

Ларионов Дмитрий Сергеевич

**ОБРАТНЫЙ МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ ВЫВОДИМОСТИ ДЛЯ
АВТОЭПИСТЕМИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ
В ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМАХ**

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации
(отрасль: информация и информационные системы)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

В печать
Уг. секретарь ТД
11.11.05

Работа выполнена в Томском политехническом университете

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор В.К. Погребной

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор В.А. Силич

кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Бурлуцкий

Ведущая организация:

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 21 декабря 2005г. в 15 ч. на заседании диссертационного совета Д212.269.06 при Томском политехническом университете по адресу: 634034, г.Томск, ул.Советская, 84, институт «Кибернетический центр» ТПУ, ауд.214.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского политехнического университета по адресу: 634034, г. Томск, ул. Белинского, 53.

Автореферат разослан «18» ноября 2005г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

к.т.н., доцент

М.А. Сонькин

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В последнее время интенсивно рассматриваются вопросы автоматизации процессов получения решений компьютерными программами – это связано не только с классическими задачами искусственного интеллекта доказательства теорем и построения советующих экспертных систем, но и с бурным развитием и внедрением в производственный процесс корпоративных информационных ERP–систем, CRM–систем, программ управления технологическими процессами, задач извлечения данных и знаний: анализ данных, анализ документов, поиск по смыслу в Internet, распознавание текста и т. д. Несмотря на то, что для решения указанных вопросов успешно применяются такие технологии, как нейронные сети, семантические сети и фреймы, набирает рост и интерес к традиционному логическому методу хода рассуждений за счет привлечения неклассических модальных логик. Наличие большого числа эвристик в рассуждениях соответствующих систем, их неспособность всегда четко обосновать свое решение ставят под сомнение применение нелогических способов рассуждений. В свою очередь, вывод, опирающийся на одну из модальных логик, сохраняет строгость и обоснованность классических аксиоматических систем вывода, однако при этом он гибок за счет наличия операторов $\Box$ (необходимости) и $\Diamond$ (возможности). Так же многие модальные логики обладают свойством немонотонности, позволяющим пересматривать свои выводы в процессе рассуждения. В частности, проблему построения доказательства заданного целевого утверждения для экспертной системы можно свести к проблеме поиска вывода формул определенного логико-математического языка в соответствующем исчислении. Имеются многочисленные работы, как в области теории логического вывода в классическом исчислении предикатов и теории разрешимых фрагментов этого исчисления, так и в области практического построения алгоритмов программ автоматического поиска вывода. Однако для успешной практической формализации желательно, чтобы методика построения алгоритмов автоматического поиска вывода допускала расширение на различные неклассические системы. Большой интерес представляют разнообразные модальные системы, которые позволяют описывать такие понятия

предметной области, как «необходимо», «возможно», «известно» и ряд других. Большинство предлагаемых алгоритмов поиска вывода основано на теореме Эрбрана, формулирующей необходимые и достаточные условия выводимости формулы. Однако практическая реализация с помощью данной теоремы приводит к порождению большого числа излишних дизъюнктивных членов. Существует множество методов, сокращающих поиск доказательства. Одновременно с методом резолюций Д.А. Робинсона и независимо от него С.Ю. Масловым был предложен «обратный метод» поиска вывода. Он дает возможность целенаправленно, опираясь на конкретные особенности доказуемой формулы, ограничить перебор, возникающий при непосредственном применении теоремы Эрбрана и получить вывод более экономным способом. На данный момент существует целый ряд реализаций программ автоматического поиска доказательств на основе неклассических логик, основанных, как правило, на методе резолюций или его модификациях. В то же время, наиболее эффективная программа автоматического поиска доказательства, основанная на обратном методе – система K -обратное K – была реализована в 1999г. А.Воронковым. Помимо этого существует целый ряд работ Т.Таммета и Г.Минца, посвященных реализации обратного метода для таких неклассических логик, как $S4$, линейной и интуиционистской логик. В работе В.В.Бурлуцкого 2001 года рассмотрено применение системы KT (или «логики знания») в качестве основы для обратного метода установления выводимости.

Следует отметить, что до сих пор в указанном выше контексте подробно не была рассмотрена такая важная неклассическая система, как $S5$ или автоэпистемическая логика. Эта логика обладает важным свойством немонотонности, в ее рамках рассуждения интроспективны и идеально-разумны. В ней модальный оператор $\Box$ принимает значение «предполагается», а оператор $\Diamond$ – «обратное не предполагается». Такая трактовка оператора необходимости позволяет нам говорить о широком спектре применимости экспертных систем, логической моделью машины вывода которых является логика $S5$ и позволяет рассчитывать в дальнейшем на возможность перехода к оперированию «персонифицированными» знаниями.

В связи с вышеизложенным возникает актуальная проблема построения разрешающей процедуры для автоэпистемической логики, основанной на обратном методе. В случае удачного разрешения этой проблемы мы получим теоретическое обоснование реализации машины вывода для базы знаний экспертной системы, формализуемой при помощи логической системы *S5*. Программы автоматического поиска доказательства, основанные на обратном методе, начали интенсивно разрабатываться лишь в последние несколько лет, однако уже сейчас они успешно конкурируют с традиционными, о чем говорят результаты экспериментов проведенных с системой *K*-обратное *K*.

Цель работы и задачи диссертации. Проблема построения механизма вывода для экспертных систем (ЭС), прежде всего, связана с наличием неопределенности в фактах, используемых системой. В работе Ларионова Д.С. и Новосельцева В.Б. (2002г.) рассмотрена оболочка ЭС с прямым и обратным выводом, использующая *коэффициенты определенности* (КО) относительно фактов, с которыми она работает; имеется также ее реализация на языке логического программирования Visual Prolog. Несмотря на то, что КО вычисляются, отчасти, на основе теории условной вероятности, рассуждения и вывод оболочки имеют эвристическую составляющую, которая не всегда четко обозначена, и не каждый раз получена достоверным способом. Применение КО можно заменить математически обоснованным выводом с применением модальной логики, хотя в ее контексте в противовес классической логике понятие *общезначимости* зачастую заменяется понятием *выполнимости*, так как автоэпистемическая логика формализует эволюционирующие рассуждения немонотонного типа.

