

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи

ХО МИНЬ ДАЙ

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ АНАЛИЗА
ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ**

Специальность: 05.11.01- Приборы и методы измерения
(электрические и магнитные величины)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель – доктор технических наук,
профессор Муравьев Сергей Васильевич

Томск – 2021

Содержание

Введение.....	5
ГЛАВА 1 Методы уменьшения систематической погрешности измерений ...	11
1.1 Погрешность и неопределенность результата измерения	11
1.1.1 Погрешность результата измерения.....	11
1.1.2 Неопределенность результата измерения	14
1.2 Итерационные методы	15
1.2.1 Аддитивный итерационный метод	15
1.2.2 Мультипликативный итерационный метод	18
1.2.3 Дальнейшее развитие итерационного метода.....	20
1.3 Метод образцовых мер.....	22
1.4 Тестовые методы	24
1.4.1 Аддитивные и мультипликативные тесты	25
1.4.2 Дальнейшее развитие тестового метода	27
Выводы к главе 1	31
ГЛАВА 2 Повышение точности оценок измеряемых величин в совокупных измерениях	32
2.1 Совокупные измерения и гетероскедастичность.....	32
2.2 Метод аддитивных совокупных измерений	34
2.2.1 Параметрическое уравнивание	34
2.2.2 Применение параметрического уравнивания в аддитивных совокупных измерениях	38
2.2.3 Доказательство эффективности предложенного метода АСИ	40
2.2.4 Геометрическая интерпретация метода аддитивных совокупных измерений	43

2.3 Метод мультипликативных совокупных измерений.....	45
Выводы к главе 2.....	48
ГЛАВА 3 Повышение точности оценки измеряемой величины с помощью агрегирования предпочтений.....	49
3.1 Метод комплексирования интервальных измерительных данных агрегированием предпочтений	49
3.1.1 Интервалы и диапазон актуальных значений	50
3.1.2 Представление исходных интервальных данных инранжированиями	51
3.1.3 Агрегирование инранжирований.....	51
3.1.4 Этапы процедуры IF&PA.....	53
3.1.5 Дальнейшие этапы для повышения точности IF&PA	55
3.2 Свойства разбиения диапазона актуальных значений	56
3.2.1 Математическое описание формирования дискретных значений	57
3.2.2 Нелинейное влияние нормы разбиения на результат комплексирования	61
ГЛАВА 4 Экспериментальные исследования предложенных методов повышения точности измерений	66
4.1 Расчет погрешности используемых в экспериментах СИ.....	66
4.2 Метод аддитивных совокупных измерений	67
4.2.1 Эксперимент по уменьшению неопределенности типа В.....	67
4.2.2 Результаты и обсуждение	69
4.3 Метод мультипликативных совокупных измерений.....	75
4.3.1 Эксперимент по уменьшению неопределенности типа В.....	75
4.3.2 Результаты и обсуждение	76
4.4 Усовершенствованный метод IF&PA	78
4.4.1 Программное обеспечение для экспериментальных исследований метода IF&PA	78

4.4.2	Согласование значений фундаментальных физических констант	79
4.4.3	Повышение точности измерения напряжения постоянного тока	96
4.4.4	Повышение точности измерения угловых скоростей	100
	Выводы к главе 4.....	104
	Заключение	107
	Список сокращений и обозначений.....	109
	Список используемой литературы	111
	Приложение А. Акты внедрения диссертационной работы	121

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Повышение требований к качеству продукции и эффективности производства, обусловленное развитием науки и техники, влечет за собой радикальное изменение требований к измерениям. Одно из основных требований состоит в снижении погрешности (или неопределенности) результатов измерений. Стремление свести погрешность к минимуму характеризует основные направления развития практической метрологии и приборостроения. Эта направленность особенно важна в ситуациях, где требуемая точность измерений приближается к точности, которую могут обеспечить эталоны.

Повышение точности измерений, как правило, основано на оценивании погрешностей и различных способах их исключения из результатов измерений. К традиционным методам повышения точности измерений относятся итерационные методы, методы образцовых мер и тестовые методы. Для их эффективной реализации требуется вводить в измерительную систему аппаратную избыточность, метрологические характеристики которой нередко должны иметь более высокие значения по сравнению с исходной измерительной системой. Необходимым условием для применения традиционных методов является превалирование систематической составляющей погрешности над случайной составляющей, причем случайная составляющая возрастает после применения традиционных методов. Следовательно, при разработке методов повышения точности результатов измерений следует отдавать предпочтение подходам, обеспечивающим одновременное уменьшение всех составляющих погрешности вне зависимости от их природы и без необходимости введения аппаратной избыточности.

При обработке результатов измерений следует также учитывать, что могут иметь место определенные ограничения, накладываемые на допустимые свойства данных, такие как требования нормальности распределений и независимости наблюдений, отсутствия выбросов, постоянства дисперсии для всех наблюдений и

т.д. Такие данные называются *гомоскедастичными*. Однако в реальных условиях результаты измерений часто характеризуются *гетероскедастичностью*, т.е. неравной дисперсией. Эта ситуация обычно имеет место при измерении определенной величины разными (разнотипными) приборами и (или) разными методами измерения или в разных условиях окружающей среды. Гетероскедастичность данных измерений возникает, в частности, в таких ситуациях, как: межлабораторные и (или) ключевые сличения, согласование значений фундаментальных констант, сбор данных с узлов сенсорных сетей и т.п. Традиционные методы параметрической статистики не могут эффективно работать с гетероскедастичными данными без предварительной проверки согласованности и устранения выбросов. Стандартной оценкой для таких данных является *взвешенное среднее*, для которой требования нормальности и независимости наблюдений остаются в силе.

Целью диссертационной работы является разработка и экспериментальные исследования методов повышения точности оценивания значений физических величин в условиях гетероскедастичности.

