

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СКОРОСТИ ВЕТРА НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Д.Ю. Давыдов

Научный руководитель: С.Г. Обухов
Томский политехнический университет
E-mail: dyd5@tpu.ru

Введение

Компьютерное моделирование скорости ветра является эффективным инструментом, используемым в решении задач анализа надежности, прогнозирования потенциальной выработки энергии и оценки экономической эффективности объектов ветроэнергетики.

Для моделирования временной динамики скорости ветра часто используются авторегрессионные модели, цепи Маркова, фильтры Калмана и т.д. В качестве альтернативы вышеперечисленным методам предлагаются модели на основе стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [1]. Такой подход имеет многие преимущества, в частности, относительно менее сложный математический аппарат, простота синтеза модели, а также, ввиду непрерывности стохастического процесса, возможность его временного масштабирования (изменения шага дискретизации времени с сохранением статистических характеристик) без пересчета параметров модели.

Описание моделей

В статье [1] предложена модель (далее обозначается - M1) на основе СДУ процесса Орнштейна-Уленбека с преобразованием распределения обратной функцией Вейбулла. Процесс является стационарным гауссовским марковским процессом с экспоненциальным убыванием автокорреляционной функции (АКФ). Однако АКФ реальных, протекающих в природе процессов, редко соответствует экспоненциальной функции, и авторы указывают на необходимость доработки модели для устранения данного недостатка. Для решения данной проблемы предлагается использовать обобщенную модель на основе фрактального стохастического процесса Орнштейна-Уленбека (M2) с гармонической составляющей воспроизводящей суточные вариации скорости ветра.

СДУ модели имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y(t) = \alpha \cos\left(\frac{2\pi(t-t_{\text{пик}})}{24}\right) \\ dx(t) = \left[\frac{dy(t)}{dt} + \theta(y(t) - x(t)) \right] dt + \sigma dW_t^H \end{cases}$$

где θ, σ - параметры характеризующие скорость убывания АКФ и дисперсию приращений;

α - параметр амплитуды суточных колебаний;

dW_t^H - приращения фрактального гауссовского шума с параметром Херста ($0,5 < H < 1$);

При $H=1/2$ модель эквивалентна предложенной в статье [1] (АКФ убывает экспоненциально). Если $H>1/2$ приращения процесса имеют положительную корреляцию (АКФ процесса убывает по степенному закону) [2].

Для трансформации нормально распределенных реализаций процесса в последовательность с распределением, соответствующим распределению исходного временного ряда выполняется обратное преобразование:

$$v(t) = F_w^{-1}[\Phi(x(t))]$$

где $F_w^{-1}(x, c, k)$ - функция обратного распределения Вейбулла с параметрами масштаба (c) и формы (k); $\Phi(x)$ - функция нормального распределения.

Оценка параметров моделей

Оценка параметров моделей произведена с использованием статистических данных наблюдений скорости ветра 300 метеостанций из электронного архива ВНИИГМИ-МЦД.

По найденной методом агрегированной дисперсии [5] оценке параметра Херста ($H>1/2$) можно оценить параметры СДУ ($\hat{\theta}, \hat{\sigma}$) по дискретной последовательности наблюдений (X) пользуясь следующими выражениями [3,4]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (X_{(i+1)} - X_i)^2}{(n-1) \cdot h^{2H}}$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n \hat{\sigma}^2 H \Gamma(2H)} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{\frac{1}{2H}}$$

где n - размер выборки; h - шаг дискретизации выборочных данных, ч.

Параметр амплитуды суточных колебаний (α) определяется путем аппроксимации среднесуточного профиля хода скорости ветра:

$$\sum_{i=1}^N \left(\bar{X}_i - \alpha \cos\left[\frac{2\pi \cdot (t_i - t_{\text{пик}})}{24}\right] \right) \rightarrow \min$$

где \bar{X}_i - среднее значение скорости в i -ый срок наблюдения, м/с; $t_{\text{пик}}$ - время среднесуточного максимума скорости ветра, ч.

Сравнительный анализ моделей

Оценка адекватности и сравнение моделей осуществляется по результатам моделирования $N=100$ траекторий стохастического процесса. В алгоритме генерирования фрактального гауссовского шума (ФГШ) использовался метод циркулянтного вложения [6].

Для сравнения моделей использовались следующие критерии [7]:

1) Корень среднеквадратической ошибки регрессионных остатков модели (RMSE);

2) Информационный критерий Акаике и Байесовский информационный критерий (AIC, BIC);

3) Коэффициент детерминации АКФ и суточного профиля (R2АКФ, R2СП);

4) Ошибка прогнозирования среднегодовой мощности ВЭУ и выработки энергии (PMAE, WMAPE).