Целью диссертационной работы является построение механизма вывода экспертных систем, работающих в различных проблемных областях, в частности прогнозировании и проектировании. Для этого следует построить алгоритм обратного метода установления выводимости, основанного на автоэпистемической логике. Также следует практически реализовать указанный метод в виде программного модуля.

Для реализации поставленной цели следует решить следующий комплекс задач:

- Исследование синтаксиса и семантики автоэпистемической логики, а также ее свойств: полноты, легальности, устойчивости и т.д.
- Построение исходного секвенциального исчисления, обратного исчисления секвенций автоэпистемической логики, а также доказательство соответствующих теорем полноты – ключевого свойства любой аксиоматической системы вывода, гарантирующего корректность вывода.
- Построение исчислений путей для исходного и обратного секвенциальных исчислений. Исчисления путей кодируют вывод в базовых исчислениях и требуются для практического применения метода. Доказательство соответствующих теорем полноты.
- Выявление и описание стратегий сокращения пространства поиска вывода, таких как:
 - избавление от избыточных секвенций;
 - введение понятия упорядочения вывода, в зависимости от структуры доказуемой формулы;
 - использование понятия предпосылки для удаления предпосылающих секвенций.
- Формулировка общего алгоритма установления выводимости.
- Практическая реализация указанного выше алгоритма и демонстрация его использования.

Методы построения алгоритма и исследований. При построении алгоритма установления выводимости, исследований свойств построенных исчислений, разработке программного обеспечения использованы методы теории классической логики высказываний и предикатов первого порядка, теории немонотонных модальных логик, теории вероятности, теории множеств и мультимножеств, теории графов, теории алгоритмов, теории объектно-ориентированного проектирования и программирования.

Научную новизну полученных в работе результатов определяют:

1. Реализация алгоритма обратного метода установления выводимости для автоэпистемической логики согласно общей схеме указанного метода для неклассических логик.
2. Построение базового и обратного исчислений секвенций для автоэпистемической логики. Доказательство фундаментального свойства полноты соответствующих исчислений.
3. Построение исчислений путей для автоэпистемической логики. Доказательство фундаментального свойства полноты соответствующих исчислений.
4. Применение и адаптация алгоритмов стратегий сокращения пространства поиска вывода логик K и KT для автоэпистемической логики $KT45 (S5)$.

Практическая ценность заключается в следующем:

1. Возможность использования указанного метода в качестве механизма вывода экспертной системы для широкого класса задач, так как он основан на эволюционирующих, немонотонных рассуждениях, что является неотъемлемой частью работы экспертных систем.
2. Способность совместного применения методов движения по дереву вывода, таких как «сверху-вниз» и «снизу-вверх», что дает возможность использовать частные свойства конкретного доказываемого или проверяемого факта экспертной системы.
3. Построение программного модуля «Система проверки утверждений на основе модального вывода», реализующего алгоритм обратного метода установления выводимости. Модуль реализован в визуальной среде разработки Delphi 7.0 на объектно-ориентированном языке Object Pascal и функционирует под управлением операционной системы Windows 2000.
4. Примером реализации вышеуказанного модуля является его использование в Отделении ПФР по Томской области для оценивания гипотез актуарных расчетов, а также на заводе ОАО «Манотомь» для логического анализа производственной мощности предприятия. Внедрение подтверждено соответствующими документами.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Реализация алгоритма обратного метода установления выводимости для автоэпистемической логики.

2. Предложенные прямое и обратное исчисления секвенции на основе автоэпистемической логики для проверки выводимости формул. Теоремы полноты этих исчислений с доказательством.
3. Приспособленные специально для практического применения метода обратной выводимости прямое и обратное исчисления путей. Теоремы полноты этих исчислений с доказательством.
4. Различные стратегий сокращения пространства поиска вывода. Алгоритм Φ -упорядочения. Теоремы полноты для исчислений с учетом всех стратегий с доказательством.
5. Практическое применение алгоритма обратного метода установления выводимости и вывода на основе автоэпистемической логики: «Система проверки утверждений на основе модального вывода». Области ее применения, подтвержденные соответствующими заключениями.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- Девятый Российско-Корейский международный симпозиум по науке и технологиям (The Eights Korea-Russian International Symposium on Science and Technology) «KORUS 2005» (г. Новосибирск, НГТУ, 26 июня – 2 июля 2005 г.).
- Одиннадцатая международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Москва-Истра, РОССИЯ, Московский авиационный институт (Технический университет) 2-7 июля 2001 г.).
- XXIII Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им М.В.Ломоносова (г. Москва, МГУ, 9-14 апреля 2001 г.).
- XXII Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им М.В.Ломоносова (г. Москва, МГУ, 17-22 апреля 2000г.).
- XXXVIII Конференция «Научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, НГУ, 2-5 апреля 2000г.).
- IV межвузовская конференция аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (г. Томск, ТГПУ, 24-29 апреля 2000г.).

- III межвузовская конференция «Математика: ее содержание, методы и значение» (г. Томск, ТГУ, 23-29 апреля 2001г.).

По результатам работы имеется 10 публикаций, в том числе 2 статьи в реферируемых отечественных изданиях (Математическое Моделирование и Известия Томского Политехнического Университета).

Личный вклад.