В связи с поставленной целью должны быть решены следующие **задачи**:

- анализ известных методов повышения точности результатов измерений;
- разработка аддитивного и мультипликативного методов повышения точности оценок измеряемых величин в совокупных измерениях;
- разработка метода повышения точности оценки опорного значения измеряемой величины с помощью агрегирования предпочтений;
- экспериментальные исследования аддитивного и мультипликативного методов повышения точности в совокупных измерениях сопротивления;
- экспериментальные исследования метода повышения точности оценки опорного значения с помощью агрегирования предпочтений при согласовании значений фундаментальных физических констант и измерениях напряжения постоянного тока и угловой скорости.

Методы исследования. Используются методы теории измерений, теории погрешностей, агрегирования предпочтений, а также теории многомерного

регрессионного анализа. Численные экспериментальные исследования проводились с использованием метода Монте-Карло для генерации синтетических измерительных данных с помощью специально разработанного программного обеспечения в пакетах MATLAB и LabVIEW.

Достоверность полученных результатов диссертационной работы подтверждается сравнением результатов, полученных разработанными методами, с результатами, полученными известными методами обработки измерительных данных.

Научная новизна

1. На основе параметрического уравнивания предложены, теоретически и экспериментально исследованы метод аддитивных совокупных измерений и метод мультипликативных совокупных измерений для линейных и мультипликативных комбинаций искомых измеряемых величин соответственно.
2. Предложен и исследован усовершенствованный метод комплексирования интервалов агрегированием предпочтений IF&PA, где первым результатом комплексирования является наилучшее дискретное значение в ранжировании консенсуса, найденном для набора наведенных интервалами ранжирований дискретных значений; второй результат комплексирования формируется повторным применением IF&PA к окрестности первого результата в границах, равных половине расстояния между соседними дискретными значениями.
3. Исследованы свойства разбиения диапазона актуальных значений (ДАЗ), полученного объединением исходных интервалов в методе IF&PA; показано, что влияние нормы разбиения ДАЗ на точность результата комплексирования носит существенно нелинейный характер.

Практическая ценность работы. Результаты диссертационной работы могут быть использованы для повышения точности обработки неравноточных интервальных измерительных данных. Типичными практическими применениями усовершенствованного метода IF&PA могут быть: межлабораторные и (или)

ключевые сличения, согласование значений фундаментальных констант, сбор данных с узлов сенсорных сетей и т.д. Разработанные методы аддитивных и мультипликативных совокупных измерений могут найти применение в совокупных измерениях для повышения точности измерения аддитивных величин.

Реализация и внедрение результатов работы. Результаты исследований использованы при выполнении НИР по гранту 18-19-00203 Российского научного фонда "Агрегирование предпочтений для решения задач обработки многомерных гетероскедастичных измерительных данных", 2018-2020 гг.

Результаты работы также используются: в федеральном бюджетном учреждении "Государственный региональный центр стандартизации, метрологии и испытаний в Томской области" при обработке результатов измерений; в учебном процессе отделения автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники ТПУ. Акты внедрения приложены к диссертационной работе.

Положения, выносимые на защиту

1. Предложенные методы аддитивных и мультипликативных совокупных измерений обеспечивают получение оценок измеряемой величины с неопределенностью в 2-3 раза меньшей по сравнению с методом непосредственной оценки.
2. Усовершенствованный метод IF&PA позволяет гарантированно повысить точность второго результата комплексирования и существенно снизить его неопределенность по сравнению с первым результатом комплексирования.
3. Нелинейный характер влияния нормы разбиения ДАЗ на точность результата комплексирования приводит к возможности появления одинаковых результатов при разных мощностях разбиения и служит основой для усовершенствования метода IF&PA.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях: XXIII Международная научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых

"Научная сессия ТУСУР", г. Томск, 2018 г. (доклад отмечен дипломом II степени); XIV Международная научно-техническая конференция "Актуальные проблемы электронного приборостроения", г. Новосибирск, 2018 г. (диплом I степени); XV и XVI Международная научно-практическая конференция "Электронные средства и системы управления", г. Томск, 2019 и 2020 гг. (диплом III степени в 2019 г.); IX Международная конференция школьников, студентов, аспирантов, молодых ученых "Ресурсоэффективные системы в управлении и контроле: взгляд в будущее", г. Томск, 2020 г.; XIV Всероссийская научная конференция молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации", г. Новосибирск, 2020 г.; International virtual conference IEEE SENSORS 2020, Rotterdam, The Netherlands, 2020; 17th IMEKO TC10 and EUROLAB Virtual Conference "Global Trends in Testing, Diagnostics & Inspection for 2030", Dubrovnik, Croatia, 2020.

Публикации. Основные результаты исследований отражены в 12 публикациях: 4 статьи в ведущих научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК, все проиндексированы в базах данных Scopus и (или) Web of Science; 8 статей в сборниках трудов международных и российских конференций; 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 105 наименований. Работа содержит 123 страницы основного текста, включая 30 рисунков и 23 таблицы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель исследований, определены решаемые задачи, указаны научная новизна и практическая ценность результатов работы.

В первой главе проведен анализ известных методов повышения точности измерений, включая итерационные методы, методы образцовых мер и тестовые методы.

Во второй главе предложены метод аддитивных совокупных измерений и метод мультипликативных совокупных измерений для линейных и мультипликативных комбинаций искомых измеряемых величин соответственно.

В третьей главе предложен метод повышения точности оценки измеряемой величины на основе комплексирования интервалов агрегированием предпочтений IF&PA; исследован нелинейный эффект нормы разбиения диапазона актуальных значений на результат комплексирования; предложена модификация IF&PA для получения более точного результата комплексирования.

