затрат представлены в таблице 13.

Таблица 12: Материальные затраты

Наименование материалов	Цена за ед., руб.	Кол-во, ед.	Сумма, руб.
Комплексы канцелярских принадлежностей	340	4	1 200
Картридж для лазерного принтера	3 490	1	3 490
Итого			8 290

6.3.2 Расчет амортизации специального оборудования

Расчет сводится к определению амортизационных отчислений, так как оборудование было приобретено до начала выполнения данной работы и эксплуатировалось ранее, поэтому при расчете затрат на оборудовании учитываем только рабочие дни по данной теме.

Норма амортизации: рассчитывается по формуле:

$$H_A = \frac{1}{n}$$

где n – срок полезного использования в количестве лет.

Амортизация оборудования рассчитывается по формуле:

$$A = \frac{H_A N m}{12}$$

где N – итоговая сумма, тыс. руб.; m – время использования, мес.

Таблица 13: Затраты на оборудование

№	Наименование оборудования	Кол-во, шт.	Срок полезного использования, лет	Цены единицы оборудования, тыс. руб.	Общая стоимость оборудования, тыс. руб.
1	Ноутбук HP ProBook 450 G5	1	5	55	55
Итого		55 тыс. руб.			

В итоге общая сумма амортизационных отчислений:

$$A = \frac{H_A N m}{12} = 1833$$

6.3.3 Основная заработная плата исполнителей темы

В данном разделе рассчитывается заработная плата инженера и руководителя, помимо этого необходимо рассчитать расходы по заработной плате, определяемые трудоемкостью проекта и действующей системой оклада.

Основная заработная плата $Z_{\text{осн}}$ одного работника рассчитывается по следующей формуле:

$$Z_{\text{осн}} = Z_{\text{дн}} T_p$$

где $Z_{\text{дн}}$ – среднедневная заработная плата, руб.; T_p – продолжительность работ, выполняемых работником, раб.дн. 14.

Среднедневная заработная плата рассчитывается по формулам. Для шестидневной рабочей недели руководителя:

$$Z_{\text{дн}} = \frac{Z_{\text{м}}}{F} = 2003 \text{ руб.}$$

где Z_m – месячный должностной оклад работника, руб.; F – действительный годовой фонд рабочего времени научно-технического персонала, раб. дней; – количество месяцев работы без отпуска в течение года:

1. при отпуске в 28 раб. дня – месяца, 5-дневная рабочая неделя;
2. при отпуске в 56 раб. дней – месяца, 6-дневная рабочая неделя.

Для пятидневной рабочей недели инженера:

$$Z_{\text{дн}} = \frac{Z_m}{F} = 1244 \text{ руб.}$$

Должностной оклад работника за месяц:

1. для руководителя:

$$Z_m = Z_{\text{тс}} (1 + k_{\text{пр}} + k_{\text{д}}) k_{\text{р}} = 47840 \text{ руб.}$$

2. для инженера:

$$Z_m = Z_{\text{тс}} (1 + k_{\text{пр}} + k_{\text{д}}) k_{\text{р}} = 23663 \text{ руб.}$$

где $Z_{\text{тс}}$ – заработная плата, согласно тарифной ставке, руб.; $k_{\text{пр}}$ – премиальный коэффициент, равен 0,3; $k_{\text{д}}$ – коэффициент доплат и надбавок, равен 0,2; $k_{\text{р}}$ – районный коэффициент, равен 1,3 (для г. Томска).

Таблица 14: Баланс рабочего времени

Показатель рабочего времени	Руководитель	Инженер
Календарное количество дней	365	365
Количество не рабочих дней		
Выходные дни	52	52
Праздничные дни	14	14
Потери рабочего времени		
Отпуск	48	48
Не выходы по болезни	0	0
Действие годового фонда рабочего времени	251	251

Данные и результаты расчета основной заработной платы приведены в таблице 15, для руководителя расчет основной заработной платы, зная, что его оклад 36800 руб/месяц. Для студента оклад 12 135 руб/месяц

Таблица 15: Результаты расчета основной заработной платы

Исполнитель	З _{тс} , руб	к _{пр}	к _д	к _р	З _м руб/месяц	З _{дн} , руб/день	Т _р , раб.дни	З _{осн} , руб
Руководитель	36 800	0,3	0,2	1,3	47 840	2003	13	26 039
Инженер	12 135	0,3	0,2	1,3	23663	1244	37	46 028
Итого:								45 489

Дополнительная заработная плата определяется по формуле:

1. для руководителя:

$$З_{\text{доп}} = З_{\text{осн}} k_{\text{доп}} = 3905 \text{ руб.}$$

2. для инженера:

$$З_{\text{доп}} = З_{\text{осн}} k_{\text{доп}} = 6904 \text{ руб.}$$

где $k_{\text{доп}}$ – коэффициент дополнительной заработной платы.