1. Автором предложено использование в качестве механизма вывода автоэпистемической логики. Ранее в различных работах был рассмотрен подход, основанный на менее выразительных логиках K и KT (логика знания). В связи с этим исследованы свойства системы $S5$ и выделены ее отличительные черты, например, немонотонность.
2. На систему $S5$ автором успешно спроецированы базовые и обратные системы исчислений секвенций, исчислений путей, ранее известные своим применением на логиках K и KT . Построены соответствующие системы исчислений $S5_{Seq}$, $S5^{\Phi}_{Inv}$, $S5^{\Phi}_{Path}$ и $S5^{\Phi}_{IP}$.
3. Автор исследовал свойства исчислений $S5_{Seq}$, $S5^{\Phi}_{Inv}$, $S5^{\Phi}_{Path}$, $S5^{\Phi}_{IP}$ и математически строго доказал их главное фундаментальное свойство – полноту, что дает уверенность в том, что механизм вывода экспертной системы, построенный на основе исчисления $S5_{Seq}$ ($S5^{\Phi}_{Inv}$), будет давать корректные результаты.
4. С целью сокращения пространства поиска вывода для системы $S5$ автором приспособлены различные критерии избыточности, ранее применяемые для систем K и KT . В зависимости от применения конкретного критерия получаются различные исчисления $S5^{\Phi,*}_{IP}$, $S5^{\Phi,\prec}_{IP}$, $\{S5^{\Phi,\prec}_{IP}\}$, для которых доказаны теоремы полноты. Как промежуточный результат, автором получен алгоритм Φ -упорядочения, применение которого существенно сокращает длину вывода.
5. На объектно-ориентированном языке программирования *Delphi 7.0* автором реализован модуль «Система проверки утверждений на основе модального вывода», работающий на основе полученных в диссертации алгоритмов, указаны примеры его применения. Данный модуль в качестве составной части может быть включен в механизм вывода экспертной системы.

6. Автором получен общий алгоритм обратного метода установления выводимости для автоэпистемической логики.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников из 87 наименований и шести приложений. Объем основного текста диссертации составляет 119 страниц машинописного текста.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы в данном научном направлении, формулируется цель и задачи исследования, указывается научная и практическая новизна диссертации, очерчивается круг родственных по теме работ и приводится краткое содержание работы по главам.

В первой главе описывается модальная система $S5$, называемая автоэпистемической логикой. Затем вводится понятие мультимножества и исчисления секвенций. Далее строятся $S5_{Seq}$ – прямое исчисление секвенций и $S5^{\Phi}_{Inv}$ – обратное исчисление секвенций на основе автоэпистемической логики.

Суть автоэпистемической логики раскрывается путем описания ее синтаксиса и семантики, указываются аксиомы, составляющие систему $S5$. С помощью модели Крипке (W, R, V) показывается семантическая полнота автоэпистемической логики и ее легальность относительно множества основных предположений. Рассматривается также ее важнейшее свойство немонотонности, позволяющее механизму вывода ЭС, основанном на аксиомах и правилах логики $S5$, вести эволюционирующие рассуждения.

Предлагаемая реализация обратного метода для логической системы $S5$ основана на исчислении путей, впервые описанном А.Воронковым в 2000г. Далее это исчисление путей было распространено на «логику знания» KT В.В.Бурлуцким в 2001г.

Пусть Φ – данная формула логики $S5$. Для поиска доказательства Φ мы будем использовать не саму систему $S5$, а эквивалентное ей исчисление секвенций $S5_{Seq}$. Схематично это секвенциальное исчисление задано на рисунке 1.

Аксиомы: $\Gamma, p, \sim p$. **Правила вывода:**

$$\begin{array}{llll} \frac{\Gamma, A, B}{\Gamma, A \wedge B} (\wedge); & \frac{\Gamma, A \quad \Gamma, B}{\Gamma, A \vee B} (\vee); & \frac{\Gamma, A}{\Box \Gamma, \Diamond A, \Delta} (\Diamond); & \frac{\Gamma, A}{\Gamma, \Box A} (\Box). \\ \frac{\Gamma, \Box A}{\Gamma, \Box \Box A} (4); & \frac{\Gamma, \Diamond A}{\Gamma, \Box \Diamond A} (5). \end{array}$$

Рисунок 1. Исчисление секвенций $S5_{seq}$.

Доказывается следующая теорема полноты для исчисления секвенций.

Теорема полноты $S5_{seq}$. Формула Φ системы $S5$ является невыполнимой тогда и только тогда, когда она имеет опровержение в $S5_{seq}$.

Поиск опровержения мы переносим в «обратное» исчисление $S5^{\Phi}_{Inv}$, которое зависит от целевой формулы Φ . Схематично $S5^{\Phi}_{Inv}$ задано на рисунке 2.

Аксиомы: $p, \sim p$. **Правила вывода:**

$$\begin{array}{llll} \frac{\Gamma, A, A}{\Gamma, A} (C); & \frac{\Gamma, A \quad \Delta, B}{\Gamma, \Delta, A \vee B} (\vee); & \frac{\Gamma, A}{\Gamma, A \wedge B} (\wedge_l); & \frac{\Gamma, B}{\Gamma, A \wedge B} (\wedge_r); \\ \frac{\Gamma, A}{\Box \Gamma, \Diamond A} (\Diamond); & \frac{\Gamma}{\Box \Gamma, \Diamond A} (\Diamond+); & \frac{\Gamma, A}{\Gamma, \Box A} (\Box); & \\ \frac{\Gamma, \Box A}{\Gamma, \Box \Box A} (4); & \frac{\Gamma, \Diamond A}{\Gamma, \Box \Diamond A} (5). \end{array}$$

Рисунок 2. Исчисление секвенций $S5^{\Phi}_{Inv}$.

Заметим, что не любая невыполнимая секвенция имеет опровержение в $S5^{\Phi}_{Inv}$, поэтому непосредственное доказательство теоремы полноты для $S5^{\Phi}_{Inv}$ невозможно. Для доказательства полноты $S5^{\Phi}_{Inv}$ мы используется лемма подсеквенциальности, которая позволяет перенести поиск опровержения Φ в исчисление $S5^{\Phi}_{Inv}$.