В четвертой главе приведены результаты экспериментальной апробации методов аддитивных и мультипликативных совокупных измерений в задаче повышения точности измерений активных сопротивлений; приведены результаты обработки синтетических и реальных интервальных данных усовершенствованным методом IF&PA при согласовании значений фундаментальных физических констант; рассматриваются также результаты обработки этим методом реальных данных для повышения точности измерений напряжения постоянного тока и угловой скорости.

ГЛАВА 1

МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Решение современных задач науки и техники требует высокой точности измерений, сопоставимой с точностью эталонных мер. Точность результатов измерений должна быть обеспечена в реальных условиях производства и в течение длительного периода использования с учетом воздействия факторов окружающей среды. Повышение точности измерений, как правило, основано на оценивании погрешностей и различных способах их исключения из результатов измерений.

В этой главе кратко рассмотрены понятия погрешности и неопределенности результата измерения, проведен анализ известных методов повышения точности измерений, включающих итерационные методы, методы образцовых мер и тестовые методы.

1.1 Погрешность и неопределенность результата измерения

Для понятий "измерение" и "погрешность" будем использовать стандартные термины.

1.1.1 Погрешность результата измерения

Будем пользоваться определением измерения из стандарта РМГ 29-2013: *измерение* – это процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине [39].

Значение величины – это выражение размера величины в виде некоторого числа принятых единиц, или чисел, баллов по соответствующей шкале измерений [39].

Результат измерения величины – это множество значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией [39].

Погрешность результата измерения определяется как отклонение

результата измерения от истинного значения x измеряемой величины X . Поскольку значение x неизвестно, погрешность результата измерения нельзя точно определить, но можно оценить ее значение [36].

Обычно считается, что погрешность результата измерения содержит систематическую и случайную составляющие. Систематическими погрешностями называют составляющие, которые остаются постоянными или изменяются по определенному закону при повторных измерениях одной и той же величины в одних и тех же условиях измерений [30, 52, 35]. Исключение систематических погрешностей в результате измерения осуществляется путем введения поправки. При этом систематические погрешности не могут быть устранены полностью, какая-то их часть останется не исключённой и представляет собой систематическую составляющую погрешности результата измерения.

Случайными погрешностями называется составляющие, для которых невозможно предсказать ни знак, ни их абсолютное значение. Они вызваны сочетанием множества причин, которые трудно проанализировать. Основной отличительной чертой случайных составляющих от систематических составляющих является их непредсказуемость для каждого конкретного результата измерения [30, 44].

Любое средство измерения (СИ) в общем случае состоит из нескольких измерительных преобразователей (ИП), каждый из которых характеризуется функцией, связывающей входную и выходную величины, которая называется градуировочной характеристикой ИП. Градуировочные характеристики (ГХ) СИ могут быть представлены в виде таблицы, графика или аналитической зависимости [43, 15, 48]. Однако, независимо от различных представлений, номинальная ГХ средства измерения можно быть описана следующей обобщенной математической моделью:

$$y = a_{1н} + a_{2н}x + \dots + a_{nн}x^{n-1}, \quad (1.1)$$

где $a_{1н}, \dots, a_{nн}$ – номинальные параметры математической модели ГХ средства измерения, x – значение входной измеряемой величины X , y – значение выходной величины.

Во время эксплуатации под действием дестабилизирующих факторов и старения СИ их действительные свойства отличаются от номинальных. Данное отличие приводит к существованию погрешности СИ. При этом математическая модель для действительной ГХ средства измерения имеет вид:

$$y = a_1(t) + a_2(t)x + \dots + a_n(t)x^{n-1}, \quad (1.2)$$

где $a_1(t), \dots, a_n(t)$ – случайные функции параметров ГХ от времени t .

Если обозначим $\Delta_i = a_i(t) - a_{ин}, i = 1, \dots, n$, то погрешность СИ определяется следующим образом [10]:

$$\Delta_{\text{вых}} = \Delta_1 + \Delta_2 x + \dots + \Delta_n x^{n-1}. \quad (1.3)$$

Погрешность $\Delta_{\text{вых}}$ можно разделить на две составляющие: **коррелированную составляющую**, объединяющую практически все систематические, прогрессирующие и относительно медленно меняющиеся случайные погрешности; и **некоррелированную составляющую**, состоящую из всех некоррелированных случайных погрешностей типа «белого шума».

Коррелированная составляющая погрешности СИ вызывается, например, неточной маркировкой на циферблате, изменением упругих свойств пружины, неточной регулировкой сопротивлений резисторов и др.

Некоррелированная составляющая погрешности СИ может возникать при трении в опорах подвижной части устройства, нестабильном переходном сопротивлении электрических контактов ключей и др. Данная составляющая погрешности приводит к неоднозначности показаний прибора, затрудняя их интерпретацию [36].

У СИ часто выделяют погрешность, которая возрастает пропорционально росту значения x и равняется нулю при нулевом значении величины X . Данная погрешность называется **мультипликативной** или **погрешностью чувствительности** вне зависимости от того, является ли эта погрешность случайной или систематической.

Погрешность, не зависящая от входной измеряемой величины X , называется **аддитивной** или **погрешностью нуля**. Данную погрешность можно

устранить путем установки нуля СИ перед измерением.

Методы уменьшения некоррелированной (случайной) составляющей погрешности работают на основе статистической обработки результатов многократных (временное разделение каналов) и многоканальных (пространственное разделение каналов) измерений измеряемой величины. В настоящее время эти методы достаточно исследованы [10].

Методы уменьшения коррелированной (систематической) составляющей погрешности можно разделить на две группы. К первой группе относятся **конструктивные методы**, включающие тщательную отработку конструкции отдельных элементов СИ, выбор материалов и технологии изготовления. Однако эти методы увеличивают стоимость измерительного оборудования. Более перспективной является группа **структурных методов**, построенных на принципах **избыточности**, которые позволяют получать дополнительную информацию не только об измеряемой величине, но также о допустимых погрешностях измерений, и исключать их из результата измерения. Эти методы используются для создания высокоточных измерительных систем (ИС) на основе несложного оборудования.