6.3.4 Отчисления во внебюджетные фонды (страховые отчисления)

В данной статье расходов отражаются обязательные отчисления по установленным законодательством Российской Федерации нормам органам государственного социального страхования (ФСС), пенсионного фонда (ПФ) и медицинского страхования (ФФОМС) от затрат на оплату труда работников. Величина отчислений во внебюджетные фонды определяется исходя из следующей формулы:

1. для руководителя:

$$З_{\text{в.б.}} = k_{\text{в.б.}} (З_{\text{осн}} + З_{\text{доп}}) = 8983 \text{ руб.}$$

2. для инженера:

$$З_{\text{в.б.}} = k_{\text{в.б.}} (З_{\text{осн}} + З_{\text{доп}}) = 15879 \text{ руб.}$$

где $k_{\text{в.б.}}$ – коэффициент отчислений на уплату во внебюджетные фонды (пенсионный фонд, фонд обязательного медицинского страхования и пр.). В соответствии с Федеральным законом от 24.07.2009 №212-ФЗ установлен размер страховых взносов равный 30%.

6.3.5 Накладные расходы

Накладные расходы включают в себя следующие расходы: печать ксерокопирование материалов исследования, оплата услуг связи и т.д. Сумма 5 статьи затрат, рассчитанных выше, приведена в таблице ниже и используются для расчета накладных расходов.

Таблица 16: Группировка затрат по статьям

Статьи					
1	2	3	4	5	6
Амортизация	Сырье, материалы	Основная заработная плата	Дополнительная заработная плата	Отчисления на социальные нужды	Итого без накладных расходов
1833	8290	72 067	10809	24 862	117 861

Величина накладных расходов определяется по формуле

$$Z_{\text{накл}} = k_{\text{нр}} (\text{сумма статей 1-5}) = 23572 \text{ руб.}$$

где $k_{\text{нр}}$ – коэффициент, учитывающий накладные расходы. Величина коэффициента принимается равной 0,2.

На основании полученных данных по отдельным статьям затрат составляется бюджет.

Таблица 17: Бюджет

№	Наименование статьи	Сумма, руб.			Примечание
		Текущий Проект	Исп. 1	Исп. 2	
1	Материальные затраты НИР	8290	16580	4145	Пункт 4.2.3.1
2	Затраты на специальное оборудование	1833	3666	916	Пункт 4.2.3.2
3	Затраты по основной заработной плате исполнителей темы	148391	296782	74195	Пункт 4.2.3.3
4	Затраты по дополнительной заработной плате исполнителей темы	22258	44516	11129	Пункт 4.2.3.3
5	Отчисления во внебюджетные фонды	51194	102388	25597	Пункт 4.2.3.4

Продолжение таблицы ??

№	Наименование статьи	Сумма, руб.			Примечание
		Текущий Проект	Исп. 1	Исп. 2	
6	Накладные расходы	23572	23572	11786	Пункт 4.2.3.5
Бюджет затрат НИР		255538	511076	127769	

6.4 Определение ресурсной (ресурсосберегающей), финансовой, бюджетной, социальной и экономической эффективности исследования

Для определения эффективности исследования рассчитан интегральный показатель эффективности научного исследования путем определения интегральных показателей финансовой эффективности и ресурсоэффективности.

Интегральный показатель финансовой эффективности научного исследования получен в процессе оценки бюджета затрат трех вариантов исполнения научного исследования. Для этого наибольший интегральный показатель реализации технической задачи принят за базу расчета (как знаменатель), с которым соотносятся финансовые значения по всем вариантам исполнения.

В качестве аналогов данной НИР рассмотрены:

1. Точное решение уравнений для конкретных полей и получение на основе этого мощности излучения;
2. Оценка мощности излучения напрямую из конфигурации установки

Интегральный финансовый показатель разработки рассчитывается как:

$$I_{\text{финр}}^{\text{исп},i} = \frac{\Phi_{pi}}{\Phi_{\text{max}}}$$

где $I_{\text{финр}}^{\text{исп},i}$ – интегральный финансовый показатель разработки; Φ_{pi} – стоимость i -го варианта исполнения; Φ_{max} – максимальная стоимость исполнения.

$$I_{\text{финр}}^{\text{исп},1} = \frac{\Phi_{p1}}{\Phi_{\text{max}}} = 0.5, \quad I_{\text{финр}}^{\text{исп},2} = \frac{\Phi_{p2}}{\Phi_{\text{max}}} = 1, \quad I_{\text{финр}}^{\text{исп},3} = \frac{\Phi_{p3}}{\Phi_{\text{max}}} = 0.25.$$

В результате расчета консолидированных финансовых показателей по трем вариантам разработки вариант 3 считается менее затратным с финансовой точки зрения.