Лемма подсеквенциальности для $S5^{\Phi}_{Inv}$. Пусть Φ – формула $S5$ и Γ – секвенция, состоящая из подформулы Φ и имеющая опровержение в $S5_{seq}$, тогда существует секвенция Δ такая, что $\Delta \subseteq \Gamma$ и Δ имеет опровержение в $S5^{\Phi}_{Inv}$.

Далее доказывается следующая теорема полноты.

Теорема полноты $S5^{\Phi}_{Inv}$. Формула Φ системы $S5$ является невыполнимой тогда и только тогда, когда она имеет опровержение в $S5^{\Phi}_{Inv}$.

Во второй главе рассматривается прямое исчисление путей $S5^{\Phi}_{Path}$, поиск дерева вывода в котором технически проще и нагляднее, чем в $S5_{seq}$. Аналогично, для $S5^{\Phi}_{Inv}$ вводим обратное исчисление путей $S5^{\Phi}_{IP}$. Для этих целей вводятся определения *пути* и *подформулы*.

Исчисление путей $S5^{\Phi}_{Path}$ схематически задано на рисунке 3.

Аксиомы: Γ, π_1, π_2 . **Правила вывода:**

$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma, \pi_{\wedge_l}, \pi_{\wedge_r}}{\Gamma, \pi} (\wedge); \quad \frac{\Gamma, \pi_{\vee_l}, \Gamma, \pi_{\vee_r}}{\Gamma, \pi} (\vee); \quad \frac{\Pi_{\square}, \pi_{\diamond}}{\Gamma, \Pi, \pi} (\diamond); \quad \frac{\Pi_{\square}, \pi_{\square}}{\Pi, \pi} (\square); \\ \frac{\Pi_{\square\square}, \pi_{\square\square}}{\Pi_{\square}, \pi_{\square}} (4); \quad \frac{\Pi_{\square\diamond}, \pi_{\square\diamond}}{\Pi_{\square}, \pi_{\square}} (5). \end{array}$$

Все пути, входящие в секвенции путей ($\Pi = \pi_1, \dots, \pi_n$, и $\Pi_{\square} = \pi_{\square 1}, \dots, \pi_{\square n}$) являются Φ -путями. В аксиомах $p = \Phi / \pi_1$, $\sim p = \Phi / \pi_2$, для некоторой пропозициональной переменной p .

Рисунок 3. Исчисление путей $S5^{\Phi}_{Path}$.

Определение. Образом формул последовательности путей или дерева вывода в $S5^{\Phi}_{Path}$ называется соответственно последовательность выводов или дерево вывода, полученное из первоначальных заменой каждого пути π на формулу Φ / π .

Для доказательства теоремы полноты $S5^{\Phi}_{Path}$ необходима следующая лемма (в работе приводится с доказательством).

Лемма бимоделирования для $S5^{\Phi}_{Path}$

1. Пусть D – дерево вывода пустого пути в $S5^{\Phi}_{Path}$. Тогда образ D' формул из D является деревом вывода формулы Φ в $S5_{Seq}$;
2. Пусть D' – дерево вывода секвенции $A_1, \dots, A_n$ в $S5_{Seq}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n$ – такие пути, что $\Phi / \pi_i = A_i$, $\forall i = 1, n$. Тогда существует дерево вывода D для $\pi_1, \dots, \pi_n$ в $S5^{\Phi}_{Path}$ такое, что D' является образом формул дерева вывода D .
3. Пункты 1 и 2 справедливы, если везде “дерево вывода” заменить на “опровержение”.

Далее доказывается теорема полноты для $S5^{\Phi}_{path}$.

Теорема полноты для $S5^{\Phi}_{Path}$. Формула Φ логики $S5$ невыполнима тогда и только тогда, когда пустой путь ε имеет опровержение в $S5^{\Phi}_{Path}$.

Обратный вариант исчисления путей, полученный из $S5^{\Phi}_{Inv}$ указан на рисунке 4.

Аксиомы: π_1, π_2 . **Правила вывода:**

$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma, \pi_{\wedge_l}}{\Gamma, \pi} (\wedge_l); \quad \frac{\Gamma, \pi_{\wedge_r}}{\Gamma, \pi} (\wedge_r); \quad \frac{\Gamma, \pi_{\vee_l}, \Delta, \pi_{\vee_r}}{\Gamma, \Delta, \pi} (\vee); \quad \frac{\Gamma, \pi, \pi}{\Gamma, \pi} (C) \\ \frac{\Gamma_{\square}}{\Gamma, \pi} (\diamond+); \quad \frac{\Pi_{\square}, \pi_{\diamond}}{\Pi, \pi} (\diamond); \quad \frac{\Pi_{\square}, \pi_{\square}}{\Pi, \pi} (\square); \\ \frac{\Pi_{\square\square}, \pi_{\square\square}}{\Pi_{\square}, \pi_{\square}} (4); \quad \frac{\Pi_{\square\diamond}, \pi_{\square\diamond}}{\Pi_{\square}, \pi_{\square}} (5). \end{array}$$

Рисунок 4. Обратное исчисление путей $S5^{\Phi}_{IP}$

Для $S5^{\Phi}_{IP}$, так же как и для $S5^{\Phi}_{Path}$, справедливы лемма бимоделирования и теорема полноты:

Лемма бимоделирования для $S5^{\Phi}_{IP}$

1. Пусть D – дерево вывода в $S5^{\Phi}_{IP}$. Тогда образ D' формул D является деревом вывода формулы Φ в $S5^{\Phi}_{Inv}$.

2. Пусть D' – дерево вывода секвенции $A_1, \dots, A_n$ в $S5^{\Phi}_{Inv}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n$ – такие пути, что $\Phi / \pi_i = A_i$, $\forall i = 1, n$. Тогда существует дерево вывода D для $\pi_1, \dots, \pi_n$ в $S5^{\Phi}_{IP}$ такое, что D' является образом формул дерева вывода D .

3. Пункты 1 и 2 справедливы, если везде “дерево вывода” заменить на “опровержение”.