Результаты сравнения моделей сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Средние значения критериев по результатам тестирования моделей на основе данных 300 метеостанций

Критерий \ Модель	M1	M2
RMSE	3,3403	3,2909
AIC	3,3906	3,3346
BIC	3,3915	3,3361
$R^2_{\text{АКФ}}$	0,1700	0,9348
$R^2_{\text{СП}}$	0,0000	0,9299
PMAE	0,3549	0,3549
WMAPE, %	6,1882	6,0759

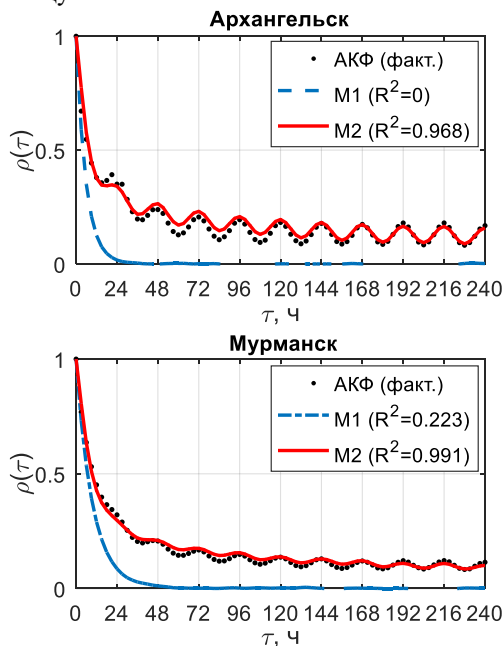


Рис. 1. АКФ моделей скорости ветра

Согласно полученным графикам АКФ (рисунок 1) видно, что в АКФ модели (M2) наиболее близка к АКФ фактических данных. Модель достаточно адекватно воспроизводит циклические суточные изменения скорости ветра, что визуально можно оценить по рисунку 2. Значения RMSE регрессионных остатков, AIC и BIC в обоих случаях минимальны для данной модели. Ошибка прогнозирования среднегодовой энергии для всех моделей не превышает 10%.

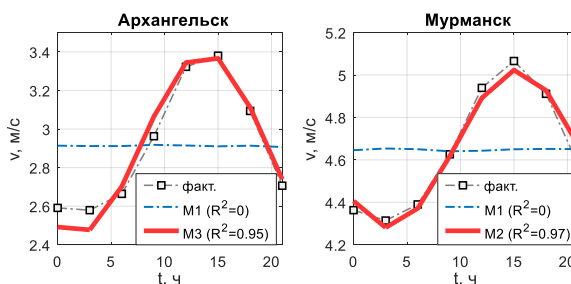


Рис. 2. Суточные профили скорости ветра

Заключение

В данном исследовании предложен метод моделирования временной динамики скорости ветра с использованием стохастических дифференциальных уравнений стационарного процесса с приращениями фрактального гауссовского шума. По результатам сравнения фрактальная модель на основе процесса Орнштейна-Уленбека с гармонической составляющей (M2) является наиболее адекватной, согласно принятым критериям оценки.

Список использованных источников

- Zarate-Miñano R., Anghel M., Milano F. Continuous wind speed models based on stochastic differential equations // Applied Energy. – 2013. – Vol. 104. – P.42-49.
- Lysy M., Pillai N.S., Statistical inference for stochastic differential equations with memory // ArXiv [Электронный ресурс] – ArXiv: arXiv:1307.1164v1 – 2017 – URL: <https://arxiv.org/abs/1307.1164v1>
- Su Y., Wang Y. Parameter estimation for fractional diffusion process with discrete observations // Journal of function spaces. – 2019. – P.1-6
- Hu Y., Nualart D. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes // Statistics and probability letters. – 2010. – Vol. 80. – P.1030-1038
- Taqqu M.S., Teverovsky V., Willinger W. Estimators for long-range dependence: an empirical study // Fractals. – 1995. – Vol. 4. – № 4. – P.785-798.
- Perrin E., et al. Fast and exact synthesis for 1-D fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises // IEEE Signal Processing letters. – 2002. – Vol. 9. – № 11. – P.382-384.
- Wilks D.S. Statistical methods in the atmospheric sciences / D.S. Wilks. – 2nd ed. Elsevier, 2006. – P.649.