Интегральный показатель ресурсоэффективности вариантов выполнения НИР определен путем сравнительной оценки их характеристик, распределенных с учетом весового коэффициента каждого параметра 18.

Таблица 18: Сравнительная оценка характеристик вариантов НИР

Объект исследования	Весовой коэффициент параметра	Текущий проект	Исп.2	Исп.3
1.Произвольность начальных характеристик полей	0,4	5	1	1
2.Трудоемкость решения	0,3	2	1	3
3.Точность решения и учет дополнительных эффектов	0,3	3	5	1
ИТОГО	1	10	8	5

Расчет интегрального показателя для разрабатываемого проекта:

$$I_{p1} = 3.5, \quad I_{p2} = 2.2, \quad I_{p3} = 1.6.$$

Интегральный показатель эффективности вариантов исполнения разработки вычисляется на основании показателя ресурсоэффективности и интегрального финансового показателя по формуле:

$$I_{\text{исп},i} = \frac{I_{p-\text{исп},i}}{I_{\text{финр},i}}$$

$$I_{\text{исп},1} = 7, \quad I_{\text{исп},2} = 2.2, \quad I_{\text{исп},3} = 6.4.$$

Далее интегральные показатели эффективности каждого варианта НИР сравнивались с интегральными показателями эффективности других вариантов с целью определения сравнительной эффективности проекта 19.

Таблица 19: Сравнительная эффективность разработки

№	Показатели	Текущий проект	Исп.2	Исп.3
1	Интегральный финансовый показатель разработки	0,5	1	0,25
2	Интегральный показатель ресурсоэффективности разработки	3.5	2.2	1.6

Продолжение таблицы ??

№	Показатели	Текущий проект	Исп.2	Исп.3
3	Интегральный показатель эффективности	7	2.2	6.4
4	Сравнительная эффективность вариантов исполнения	1	0,31	0,91

Сравнение среднего интегрального показателя сопоставляемых вариантов позволило сделать вывод о том, что наиболее финансово- и ресурсоэффективным является текущий проект.

6.5 Выводы по разделу

В результате выполнения целей раздела можно сделать следующие выводы:

1. Результатом анализа конкурентных технических решений является выбор одного из вариантов реализации НИР как наиболее подходящего и оптимального по сравнению с другими;
2. В ходе планирования для руководителя и инженера был разработан график реализации этапа работ, который позволяет оценивать и планировать рабочее время исполнителей. Определено следующее: общее количество дней для выполнения работ составляет 61 дней; общее количество дней, в течение которых работал инженер, составляет 37 дней; общее количество дней, в течение которых работал руководитель, составляет 13 дней;
3. Для оценки затрат на реализацию проекта разработан проектный бюджет, который составляет 255 538 руб;
4. Результат оценки эффективности ИР показывает следующие выводы:
 - значение интегрального финансового показателя ИР составляет 0,50, что является показателем того, что ИР не является финансово выгодной по сравнению с аналогами;
 - значение интегрального показателя ресурсоэффективности ИР составляет 3.5, по сравнению с 2.2 и 1.6;
 - значение интегрального показателя эффективности ИР составляет 7, по сравнению с 2.2 и 6.4, и является наиболее высоким, что означает, что техническое решение, рассматриваемое в ИР, является наиболее эффективным вариантом исполнения.

Заключение

Методом комплексного роста Маслова получены с точностью первых квантовых поправок матричные элементы токов перехода, определяющие мощность обычного и темного фотонов. Все выражения представляют собой функционалы от классической траектории излучающего электрона. В полном объеме произведен учет квантовых поправок связанных с отдачей излучаемого фотона. Выражения представлены в виде удобном для дальнейшего анализа.

Приложение А

The Phenomenology of Dark Matter

Студент:

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0AM84	Ворончихин Илья Вячеславович		

Руководитель ВКР

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Зав. каф. - рук. отд. на правах кафедры ОМиИ	Трифонов Андрей Юрьевич	д. ф.-м. н., профессор		

Консультант – лингвист отделения иностранных языков ШБИП

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Ст. препод. ОИЯ ШБИП	Смирнова У.А.	Ст. преподаватель		

The Phenomenology of Dark Matter

Experimental arguments for the existence of dark matter

Rotational Curves in Galaxies

The first attempts to obtain the total density of matter in the vicinity of the solar system as a result of experimental observations were made by Opik in 1915, Kaptein in 1922, and Oort in 1932, who discovered that the total density of matter can be explained by known star clusters if accepted into account the extrapolation of faint dwarf stars. In contrast, Jeans discovered that for each bright star there should be two invisible stars, which contradicted the first result. Zwicky in 1933 received an even greater discrepancy between the masses of visible objects and the observed mass of stellar systems to which they belong. As a result, Zwicky concluded that to hold the galaxies together, the cluster must contain a huge amount of invisible matter.