Теорема полноты $S5^{\Phi}_{IP}$. Формула Φ из системы $S5$ невыполнима тогда и только тогда, когда пустой путь ε имеет опровержение в исчислении $S5^{\Phi}_{IP}$.

В третьей главе исследуются свойства исчисления $S5^{\Phi}_{Path}$ и свойства деревьев вывода в $S5^{\Phi}_{Path}$, которые в дальнейшем помогают избавиться от избыточных секвенций в пространстве поиска вывода, тем самым, сократив его.

Определение. Модальная длина пути – число вхождений модальных операторов $\Diamond$ и $\Box$ в путь.

Также в работе вводятся понятия префикса пути и собственного префикса пути.

Лемма о секвенциях, свободных от префиксов. Любая последовательность путей, входящая в дерево вывода пустого пути ε является свободной от префиксов.

Для доказательства соответствующих фактов относительно секвенций в исчислениях $S5^{\Phi}_{Path}$, $S5^{\Phi}_{Inv}$ вводятся определения ромбобразделенных путей и путей, образующих $\vee$ -вилку. Также определяется противоречивая пара путей.

Лемма о секвенциях, образующих $\vee$ -вилку. Пусть Π – последовательность путей, входящая в дерево вывода ε в $S5^{\Phi}_{Path}$. Тогда не существует пары путей π_1 и π_2 в Π , образующих $\vee$ -вилку.

Лемма о ромбобразделенных путях. Пусть Π – последовательность путей, входящая в дерево вывода ε в $S5^{\Phi}_{Path}$. Тогда в Π не существует ромбобразделенной пары путей π_1, π_2 .

Определение. Обозначим через $S5^{\Phi,*}_{IP}$ исчисление, полученное из $S5^{\Phi}_{IP}$:

- удалением всех секвенций путей, содержащих пути различной модальной длины;
- удалением всех секвенций путей, содержащих противоречивую пару путей.

Во введенном исчислении $S5^{\Phi,*}_{IP}$ справедлива следующая лемма.

Лемма подсеквенциальности для $S5^{\Phi,*}_{IP}$. Пусть D – опровержение ε в $S5^{\Phi}_{Path}$, I – вывод в D в виде:

$$\frac{\Gamma_1 \dots \Gamma_n}{I},$$

и пусть даны последовательности путей $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ такие, что каждая Δ_i есть подпоследовательность Γ_i . Тогда существует дерево вывода D' для Δ в $S5^{\Phi,*}_{IP}$ из $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ такое, что Δ является подпоследовательностью Γ .

Теорема полноты $S5^{\Phi,*}_{IP}$ (Обратного метода с избыточностями). Формула Φ системы $S5$ невыполнима тогда и только тогда, когда пустой путь ε имеет опровержение в исчислении $S5^{\Phi,*}_{IP}$.

Доказательство последней теоремы подтверждает правомерность удаления всех избыточных секвенций путей в процессе построения вывода целевой формулы Φ .

Далее рассматривается такой прием сокращения пространства поиска как Φ -упорядочение. Сначала вводится отношение упорядочения на множестве всех Φ -путей. Метод резолюции со стратегией упорядочения для классической логики упорядочивает литеры в дизъюнктах и затем требует, чтобы правило резолюций применялось только тогда, когда наибольшие литералы в обоих дизъюнктах были разрешимы. Подобные ограничения вводятся на построение деревьев вывода для модальной логической системы $S5$. Классическое упорядочивание литер преобразовывается для модального случая, и называется Φ -упорядочением.

Определение. Два пути называются братьями, если один из них имеет вид $\pi \wedge_i$, а другой – $\pi \vee_i$, либо один имеет вид $\pi \vee_i$, а другой – $\pi \wedge_i$.

Договоренность. В дальнейшем тексте работы символом x обозначают любой из символов $\wedge$ или $\vee$; символом $*$ – любой из символов r или l ; символом $\boxdot$ любой из символов $\square$ или $\diamond$.

Определение. Для заданной формулы Φ назовем Φ -упорядочением любое отношение полного порядка $\succ$ на множестве всех Φ -путей, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\pi_1 \succ \pi_2$, всякий раз когда
 - а) модальная длина π_1 строго больше модальной длины π_2 , или
 - б) π_1 и π_2 имеют одинаковую модальную длину, последний символ π_1 – x_* , а последний символ π_2 – $\boxdot$ или
 - в) π_1 и π_2 имеют одинаковую модальную длину и $\pi_2 \sqsubseteq \pi_1$ или
 - д) если π_1 и π_2 имеют одинаковую модальную длину, и последний символ π_1 – x_* , последний символ π_2 – x_* , при этом неверны оба утверждения $\pi_2 \sqsubseteq \pi_1$ или $\pi_1 \sqsubseteq \pi_2$, но π_1 имеет большую обычную длину, чем π_2 .

2. Не существует пути между двумя братьями, то есть не существует Φ -путей π_1, π_2, π_3 таких, что $\pi_1 \succ \pi_2 \succ \pi_3$ и π_1, π_3 – братья.

Поясним содержательную составляющую определения отношения порядка $\succ$. Вначале применяются правила к формулам, большим относительно порядка $\succ$.

Кроме того, отношение $\succ$ требует, чтобы заключение любого правила было меньше, чем любая его предпосылка в мультимножественном упорядочении на секвенциях, индуцированных $\succ$. Условие 1a в определении порядка $\succ$ гарантирует, что заключение правила вывода меньше посылки при применении правил $(\diamond)$, $(\diamond+)$, $(\square)$, (4), (5). Условие 1b введено для того, чтобы применение $(\diamond)$, $(\diamond+)$, $(\square)$, (4), (5) к секвенции, содержащей путь πx_* не дало неполное исчисление. Условия 1c, 1d и 2 являются не только техническими и служат для облегчения доказательств утверждений этого параграфа, но и однозначно определяют любые два пути по отношению порядка $\succ$ на практике, в частности, в механизме работы программы «Система проверки утверждений на основе модального вывода».