1.1.2 Неопределенность результата измерения

В современной метрологической практике часто понятие неопределенности используется вместо понятия погрешности для того, чтобы исключить из рассуждений понятие истинного значения измеряемой величины.

Согласно [67] **неопределенность** результата измерения определяется как неотрицательный параметр, связанный с результатом измерения и характеризующий разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине на основе используемой информации.

В соответствии с рекомендациями руководства по выражению неопределенности измерений [14] неопределенность результата измерения состоит из двух составляющих: типа А и типа В.

При оценивании типа А получают ряд повторных измерений для

определения дисперсии результатов измерений. Положительный квадратный корень из дисперсии называется **стандартной неопределенностью типа A** (u_A).

При оценивании типа B используется информация, найденная в отчетах о поверке (калибровке), сертификатах, данных производителя и т.д., которые используются для оценки стандартного отклонения, известного как **стандартная неопределенность типа B** (u_B).

1.2 Итерационные методы

Итерационный метод повышения точности результата измерения является частным случаем метода обратного преобразования [5]. При этом, ГХ $y = f(x)$, где x и y – значения входной и выходной величин СИ, может быть линейной или даже существенно нелинейной. Для обеспечения однозначности проводимых измерений, данная ГХ должна быть практически линейной и монотонной [5].

В итерационном методе используется обратный преобразователь (ОП), ГХ которого имеет вид $x = g(y)$. Метод позволяет находить значение $y = x_k$ на выходе ОП, реализуемого в виде цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), при выполнении условия равенства результатов измерений входной величины X и выходного сигнала ЦАП, т.е. [5]:

$$f[g(x_k)] = f(x). \quad (1.4)$$

1.2.1 Аддитивный итерационный метод

Процесс нахождения значения $y = x_k$, удовлетворяющего условию (1.4), можно реализовать с помощью **аддитивного итерационного метода** (АИМ). При этом скорректированный результат измерения x_{nk} для величины X в n -м цикле итерации определяется следующим образом:

$$x_{nk} = x_{n-1k} - \gamma_{n-1} \{f[g(x_{n-1k})] - f(x)\}, \quad (1.5)$$

где $x_{0k} = f(x)$ – нескорректированный результат измерения, γ_{n-1} – заданный шаг в n -м цикле итерации.

Предполагается, что ГХ $f(x)$ и $g(y)$ линейны и имеют вид $f(x) = (1 + \alpha)x + \beta$, $g(y) = (1 + a)y + b$, где $\eta_1 = \beta / x$, $\eta_2 = \alpha$, $\theta_1 = b / y$, $\theta_2 = a$ – относительные

аддитивные и относительные мультипликативные погрешности СИ и ОП, соответственно.

По теореме Лагранжа о среднем значении, из формул (1.4) и (1.5) получаем выражение [26]:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n\kappa} - x_{\kappa}}{x_{n-1\kappa} - x_{\kappa}} &= 1 - \gamma_{n-1} \frac{f[(1+a)x_{n-1\kappa} + b] - f[(1+a)x_{\kappa} + b]}{x_{n-1\kappa} - x_{\kappa}} \\ &= 1 - \gamma_{n-1}(1+a)f'(\xi_{n-1}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\xi_{n-1} \in (\min\{(1+a)x_{n-1\kappa} + b, (1+a)x_{\kappa} + b\}, \max\{(1+a)x_{n-1\kappa} + b, (1+a)x_{\kappa} + b\})$, $f'(\cdot)$ – производная функции f .

Из выражения (1.6) получаем условие сходимости итерационного метода следующим образом:

$$\left| \frac{x_{n\kappa} - x_{\kappa}}{x_{n-1\kappa} - x_{\kappa}} \right| = \left| 1 - \gamma_{n-1}(1+a)f'(\xi_{n-1}) \right| < 1. \quad (1.7)$$

Оптимальный шаг определяется по следующей формуле:

$$\gamma_{n-1} = \frac{1}{(1+a)f'(\xi_{n-1})}. \quad (1.8)$$

Отклонение скорректированного результата измерения измеряемой величины X от x_{κ} в n -м цикле итерации имеет вид:

$$x_{n\kappa} - x_{\kappa} = (x_{n-1\kappa} - x_{\kappa}) \left[1 - \gamma_{n-1}(1+a)f'(\xi_{n-1}) \right]. \quad (1.9)$$

Метод постоянного шага [3] основан на фиксированном шаге настройки итерации, $\gamma_n = \gamma$. При этом с учетом $f'(\xi_{n-1}) = 1 + \alpha$, формула (1.9) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n\kappa} - x_{\kappa} &= (x_{n-1\kappa} - x_{\kappa}) [1 - \gamma(1+a)(1+\alpha)] \\ &= (x_{0\kappa} - x_{\kappa}) [1 - \gamma(1+a)(1+\alpha)]^n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Итерационный алгоритм быстро сходится после первой итерации если левая часть формулы (1.10) равна 0. При этом оптимальный шаг определяется по формуле:

$$\gamma_{\text{оп}} = \frac{1}{(1+a)(1+\alpha)}. \quad (1.11)$$

В [3] предложен классический АИМ, основанный на фиксированном шаге $\gamma = 1$. Структурная схема ИС, реализуемой АИМ, показана на рисунке 1.1.