One of the most reliable and illustrative arguments are rotational curves, which are defined as the dependence of the speed of rotation on the distance from the center of the galaxy. In 1979, Vera Rubin published an article on research into the rotating properties of 21 Sc-type spiral galaxies (Hubble classification) [1]. Sc class galaxies have very wide luminosity and mass ranges.

Figure 13 shows the results of Rubin's measurements, where a red line is showing the theoretical behavior of the galaxy according to Newtonian mechanics without hidden mass:

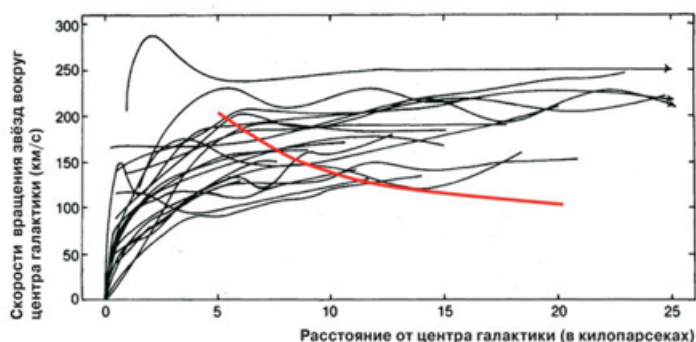


Рис. 10: Velocity distribution in galaxies and galactic clusters

The speed of stars v in a galaxy according to Newton's laws depends on the radius to the center of the galaxy r as follows:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

where is the gravitational constant G ; M is the mass of the center of the galaxy. In experimental measurements, it was found that with an increase in the radius starting from a certain distance, the

rotation curves of stars in the galaxy remain constant. According to Newtonian mechanics, these curves must decrease, which implies that $M(r) \sim r$. This means the presence of dark matter in the accretion disk. From the form of rotation curves it is implied that the density distribution of the mass of dark matter ρ in the galaxy has a dependence of the shape as:

$$\rho \sim \frac{M(r)}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}.$$

An assumption in this dependence is made about the distribution of dark matter relative to the central galaxy. This means that dark matter cannot interact with the accretion disk.

The numerical distribution of dark matter in the Milky Way galaxy is well approximated by the Navarro-Frank-White model:

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}$$

where $\rho_s = 20 \text{кпк}$ - is the scalar radius.

Gravitational lensing

The phenomenon of the curvature of a light beam under the influence of gravity was predicted in the general theory of relativity, and the detection of gravitational lenses was one of the confirmations of the general theory of relativity. The idea of a cosmic shift (weak lensing) for galaxies goes back to a lecture given by Richard Feynman at the California Institute of Technology in 1964.

Weak lensing is a deviation of the trajectory of photons emitted by stars in other galaxies, which are massive structures between the star and the observer, which leads to distortion of the shapes of the observed galaxies. These shifts are of the order of several percents, which allows direct measurements to build a map of the density of mass in the universe. The photons moving to observer from background deviate due to mass fluctuations along the line of sight drawing ??.

The gravitational lens most strongly bends the light passing closer to the massive center, and it less bends the light that passes farther from the massive center, which implies that the gravitational lens does not have a focal point, unlike an optical lens, but has a focal line.

The statement that gravitational lensing occurs under the influence of dark matter reveals that weak lensing takes place for galaxies and clusters of galaxies, the mass of which is not sufficient to create gravitational lenses and additional mass is necessary to create an effect.

Figure ?? shows the image of the galaxy cluster $C10024+17$, for which the effect of gravitational lensing under the influence of dark matter is manifested.

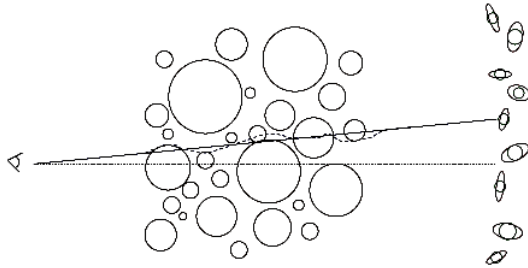


Рис. 11: Gravity Lens Effect



Рис. 12: Dark ring in the image of a cluster of galaxies $C10024+17$ was connected with dark matter

Thermodynamic Method

Cosmic background radiation offers an extremely powerful way to verify the origin of oscillations and limit the substance, geometry and late evolution of the universe. The temperature and density of a gas can be determined by the basis of the energy and flux of x-rays from this gas, which makes it possible to estimate its mass. Many laboratories on the basis of this approach have found that if we take into account only the mass of stars and gas in galaxies and clusters of galaxies, then this mass is insufficient to keep the hot gas entering the galaxies. According to modern observations, dark matter occupies 85 % of the total density of matter in the universe.