АЛГОРИТМ Φ -УПОРЯДОЧЕНИЯ. Для упорядочения путей предложен следующий алгоритм.

1. Первоначально M_i определяется как множество путей в формуле Φ модальной длины i .
2. Для всех M_i , исключая последнее, делаем
 - 2.1 пусть $\pi_1, \dots, \pi_n$ – все пути в M_i , заканчивающиеся $\boxplus$;
 - 2.2 разбиваем M_i на $M_i - \{\pi_1, \dots, \pi_n\} \succ \{\pi_1\} \succ \dots \succ \{\pi_n\}$;
 - 2.3 разбиваем M_0 в $M_0 - \{\varepsilon\} \succ \{\varepsilon\}$;
3. Пока существуют M_i с более чем одним членом, делаем
 - 3.1 пусть πx_l и πx_r – два брата в M_i такие, что $\pi \notin M_i$;
 - 3.2 пусть N и U – множества всех префиксов соответственно из πx_l и πx_r ;
 - 3.3 разбиваем M_i в $M_i - (N \cup U) \succ U \succ N \succ \{\pi x_r\} \succ \{\pi x_l\}$.

Когда алгоритм завершится, секвенция состоит из одноэлементных множеств. В этом случае мы допускаем, что $\pi \succ \pi'$, если секвенция имеет вид $\dots \{\pi\} \succ \dots \succ \{\pi'\} \dots$.

Лемма Любое упорядочение, полученное алгоритмом упорядочения на формуле Φ является Φ -упорядочением.

Следствие. Φ -упорядочение существует.

Понятие Φ -упорядочения введено для того, чтобы доказать существование опровержения в определенной форме, связанной с этим упорядочением, и поэтому оно сокращает пространство поиска вывода таких опровержений.

Договоренность. Пусть π – путь, Γ – секвенция путей. Запись $\pi \succ \Gamma$ сокращает утверждение, что $\pi \succ \pi'$ для каждого π' из Γ .

Определение. $(\vee)$ -вывод в $S5^\Phi_{Path}$:

$$\frac{\Gamma, \pi \vee_l \quad \Gamma, \pi \vee_r}{\Gamma} (\vee)$$

будем называть относящимся к Φ -упорядочению « $\succ$ », если $\pi \vee_l \Gamma$ и $\pi \vee_r \Gamma$. Аналогично вводится понятие $(\wedge)$ -вывода, относящегося к « $\succ$ ».

Определение. Дерево вывода в $S5^\Phi_{Path}$ будем называть относящимся к « $\succ$ », если каждый $(\wedge)$ и каждый $(\vee)$ вывод из этого дерева относится к « $\succ$ ».

Лемма о существовании вывода, относящегося к « $\succ$ ». Пусть Φ – невыполнимая формула и « $\succ$ » – Φ -упорядочение. Тогда для пустого пути ε существует опровержение в $S5^\Phi_{Path}$, которое относится к « $\succ$ ».

В целях исследования свойств отношения $\succ$ и доказательства теоремы полноты для соответствующего исчисления вводится понятие « $\succ$ »-компакта.

Лемма о « $\succ$ »-компактах. Пусть « $\succ$ » – Φ -упорядочение. Тогда

1. посылка каждого $(\boxdot)$ -вывода – « $\succ$ »-компакт;
2. если Γ – « $\succ$ »-компактная секвенция, встречающаяся в дереве вывода ε , то тогда каждый $(\boxtimes)$ -вывод, имеющий Γ своим заключением, относится к « $\succ$ »;
3. если Γ – « $\succ$ »-компактная секвенция, встречающаяся в дереве вывода ε и если Γ содержит по крайней мере один $\vee$ -путь или $\wedge$ -путь, то тогда существует $(\boxtimes)$ -вывод, все посылки которого – « $\succ$ »-компакты.

Модифицируем исчисление $S5^{\Phi,*}_{IP}$ с учетом критерия избыточности для Φ -упорядочения.

Определение. Обозначим через $S5^{\Phi,\succ}_{IP}$ исчисление, полученное из $S5^\Phi_{IP}$:

- удалением всех секвенций путей, содержащих пути различной модальной длины;
- удалением всех секвенций путей, содержащих противоречивую пару путей;
- удалением всех выводов, не относящихся к $\succ$.

В исчислении $S5^{\Phi,\succ}_{IP}$ справедливы следующие утверждения.

Лемма бимоделирования для $S5^{\Phi,\succ}_{IP}$.

1. Пусть D – дерево вывода в $S5^{\Phi,\succ}_{IP}$. Тогда образ формул D' для D является деревом вывода Φ в $S5^\Phi_{Inv}$;

2. Пусть D' – дерево вывода секвенции $A_1, \dots, A_n$ в $S5^\Phi_{Inv}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n$ – такие пути, что $\Phi / \pi_i = A_i$, $\forall i = 1, n$. Тогда существует дерево вывода D для $\pi_1, \dots, \pi_n$ в $S5^\Phi_{IP}$ такое, что D' является образом формул дерева вывода D .

3. Пункты 1 и 2 справедливы, если везде “дерево вывода” заменить на “опровержение”.

Определение. Дерево вывода в $S5^\Phi_{IP}$ называется относящимся к Φ -упорядочению, если выполнены следующие условия:

1. для каждого $(\vee)$ -вывода этого дерева вывода

$$\frac{\Gamma, \pi \vee_l \quad \Delta, \pi \vee_r}{\Gamma, \Delta, \pi} \quad (\vee)$$

мы имеем $\pi \vee_l \succ \Gamma$ и $\pi \vee_r \succ \Gamma$;

2. аналогично, для каждого $(\wedge_l)$ -вывода (соответственно $(\wedge_r)$ -вывода) этого дерева мы имеем $\pi \wedge_l \succ \Gamma$ (соответственно $\pi \wedge_r \succ \Gamma$).