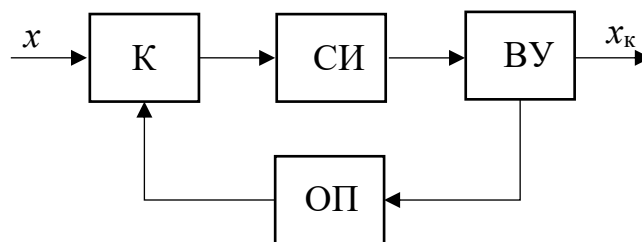


Рисунок 1.1 – Структурная схема ИС, реализуемой АИМ

Процесс измерения организован следующим образом.

В первом такте с помощью ключа К измеряемая величина X подается на вход СИ и измеряется. С выхода СИ результат измерения $y_0 = f(x)$ поступает в вычислительное устройство (ВУ) и на вход ОП. На выходе ОП получается величина X_0 , значение которой равно $x_0 = g(y_0)$.

Во втором такте ключ К отключает измеряемую величину X от входа СИ и подключает к последнему выход ОП, измеряется величина X_0 с результатом измерения $y_1 = f(x_0)$. ВУ вычитает результат измерения y_1 из y_0 , и запоминает полученную разность $y_0 - y_1$.

В третьем такте измеряемая величина X подключается к входу СИ, и на выходе СИ получается результат измерения y_0 . С помощью ВУ y_0 добавляется к разности $y_0 - y_1$. Первый скорректированный результат измерения величины X получается следующим образом:

$$x_{1к} = 2y_0 - y_1. \quad (1.12)$$

Далее первый скорректированный результат измерения $x_{1к}$ поступает на вход ОП, и итерационный процесс повторяется.

С учетом формулы (1.10), отклонение $x_{нк}$ от x_k в n -м цикле итерации определяется по формуле:

$$x_{нк} - x_k = (x_{0к} - x_k) [1 - (1 + a)(1 + \alpha)]^n. \quad (1.13)$$

С учетом выражений $g(x_k) = (1 + a)x_k + b$, $x_k = (x - b)(1 + a)$, $x_{0к} = f(x) = (1 + \alpha)x + \beta$ и (1.13), обобщенная формула скорректированного

результата измерения величины X в n -м цикле итерации имеет вид [3]:

$$x_{nk} = x \left\{ 1 - \frac{a + [1 - (1 + a)(1 + \alpha)]^{n+1}}{1 + a} \right\} + \beta [1 - (1 + a)(1 + \alpha)]^n + \frac{b}{1 + a} \left\{ [1 - (1 + a)(1 + \alpha)]^n - 1 \right\}. \quad (1.14)$$

При отсутствии погрешностей ОП, его ГХ описывается линейной функцией вида $g(y) = y$. Подставляя $a = b = 0$ в формуле (1.14) получаем выражение:

$$x_{nk} = x \left[1 - (-\alpha)^{n+1} \right] + (-\alpha)^n \beta. \quad (1.15)$$

С учетом $\eta_1 = \beta / x$, обобщенная относительная погрешность скорректированного результата измерения в n -м цикле итерации определяется по формуле:

$$\delta x_{nk} = \frac{x_{nk} - x}{x} = (-\alpha)^n (\alpha + \eta_1). \quad (1.16)$$

Из выражений (1.15) и (1.16) видно, что если значение x входной величины X постоянно и относительная мультипликативная погрешность СИ $\alpha < 100\%$, то аддитивный итерационный алгоритм сходится, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk} = x \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta x_{nk} = 0. \quad (1.17)$$

АИМ используется в следующих случаях: при небольшой относительной погрешности СИ (меньше 15 %); при достаточно большой погрешности СИ, обусловленной в основном аддитивной; или при малом значении x измеряемой величины X [3].

1.2.2 Мультипликативный итерационный метод

Структурная схема ИС, реализующей **мультипликативный итерационный метод** (МИМ), совпадает со схемой, реализующей АИМ. В отличие от АИМ, который выполняет операции сложения и вычитания в ВУ, МИМ выполняет операции умножения и деления. При этом скорректированный результат измерения x_{nk} в n -м цикле итерации определяется следующим образом [3]:

$$x_{nk} = \frac{x_{n-1k}}{f[g(x_{n-1k})]} x_{0k}, \quad (1.18)$$

где $x_{0k} = f(x)$ – нескорректированный результат измерения величины X .

По теореме Лагранжа о среднем значении, имеем выражение [26]:

$$f(x) = f[g(x_{n-1k})] + f'(\xi_{n-1})[x - g(x_{n-1k})], \quad (1.19)$$

где $\xi_{n-1} \in (\min\{g(x_{n-1k}), x\}, \max\{g(x_{n-1k}), x\})$, $f'(\cdot)$ – производная функции f .

Из формул (1.18) и (1.19) обобщенная абсолютная погрешность скорректированного результата измерения величины X в n -м цикле итерации вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta x_{nk} = x_{nk} - x &= \frac{x_{n-1k}x_{0k} - xf[g(x_{n-1k})]}{f[g(x_{n-1k})]} \\ &= (x_{n-1k} - x) \left\{ 1 - \frac{x_{n-1k}}{f[g(x_{n-1k})]} f'(\xi_{n-1}) \frac{g(x_{n-1k}) - x}{x_{n-1k} - x} \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При отсутствии погрешностей ОП, его ГХ имеет вид $g(y) = y$. С учетом $g(x_{n-1k}) = x_{n-1k}$, выражение (1.20) переписывается следующим образом:

$$\Delta x_{nk} = \Delta x_{0k} \prod_{i=1}^n \left[1 - \frac{x_{i-1k}}{f(x_{i-1k})} f'(\xi_{i-1}) \right], \quad (1.21)$$

где $\Delta x_{0k} = x_{0k} - x$ – абсолютная погрешность нескорректированного результата измерения величины X .