Dark Matter

Halo of Dark Matter

A halo of dark matter is a component of galaxies surrounding a galactic accretion disk and spreading beyond the visible part of the galaxy. The main contribution to the mass of the galaxy is made by the mass of the halo of dark matter, which is not observed directly, but only indirectly, by influencing the movements of stars in the galaxy.

The lower limit of the permissible mass is determined by the number of particles that can be contained in a given cell in the phase space, and is determined by the spin statistics of the particles. If the dark matter is scalar, then the Bose statistics say that there is no limit on the

number of particles that can be packed at the same point in phase space. In this case, the number of space filled with dark matter is so high that it can be effectively considered as a classical field.

We can obtain using the estimate that the lower boundary of the mass is $m_{scalar} > 10^{-22}$ eV. We can be used a similar approach for fermions. Estimating the halo mass for dwarf galaxies, the lower mass boundary is obtained about $m_{scalar} > 0.7$ keV. [7]

There is a problem of a singular halo, which delves into the numerical simulation of the distribution of dark matter, in which it was found that dark matter will form a singularity in the center of the galaxy and it have the highest distribution density in regions with high baryon density. However, in experimental observations was found that dark matter fills the voids between galaxies and does not cause singularities.

If dark matter exists, this can affect the visible sector:

1. the dynamics of the galactic structure;
2. muon anomalous magnetic moment;
3. proton charge radius.

To search for dark matter, detectors that have high sensitivity or a high intensity of interactions are needed.

Classification of Dark Matter

In the early stages of the existence of the universe, when the interaction of dark and baryonic matter was inelastic, these types of matter were in thermal and chemical equilibrium, i.e. dark matter particles are constantly replenished. With the expansion of the universe, it has become increasingly difficult for dark matter particles to find a partner for the transition to the visible sector and the interactions of dark and baryonic matter become elastic. As a result, the density of dark matter freezes, after which the dark and baryonic matter are in thermodynamic equilibrium.

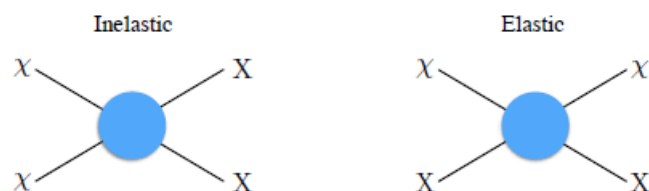


Рис. 13: Inelastic and elastic scattering of dark χ and baryonic matter X

The classification of dark matter is based on the assumption, that dark matter and baryonic matter in the early stages of the evolution of the universe forming cosmic plasma, were in thermodynamic and chemical equilibrium and when the temperature dropped sharply, the interaction between baryonic and dark matter rolled over. Depending on the temperature, there are:

1. Hot dark matter. In this case, the particles were ultrarelativistic;
2. Cold Dark Matter. In this case, the particles were nonrelativistic;
3. Warm dark matter. At the time of going out of thermal equilibrium, these particles were relativistic, but at this stage they are nonrelativistic.

If dark matter were hot, then when moving with relativistic speeds, the density of matter would be smoothed out, which would prevent the formation of the observed structure of the space network. Whence it follows that dark matter is either cold or warm i.e. moves with non-relativistic speeds.

A restriction for thermal dark matter is obtained based on non relativistic motion in the late stages of the universe, that the lower mass limit of these particles lies in the region of ~ 3.3 keV, then the structure of the universe will correspond to the observed one.

Experiment NA64

NA64 Experiment Methodology

In the NA64 experiment, there is a direct search for dark photons (A') in the sub-GeV region, for which the reaction is used:

$$e^- Z \rightarrow e^- Z A', \quad A' \rightarrow \text{invisible},$$

where electron e^- energy is 100 GeV; Z is active target. Due to the kinetic mixing of the electromagnetic and dark photons in this reaction the birth of a dark photon and its further decay into particles from the dark sector, which do not interact with the visible sector and take away part of the energy, take place. Thus, in the case of the birth of a dark photon with energy $E_{A'} = f E_0$, where E_0 is the initial electron energy and f is the fraction of the initial electron energy transferred to the dark photon. Events with an amount above the expected background are recorded with the loss of a large amount of energy $E_{A'}$ and the remaining part of the energy $E_e = (1 - f) E_0$ being scattered by the electron in the target. It is assumed that particles from the dark sector, which are obtained as a result of the decay of a dark photon, pass through the detector without decay into the visible sector.