Лемма подсеквенциальности для $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$. Пусть D – опровержение пустого пути ε в $S5^{\Phi}_{Path}$, относящееся к « $\succ$ » и I – вывод в D в виде:

$$\frac{\Gamma_1 \dots \Gamma_n}{\Gamma},$$

и пусть даны секвенции путей $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ такие, что каждая Δ_i есть подсеквенция Γ_i . Тогда существует дерево вывода D' для Δ в $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$ из $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ такое, что Δ является подсеквенцией Γ .

Лемма подсеквенциальности обобщается от вывода до произвольного дерева вывода. Для этого достаточно непосредственно применить метод математической индукции по длине дерева вывода.

Лемма подсеквенциальности для деревьев вывода в $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$. Пусть D – опровержение ε в $S5^{\Phi}_{Path}$, относящееся к $\succ$, D'' – поддереву вывода в D секвенции Γ из секвенций $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ – подсеквенции $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ соответственно. Тогда существует дерево вывода D' для Δ в $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$ из $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ такое, что Δ является подсеквенцией Γ .

Теорема полноты $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$. Формула Φ системы $S5$ невыполнима тогда и только тогда, когда пустой путь ε имеет опровержение в исчислении $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$.

В конце третьей главы рассматривается еще один критерий избыточности, который основывается на понятии предпосылки.

Определение. Пусть Π и Π' – секвенции путей и Π является подсеквенцией Π' , тогда будем говорить, что Π предпосылает секвенцию путей Π' .

Заметим, что сами предпосылочные дизъюнкты не являются избыточными и их нельзя напрямую удалять из пространства поиска вывода, но они становятся избыточными совместно с дизъюнктами, к которым они относятся. Далее рассматривается дедуктивная система $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ на множестве объектов.

Отметим, что в исчислениях путей $S5^{\Phi}_{Path}$ и $S5^{\Phi}_{IP}$ целевым объектом является пустая секвенция ε . Сформулируем теорему полноты для исчисления $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$, то есть для системы множественного вывода, полученного из $S5^{\Phi, \succ}_{IP}$.

Теорема полноты для $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$. Пусть Φ – формула логики $S5$

и $\succ$ – Φ -упорядочение. Тогда

1. если какое-либо дерево вывода в $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ успешно, то Φ невыполнима.
2. если Φ невыполнима, то любое справедливое дерево вывода в $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ успешно.

Для того чтобы доказать теорему полноты для $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ с предпосылкой, то есть, что любое справедливое дерево вывода в этой системе содержит пустой путь ε как только формула Φ невыполнима, определяется более строгое понятие предпосылки.

Определение. Мы будем говорить, что секвенция путей Π префиксно-предпосылает секвенцию путей Π' , если для любого пути $\pi \in \Pi \vdash \Pi'$ существует путь $\pi' \in \Pi' \vdash \Pi$ такой, что $\pi \sqsubseteq \pi'$.

Определение. Исчислением $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ с префиксной предпосылкой называется дедуктивная система, полученная из $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ добавлением следующего «правила префиксной предпосылки»: $M \cup \{\Pi, \Pi'\} \triangleright M \cup \{\Pi\}$, где Π префиксно-предпосылает Π' и $\Pi \neq \Pi'$.

Теорема полноты для $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ с префиксной предпосылкой.

1. Для любого успешного дерева вывода в системе $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ с префиксной предпосылкой формула Φ логики $S5$ невыполнима.
2. Для любой невыполнимой формулы Φ логики $S5$ любое справедливое дерево вывода M в $\{S5^{\Phi, \succ}_{IP}\}$ с префиксной предпосылкой успешно.

Общий алгоритм обратного метода установления выводимости. Укажем общий алгоритм установления выводимости, основанный на обратном методе, для произвольной формулы Φ модальной логики $S5$, учитывающий все выявленные стратегии сокращения пространства поиска вывода.

I этап. Строятся базовые исчисления для исходной логической системы $S5$ – исходное секвенциальное исчисление $S5_{Seq}$ и обратное секвенциальное исчисление $S5^{\Phi}_{Inv}$ для доказательства исследуемой формулы Φ .

II этап. Строятся прямое исчисление путей $S5^{\Phi}_{Path}$ и обратное исчисление путей $S5^{\Phi}_{IP}$ с целью сохранения информации о правилах вывода соответственно в исчислениях $S5_{Seq}$ и $S5^{\Phi}_{Inv}$.

III этап. Поиск опровержения исходной формулы $\sim\Phi$ из $S5$ заменяется на интуитивно более понятный поиск пустого пути ε в исчислении $S5^{\Phi}_{IP}$. В процессе поиска доказательства используются различные стратегии, основанные на свойствах исчислений путей и позволяющие сократить пространство поиска вывода.

IV этап. Дерево вывода пустого пути ε , полученное в $S5_{IP}^{\Phi}$, отображается в исходную систему $S5_{Seq}$.

В четвертой главе рассматривается применение обратного метода выводимости на основе автоэпистемической логики. Описаны различные типы экспертных систем, и приведены примеры, где указанный метод был бы наиболее полезен.

Рассмотрена разработанная автором оболочка экспертной системы на основе классического нечеткого вывода (Ларионов Д.С., Новосельцев В.Б. Оболочка экспертной системы на основе нечетких рассуждений с прямым и обратным выводом // Математическое моделирование.— 2002. — Т. 14. — № 9. — С. 48–52). Для данной оболочки указаны недостатки в виде используемых ей коэффициентов определенности. Этим обоснована замена коэффициентов определенности на модальные операторы.

Реализованная программа «Система проверки утверждений на основе модального вывода» проверяет на выводимость предложенную ей модальную формулу. Программа написана в визуальной среде Delphi 7.0 на объектно-ориентированном языке программирования Object Pascal.