Пусть ГХ средства измерения линейна и имеет вид $f(x) = (1 + \alpha)x + \beta$, $f'(\xi_{n-1}) = 1 + \alpha$, пусть также $\eta_1 = \beta/x$ и $\eta_2 = \alpha$ – относительная аддитивная погрешность и относительная мультипликативная погрешность СИ, соответственно. Тогда выражение (1.21) имеет вид:

$$\Delta x_{nk} = \Delta x_{0k} \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{(1 + \alpha)x_{i-1k} + \beta}. \quad (1.22)$$

Из выражения (1.22) получаем условие сходимости мультипликативного итерационного алгоритма:

$$\left| \frac{\beta}{(1 + \alpha)x + \beta} \right| < 1. \quad (1.23)$$

Если значение x входной измеряемой величины X постоянно и относительная мультипликативная погрешность СИ $\alpha < 100\%$, то условие (1.23) выполняется и мультипликативный итерационный алгоритм сходится.

С учетом $g(x_{ik}) = x_{ik} = \Delta x_{ik} + x$ и разделив обе части выражения (1.22) на x , мы получим следующую формулу для расчета обобщенной относительной погрешности скорректированного результата измерения величины X в n -м цикле итерации:

$$\delta x_{nk} = \delta x_{0k} \prod_{i=1}^n \frac{\eta_1}{(1 + \eta_2)(\delta x_{i-1k} + 1) + \eta_1}. \quad (1.24)$$

МИМ применяется при значительной относительной погрешности СИ, обусловленной в основном мультипликативной и нелинейной составляющими или при весьма большой относительной погрешности СИ (больше 15 %) [3].

Из формулы (1.8) видно, что при отсутствии погрешностей ОП и для быстрой сходимости итерации x_{nk} к x_k необходимо выбрать шаг γ_{n-1} ближе к значению $1 / f'(\xi_{n-1})$. Однако поскольку статическая ГХ средства измерения и значение ξ_{n-1} неизвестны, мы не можем точно определить $1 / f'(\xi_{n-1})$. Классические итерационные методы принимают $\gamma_{n-1} = 1$ на каждом цикле итерации. Недостатком таких методов является низкая скорость сходимости итерации, что приводит к увеличению количества циклов измерений для достижения определенной точности. Увеличение количества итерационных измерений усиливает случайную составляющую погрешность.

1.2.3 Дальнейшее развитие итерационного метода

Большой вклад в исследование и разработку итерационных методов внесли Т.М. Алиев [3, 4, 5], Э.И. Гитис [12], М.А. Земельман [18], П.В. Новицкий [31], П.Ф. Осмоловский [32], Б.Н. Петров [34], Ю.М. Туз [45], Л.П. Андрианова [6] и др.

Классические итерационные методы уменьшения коррелированной составляющей погрешности измерения требуют применения высокоточных ОП и ключа. Для измерений большинства неэлектрических величин, создание

высокоточных ОП вызывает большие трудности, чем создание высокоточных СИ. Область применения итерационных методов ограничена измерениями электрических величин, для которых обратное преобразование и периодическое отключение измеряемой величины от входа СИ не вызывают трудностей [5].

Кроме того, итерационный метод позволяет уменьшить только коррелированную составляющую погрешности, но вызывает увеличение некоррелированной составляющей. При использовании итерационных методов необходимо, чтобы случайная составляющая погрешности была значительно меньше систематической составляющей.

В докторской диссертации [6] был разработан аддитивно-мультипликативный итерационный метод (АМИМ) с адаптивным эталонным сигналом, который позволяет ускорить сходимость итераций и повысить точность измерений. Сущность этого метода заключается в том, что ГХ средства измерения, в качестве которого используется аналого-цифровой преобразователь (АЦП), аппроксимируется кусочно-линейной функцией. В первом цикле для получения первого скорректированного результата измерения величины X $x_{1к} = x_{0к}^2 / f(x_{0к})$ используются МИМ, где $x_{0к} = f(x)$ – нескорректированный результат измерения. В n -м цикле итерации обобщенная формула скорректированного результата измерения, полученного АМИМ с адаптивным эталонным сигналом, имеет вид:

$$x_{nк} = x_{n-1к} - [f(x) - f(x_{n-1к})] \frac{x_{n-1к} - x_{n-2к}}{f(x_{n-1к}) - f(x_{n-2к})}, \quad (1.25)$$

где $f(x_{n-1к})$ – результат измерения на выходе СИ в n -м цикле итерации, $n \geq 2$.

Благодаря возможности регулировки шага в каждом цикле, АМИМ с адаптивным эталонным сигналом сходится быстрее по сравнению с АИМ и МИМ и позволяет уменьшить аддитивную, мультипликативную и нелинейную составляющие погрешности СИ. Однако данный метод хорошо работает только при небольшой нелинейности СИ.

В [9] на основе линеаризации и метода Ньютона предложен способ

усовершенствования итерационного метода, предназначенного для коррекции погрешностей АЦП. Однако данный метод хорошо работает только в случае, если ЦАП ОП идеален. На самом деле ЦАП всегда имеет погрешность и ее следует учитывать в формуле скорректированного результата измерения.

1.3 Метод образцовых мер

Метод образцовых мер (МОМ) повышения точности измерения работает на основе нахождения значений x измеряемой величины X и неизвестных параметров $a_1(t), \dots, a_n(t)$ в действительной ГХ средства измерения, описываемой математической моделью (1.2). Проводя измерения величины X и дополнительных образцовых мер, получаем систему $n + 1$ уравнений. Решение этой системы дает скорректированный результат измерения величины X и искомые параметры $a_1(t), \dots, a_n(t)$. На основе МОМ, структурная схема ИС с временным разделением каналов показана на рисунке 1.2.