Experimental setup NA64

A schematic representation of the NA64 setup is shown in 14.

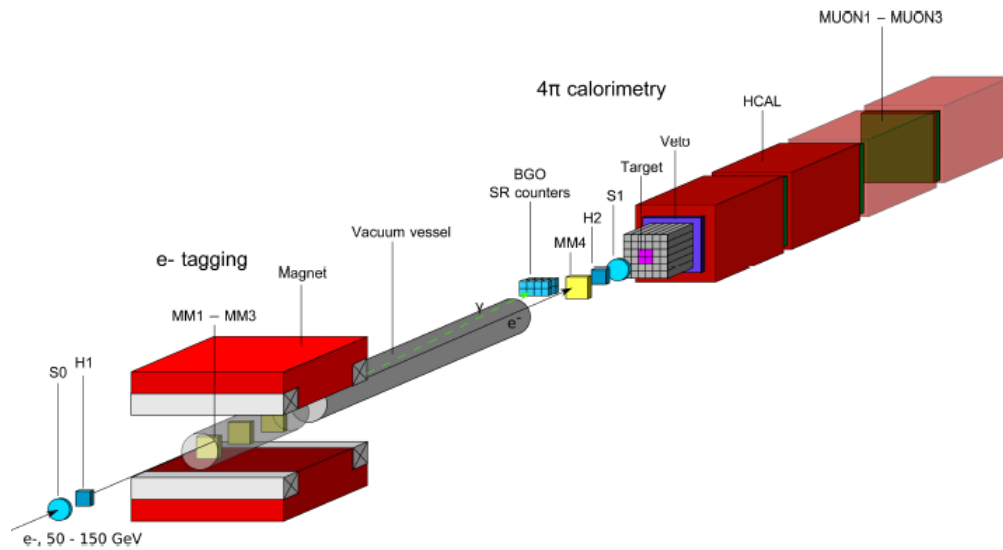


Рис. 14: Schematic representation of the NA64 installation

MicroMegas (MM) cameras, which are used to detect and determine the position, arrival time, and pulse of ionizing particles, are located inside the vacuum tube and magnet and magnet field with a voltage of 1.5 T.

Three scintillation counters S0, S1, S2 are used to determine the passage of the beam of a certain part of the trajectory and act as triggers to start recording events.

The installation uses a high-density electromagnetic calorimeter (ECAL), which is a block of $6 \times 6 \times 2$ cells to determine the primary energy of interaction of an electron with ECAL. Each cell consists of scintillator-lead layers. The longitudinal calorimeter is subdivided into a PreShower detector consisting of the first 36 cells and containing 16 layers, and the remaining 36 cells are the main part of ECAL and contain 134 layers. An important characteristic of ECAL is that the WLS fibers are helical in order to avoid energy leakage through them.

Highly effective Veto counter for identifying b- and c-hadrons and measuring the distance between the collision point (birth of b-, c-hadrons) and the point of their decay into other particles with an accuracy of 10 microns.

Two scintillation hodoscopes H1, H2, which consist of optical fibers in two planes and oriented perpendicularly, which allows you to determine the coordinates of a passing particle.

A sealed hadron HCAL calorimeter located at the lower end of the unit to detect all final products from the primary reaction in ECAL

A 15 m long vacuum tube between the magnet and ECAL prevents the absorption of synchrotron radiation photons, for subsequent detection at the end of the vacuum tube by an SRD detector consisting of an array of 8 BGO crystals.

One of the main sources of background in the experiment is associated with the possible presence of low energy in the energy distribution of the beam electrons. This tail in the energy distribution is caused by the interaction of electrons with the installation material, for example, the entrance windows of the beam lines, residual gas, etc. Another source of low-energy electrons is due to the decay of a pion or muon in the beam line. These reactions are the largest source of systematic uncertainty in the experiment. To improve the selection of primary high-energy electrons and additional suppression of the background, a high-energy tagging system using synchrotron radiation (SR) from high-energy electrons in a dipole magnet is used. In view of the high electron energy, synchrotron radiation and the electron hit the target are recorded simultaneously.