Система проверила основную гипотезу Управления актуарных расчетов Пенсионного Фонда России о том, что к 2050г. соотношение числа работающих к числу пенсионеров будет близко к единице. Эта гипотеза подтвердилась при условии роста числа пенсионеров. Тем более, эта проблема и знание данной информации полезно для Томской области, так как для нее указанный коэффициент на 2003г. равен 1,35, что ниже общероссийского, составляющего 1,8. Результат работы системы с данной гипотезой указан на рис. 5. Факт использования системы подтвержден соответствующим заключением.

Также программа внедрена на ОАО «Манотомь» и используется для логического анализа производственной мощности предприятия. Система анализирует движение изготавливаемого продукта по всему производственному циклу от запуска до реализации, при этом учитывая связи между промежуточными звеньями процесса, такими как запуск, сборка, регулировка, ОТК, поверка, упаковка и так далее.

Программа в результате своей работы указывает, при каких условиях заказ будет выполнен в срок, или обосновывает невыполнимость заказа при заданных параметрах. Опираясь на выводы системы, можно вести грамотную производственную и сбытовую политику, что, несомненно, приведет к увеличению продаж, а, следовательно, и к увеличению прибыли предприятия. Имеется соответствующее заключение о внедрении.

В заключении приведены основные выводы и результаты диссертационной работы.

В приложения вынесены акты о внедрении полученных результатов диссертационной работы и фрагменты кода реализованных программ.

Основные результаты работы

В ходе выполнения диссертационной работы были получены следующие основные научные и практические результаты.

1. В процессе исследования указана не только реализация алгоритма обратного метода установления выводимости для автоэпистемической логики, но и алгоритм Φ -упорядочения, использовано понятие префиксной предпосылки и других свойств исчисления $S5_{seq}$, полезных в практическом применении метода.

2. Рассмотрены прямое секвенциальное исчисление $S5_{seq}$ и обратное секвенциальное исчисление $S5_{inv}^{\Phi}$, в которых будет происходить проверка на невыполнимость исходной формулы Φ . Доказана полнота данных исчислений.

3. В целях практического применения алгоритма обратной выводимости, для технического удобства программирования и сокращения пространства вывода введены прямое исчисление путей $S5_{path}^{\Phi}$ и обратное исчисление путей $S5_{IP}^{\Phi}$. Аксиоматика данных исчислений непосредственно зависит от проверяемой формулы Φ , точнее от ее структуры (подформул).

4. Доказаны теоремы полноты в исчислениях $S5_{path}^{\Phi}$ и $S5_{IP}^{\Phi}$, а вместе с ними сопутствующие важные утверждения: соответствующие *леммы бимоделирования* для данных исчислений.

5. Были исследованы свойства построенного исчисления путей, на основании которых предложены строгообоснованные стратегии сокращения поиска вывода в системе $S5$.

6. Была предложена и теоретически обоснована стратегия, основанная на Φ -упорядочении, определяющая эффективную последовательность применения правил вывода к дизъюнктам из пространства поиска вывода.

7. Были предложены и теоретически обоснованы эффективные стратегии для системы $S5$, подобные стратегиям предпосылки для логик K и KT , позволяющие заметно сокращать пространство поиска вывода уже в процессе порождения дизъюнктов.

8. Было проведено строгое доказательство теоремы полноты для исчисления путей системы $S5$ с учетом всех вышеназванных стратегий. Свойство полноты позволяет быть уверенным в результатах работы систем, основанных на выводе с использованием обратного метода установления выводимости.

9. Разработана программа «Система проверки утверждений на основе модального вывода», в основе которой лежит алгоритм обратного метода установления выводимости для автоэпистемической логики и использованы методы Φ -упорядочения. Система апробирована на актуарных гипотезах Пенсионного Фонда России, в частности проверена гипотеза демографической ситуации в стране к 2050г., о чем получено соответствующее заключение. Также имеется заключение о внедрении программы на ОАО «Манотомь».

Основные публикации по теме диссертации

1. Larionov D.S. Auto-epistemic Logic for Expert System's Inference Engine // Materials of the 9th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology "KORUS-2005".–2005.–Vol.1.– P. 649–652. (Ларионов Д.С. Автоэпистемическая логика для механизма вывода экспертных систем // Материалы 9-го Русско-Корейского международного симпозиума по науке и технологиям "KORUS-2005".–2005.–Т.1.– С. 649–652.)
2. Ларионов Д.С. Использование модальной логики для проектирования оболочек экспертных систем // Известия Томского Политехнического Университета. – 2005. – Т. 308. – № 4. – С. 173-177.
3. Ларионов Д.С., Новосельцев В.Б. Оболочка экспертной системы на основе нечетких рассуждений с прямым и обратным выводом // Математическое моделирование.– 2002.–Т. 14.–№ 9. – С. 48–52.
4. Ларионов Д.С. Модальная логика для механизма вывода экспертной системы // Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ. – 2002. – I. – С. 108-110
5. Ларионов Д.С. Оболочка экспертной системы с прямым и обратным выводом на основе нечетких рассуждений // Труды XXIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ «Современные исследования в математике и механике». – 2001. – II. – С. 223-229
6. Ларионов Д.С. Оболочка экспертной системы на базе нечеткого вывода // Труды XXII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ «Аналитические и численные методы в математике и механике». – 2000. – I. – С. 97-101
7. Ларионов Д.С. Оболочка экспертной системы на основе нечетких рассуждений с прямым и обратным выводом // Материалы XXXIX международной научной студенческой конференции. – 2001. – Новосибирск, НГУ. – С. 194-195
8. Ларионов Д.С. Оболочка экспертных систем, поддерживающих нечеткий вывод // Материалы XXXVIII международной научной студенческой конференции. – 2000. – Новосибирск, НГУ. – С. 110-111
9. Ларионов Д.С. Логический вывод в экспертных системах// Материалы V межвузовской конференции молодых ученых. – 2001. – Томск, ТГПУ. – С.144-149
2. Ларионов Д.С. Автоматическая система вывода // Материалы IV межвузовской конференции молодых ученых. – 2000. – Томск, ТГПУ. – С.128-132