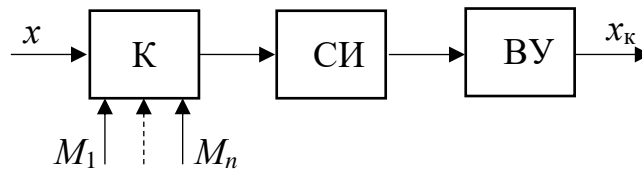


Рисунок 1.2 – Структурная схема ИС с временным разделением каналов на основе МОМ

Процесс измерения состоит из $n + 1$ тактов. В первом такте с помощью ключа К, входная измеряемая величина X подается на вход СИ и измеряется. На выходе СИ получается результат измерения y_0 . Затем отключается величина X и в последующих n тактах последовательно подключаются n образцовых мер M_1, \dots, M_n ко входу СИ. Проводятся измерения этих мер и получаются результаты измерений y_1, \dots, y_n . Эти результаты измерений образуют следующую систему $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}; \\ y_1 = a_1 + a_2M_1 + \dots + a_nM_1^{n-1}; \\ \vdots \\ y_n = a_1 + a_2M_n + \dots + a_nM_n^{n-1}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Решение системы (1.26) осуществляется с помощью ВУ.

Если ГХ средства измерения линейна, то требуются две образцовые меры. При этом скорректированный результат измерения x_k величины X определяется следующим образом:

$$x_k = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1.27)$$

В зависимости от нелинейности ГХ средства измерения и требуемой точности измерения, количество образцовых мер должно быть достаточным для нахождения x_k и неизвестных параметров этой характеристики.

Например, если ГХ средства измерения аппроксимируется кусочно-линейной функцией на m отрезках диапазона измерения, зависимость значений выходной величины от входной на j -м отрезке имеет вид:

$$y = a_{1j} + a_{2j}x, \quad (1.28)$$

где a_{1j} , a_{2j} – свободный и угловой коэффициенты кусочно-линейной прямой на j -м отрезке, $j = 1, \dots, m$.

Для каждого j -го отрезка, измерения проводятся по алгоритму (1.27), две образцовые меры выбираются в зависимости от результата первого такта. Таким образом, для кусочно-линейной аппроксимации ГХ средства измерения на m отрезках требуется $m + 1$ образцовых мер.

МОМ позволяет практически полностью исключить систематическую составляющую погрешность в результате измерения, но случайная составляющая в большинстве случаев увеличивается [40]. В случае существенной нелинейности ГХ средства измерения и необходимости кусочно-линейной аппроксимации этой характеристики на большом числе отрезков требуется достаточное большое количество образцовых мер.

Как и в случае итерационного метода, недостаток МОМ с временным разделением каналов заключается в необходимости ключа для отключения входной измеряемой величины X от входа СИ и периодического подключения набора образцовых мер. Погрешность ключа влияет на точность

скорректированного результата измерения x_k . Кроме того, создание образцовых мер, однородных с измеряемой величиной, вызывает затруднения при измерении неэлектрических величин, например, температуры, влажности и т.д. Таким образом, реальная область применения МОМ ограничивается измерением электрических величин.

1.4 Тестовые методы

Тестовые методы (ТМ) повышения точности измерений основаны на том, что ГХ средства измерения аппроксимируется полиномом степени $n - 1$ относительно значения x измеряемой величины X [10]. При этом в процессе измерения получается информация не только о величине X , но и о коэффициентах этого полинома. В отличие от МОМ, тестовые измеряемые величины зависят от значения x . Поэтому, данный метод, во-первых, не требует устройства для отключения измеряемой величины X , во-вторых, даже при существенно нелинейной ГХ требует меньшее количество образцовых величин по сравнению с МОМ.

Процесс измерений в ТМ состоит из $n + 1$ тактов [10]. В первом (основном) такте измеряется величина X , а в оставшихся (дополнительных) n тактах – тесты $A_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, каждый из которых является функцией для x . Тогда получается следующая система $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}; \\ y_1 = a_1 + a_2A_1(x) + \dots + a_n[A_1(x)]^{n-1}; \\ \quad \quad \quad \vdots \\ y_n = a_1 + a_2A_n(x) + \dots + a_n[A_n(x)]^{n-1}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Решая систему из n дополнительных уравнений в системе (1.29), получим значения коэффициентов a_i полинома. Затем, подставляя эти коэффициенты в уравнение основного такта измерения и решая его, получаем значение x измеряемой величины X . Однако, чем выше степень полинома $n - 1$, тем сложнее решить уравнение для нахождения x .

Тесты $A_i(x)$ можно разделить на аддитивные тесты, создаваемые блоком

аддитивных тестов (БАТ) и мультипликативные тесты, создаваемые блоков мультипликативных тестов (БМТ).

1.4.1 Аддитивные и мультипликативные тесты

Аддитивные тесты представляют собой сумму значений x измеряемой величины и значения θ_i аддитивной образцовой величины, являющейся однородной с величиной X и независимой от нее, т.е. $A_i(x) = x + \theta_i$. Мультипликативные тесты формируются в виде произведения значения x и коэффициента K_i преобразования БМТ, который не зависит от x , т.е. $A_i(x) = K_i x$.

Число требуемых тестов на единицу больше степени $n - 1$ полинома. ТМ эффективно работают при использовании кусочной аппроксимации ГХ средства измерения. Это позволяет значительно сокращать количество требуемых тестов. Количество тестов зависит не от числа отрезков аппроксимации, а от вида аппроксимирующего полинома. Это связано с тем, что тесты функционально связаны с измеряемой величиной и трансформируются вместе с ней в нужный нам участок аппроксимации.

На практике кусочно-линейная аппроксимация применяется при линейной или даже существенно нелинейной ГХ средства измерения. При этом ГХ на j -м участке аппроксимации описывается уравнением (1.28).

БАТ может формироваться с помощью автономного устройства или ОП. Структурная схема ИС для первого случая показана на рисунке 1.3. При этом используются один аддитивный тест и один мультипликативный тест.