Studies conducted in 2016 on the direct search for the vector boson in the sub-GeV mass region in the NA64 experiment, SPS CERN, showed that for the statistics collected in the $4.3 \cdot 10^{10}$ events that hit the target, there are no characteristic signals the birth of a dark photon. Whence it follows that new, more stringent restrictions were obtained on the mixing constant of the dark photon A' with the electromagnetic photon $10^{-5} < \epsilon < 10^{-2}$ and mass $1 < \text{GeV}$.

Dark Photon

Parafoton

The first who suggested the existence of a hypothetical particle with properties similar to those of an electromagnetic photon was L. Okun. An ultralight hypothetical vector particle could occupy an exceptional position that would interact, like a regular photon, only with electromagnetic current, because of the electric current Neutrality experiments with ordinary matter do not give any restrictions on the coupling constants of such particles. L. Okun used a modification of electrodynamics by introducing two photons with potentials A_1 and A_2 , which are called paraphotons with masses $m_1 < m_2$ with coupling constants e_1 and e_2 . The Lagrangian in this case has the form [5]:

$$L = -\frac{1}{4} (F_{1\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} (F_{2\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} m_1^2 A_{1\mu} + \frac{1}{2} m_2^2 A_{2\mu} + j_\mu (e_1 A_{1\mu} + e_2 A_{2\mu})$$

where j_μ is the ordinary electromagnetic current.

Kinematic mixing of dark and electromagnetic photons

The standard model of particle physics describes strong, weak, and electromagnetic interactions in terms of a gauge theory based on $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ symmetries. This model is phenomenologically successful, but does not explain the origin of this symmetry. It is possible that a more complete theory of nature include additional gauge interactions. The introduction of an abelian calibration sector of the dark sector can provide a connection between the dark sector and the standard model. It is assumed that a dark photon can kinematically mix with an electromagnetic photon and thereby interact with visible matter. The mass range from MeV to several GeV is of most interest to the dark sector, since in this case it is possible to establish thermal equilibrium with dark matter and visible matter of the universe.

One of the difficulties in studying dark matter is that interactions are carried out only through gravitational interactions. It is possible to assume that there is a massive vector particle-mediator, which is responsible for the interaction between the visible sector and dark matter by kinematic mixing with an electromagnetic photon. This assumption is associated with spontaneous violation of the gauge symmetry $U(1)$. An element in the general Lagrange $\frac{1}{2}\epsilon F^{\nu\mu} F'_{\nu\mu}$ is responsible for mixing the electromagnetic and dark photon. And the general Lagrangian has the form:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\psi,A} + \mathcal{L}_{\chi,A'} + \mathcal{L}_{A,A'},$$

where $\mathcal{L}_{\psi,A}$ - lagrangian of interaction of a particle of a standard model and an electromagnetic photon:

$$\mathcal{L}_{\psi,A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eA^{\mu}) - M_{\psi} \} \psi,$$

$\mathcal{L}_{\chi,A'}$ - interaction of a dark photon and a dark fermion:

$$\mathcal{L}_{\chi,A'} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda_{M_{A'}}^2 A'_{\mu}A'^{\mu} + \bar{\chi} \left\{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - g'A'^{\mu}) - M_{\chi} \right\} \chi,$$

$\mathcal{L}_{A,A'}$ - lagrangian of interaction of dark and electromagnetic photons:

$$\mathcal{L}_{A,A'} = \frac{1}{2}\epsilon F_{\mu\nu}F'^{\mu\nu},$$

Приложение Б

Свойства матриц

Таблица 20: Основные матрицы из уравнения Дирака и их свойства

Название	Вид	Свойства
Матрицы Паули	$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\text{Sp}(\sigma_i) = 0$ $\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} I_2 \Leftrightarrow [\sigma_i, \sigma_j]^- = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k,$ $[\sigma_i, \sigma_j]^+ = 2\delta_{ij} I_2$ $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha} \rangle \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle + i \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}] \rangle$
Матрицы Σ	$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$	$\text{Sp}(\Sigma_i) = 0$ $\Sigma_i \Sigma_j = -\Sigma_j \Sigma_i$ $\Sigma_i \Sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \Sigma_k + \delta_{ij} I_2$ $\langle \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha} \rangle \langle \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \rangle + i \langle \boldsymbol{\Sigma} \cdot [\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}] \rangle$
Матрицы ρ	$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI_2 \\ iI_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho_3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$	$\rho_i \rho_j = i \varepsilon_{ijk} \rho_k + \delta_{ij} I_2$ $\rho_k \Sigma = \Sigma \rho_k$
Матрицы α	$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_0 = \rho_3$	$\alpha_\mu^+ = \alpha_\mu$ $\alpha_\mu \alpha_\nu = -\alpha_\nu \alpha_\mu$
Матрицы γ_μ	$\boldsymbol{\gamma} = -i\alpha_0 \boldsymbol{\alpha}$ $\gamma^0 = \alpha_0$ $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$	$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^+ = 2\eta^{\mu\nu} I^4$ $[\gamma^5, \gamma^\nu]^+ = 0$ $(\gamma^k)^+ = -\gamma^k$ $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$

Приложение В

В данной системе, возможно, нельзя разделять переменные так как необходимо использовать связь между 4-потенциалами электромагнитного фотона и темного фотона. Уравнение имеет вид:

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} + \lambda_{M_{A'}}^2 A'^\nu = \epsilon \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

с учетом следствия уравнений движения $\partial_\nu A'^\nu = 0$ уравнение можно переписать:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_{M_{A'}}^2 \right) A'^\nu = \epsilon \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

По своему виду данное уравнение совпадает с уравнением Клейна-Гордона-Фока. Используем функцию Грина, тогда решение можно записать в виде с учетом $\epsilon = const$:

$$A'^\nu(\mathbf{x}, t) = \epsilon \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') (\partial_\mu \partial^\mu A'^\nu(\mathbf{x}', t') - \partial_\mu \partial^\nu A'^\mu(\mathbf{x}', t')) d\mathbf{x}' dt'$$

функция Грина для данного оператора построена в приложении(только начало построения), используя ее получим выражение для 4-потенциала темного фотона.

Литература

1. Rubin V.C., Ford W. K., Thonnard N. Rotational Properties of 21 SC Galaxies With a Large Range of Luminosities and Radii, From NGC 4605 ($R=4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R=122\text{kpc}$) // *Astrophysical Journal*. — 1980. — Vol. 238. — P. 471—487.
2. Refregier A. Weak gravitational lensing by large-scale structure // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* (англ.)русск.. — Annual Reviews, 2003. — Vol. 41, iss. 1. — P. 645—668.
3. Vikhlinin, A.; et al. Chandra Sample of Nearby Relaxed Galaxy Clusters: Mass, Gas Fraction, and Mass–Temperature Relation (англ.) // *The Astrophysical Journal* : journal. — IOP Publishing, 2006. — Vol. 640, no. 2. — P. 691—709.
4. Planck Collaboration, P. A. R. Ade et. al., Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,”
5. Okun L. B. Limits on electrodynamics: paraphotons? // *Sov. Phys. JETP*. 1982. T. 56. C. 502.
6. D. Banerjee et al. (The NA64 Collaboration), Search for vector mediator of dark matter production in invisible decay mode — *Phys. Rev. D* 97, 072002 – Published 4 April 2018,
7. Lisanti M. Lectures on dark matter physics // *New Frontiers in Fields and Strings: TASI 2015 Proceedings of the 2015 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics*. – 2017. – С. 399-446.
8. S.N. Gninenko , Search for MeV dark photons in a light-shining-through-walls experiment at CERN — *Phys. Rev. D* 89, 075008 –Published 8 April 2014.
9. W.H. Furry. On bound states and scattering in positron theory. *Phys Rev*, 81:115, 1951.
10. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон // 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1983. – 304 с.
11. Holdom B. Two $U(1)$'s and epsilon charge shifts // *Phys. Lett., B*. – 1986. – Т. 166. – №. 2. – С. 196-198.
12. Гантмахер Ф. Теория матриц. // 5-е изд. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 560 с.
13. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Специальные функции. Уравнения математической физики.-2-е изд., испр. и доп // Томск: Изд-во НТЛ. – 1999.

14. Ициксон К., Зюбер Б. Квантовая теория поля, т. 1: Пер. с англ., // М.: Мир. – 1984. - 448 с.
15. Багров В. Г., Белов В. В., Трифонов А. Ю. Методы математической физики. Асимптотические методы в релятивистской квантовой механике: учебное пособие. //Томск: Изд во ТПУ. – 2006 г. - 218 с.
16. Багров В. Г., Белов В. В., Трифонов А. Ю. Методы математической физики. Асимптотические методы: учебное пособие. //Томск: Изд во ТПУ. – 2004 г. - 166 с.
17. Пескин М. Е., Шредер Д. В. Введение в квантовую теорию поля. // Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". - 2001. - 784 с.
18. Соколов А. А. Тернов И.М. Квантовая электродинамика. // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. - 312 с.
19. Иваненко Д., Соколов А. А. Классическая теория поля //М.: Гостехиздат. – 1951. – Т. 480 с.
20. et al. (NA64 Collaboration) D. Banerjee. Search for Invisible Decays of Sub- GeV Dark Photons in Missing-Energy Events at the CERN SPS // Phys.Rev. Lett. 2017. Т. 118. С. 011802.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1941.