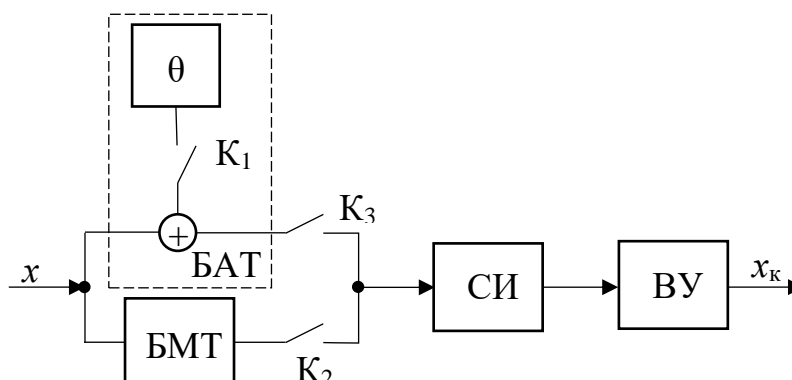


Рисунок 1.3 – Структурная схема ИС с БАТ, формируемым с помощью автономного устройства

В первом такте ключи K_1 и K_2 разомкнуты, ключ K_3 замкнут, измеряемая величина X подается на вход СИ. На выходе СИ получается результат измерения y_0 . Во втором такте, ключ K_1 замкнут, измеряется аддитивный тест $x + \theta$, и получается результат измерения y_1 . В третьем такте ключ K_3 разомкнут, а K_2 замкнут, мультипликативный тест Kx подключается к входу СИ и получается результат измерения y_2 . С помощью ВУ скорректированный результат измерения x_k вычисляется по формуле:

$$x_k = \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \frac{\theta}{K - 1}. \quad (1.30)$$

На рисунке 1.4 показана структурная схема ИС с БАТ, формируемым с помощью ОП. Данный ОП характеризуется коэффициентом преобразования β .

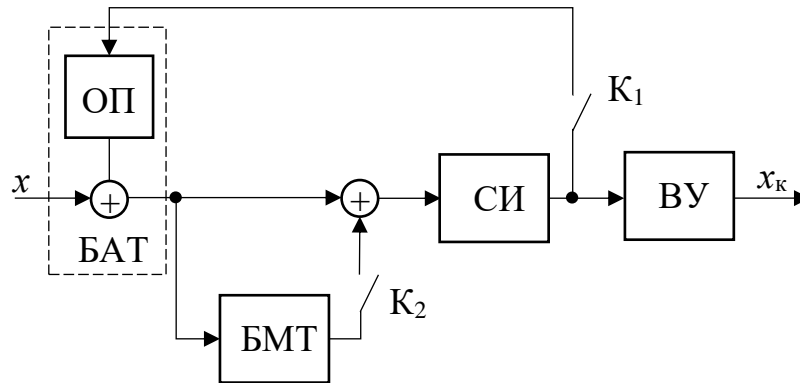


Рисунок 1.4 – Структурная схема ИС с БАТ, формируемым с помощью ОП

Процесс измерения также состоит из 3 тактов. В первом такте ключи K_1 и K_2 разомкнуты, измеряется величина X и получается результат измерения y_0 . Во втором такте с помощью ОП измеряется аддитивный тест $x + \beta y_1$ при замыкании ключа K_1 , где y_1 – результат измерения на выходе СИ. В третьем такте ключ K_1 разомкнут, а K_2 замкнут, мультипликативный тест $(K + 1)x$ подается на вход СИ, и на выходе СИ получается результат измерения y_2 . Скорректированный результат измерения x_k в данном случае вычисляется следующим образом:

$$x_k = \frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} \frac{\beta y_1}{K}. \quad (1.31)$$

С помощью ОП или автономного устройства, БАТ формируются значительно проще по сравнению с БМТ, особенно в ИС, предназначенной для

измерений неэлектрических величин. Поэтому предпочтительным решением является использование в ИС именно БАТ. При этом необходимо обеспечить, чтобы в аппроксимирующем полиноме ГХ хотя бы один коэффициент был равен нулю $a_i(t) = 0$.

ТМ позволяют эффективно скорректировать систематическую составляющую погрешности результата измерения, но при этом возникают некоторые методические погрешности, включающие в себя следующие основные составляющие:

- погрешность блоков формирования тестов;
- погрешность, вызванную отличием реальной от номинальной ГХ средства измерения;
- динамическую погрешность, обусловленную изменением исходной измеряемой величины между тактами и инерционностью СИ;
- погрешность ВУ;
- случайную погрешность СИ.

1.4.2 Дальнейшее развитие тестового метода

В ТМ, скорректированный результат измерения x_k величины X не зависит от изменяющихся параметров ГХ [10]. Это означает, что из x_k исключаются аддитивная, мультипликативная и нелинейная составляющие погрешности. Однако точность результата измерения зависит от стабильности тестовых блоков. Было проведено множество исследований по совершенствованию тестового алгоритма, позволяющих исключить влияние параметров тестов на скорректированный результат измерения. В [10] для измерения электрических величин с помощью ОП, разработан алгоритм, позволяющий исключить влияние коэффициента преобразования БАТ на x_k . Однако при этом влияние параметра БМТ на него остается.

В [49] предложен алгоритм, который полностью устраняет влияние параметров БАТ и БМТ на точность скорректированного результата измерения, позволяя синтезировать ИС с высокой точностью по сравнению с обычными

тестовыми алгоритмами. При этом структурная схема ИС показана на рисунке 1.5. ИС включает БМТ, характеризующий коэффициентом преобразования K , и два обратных преобразователя ОП₁ и ОП₂ с коэффициентами преобразования β_1 и β_2 . ГХ средства измерения описывается линейной функцией $y = a_1 + a_2x$.

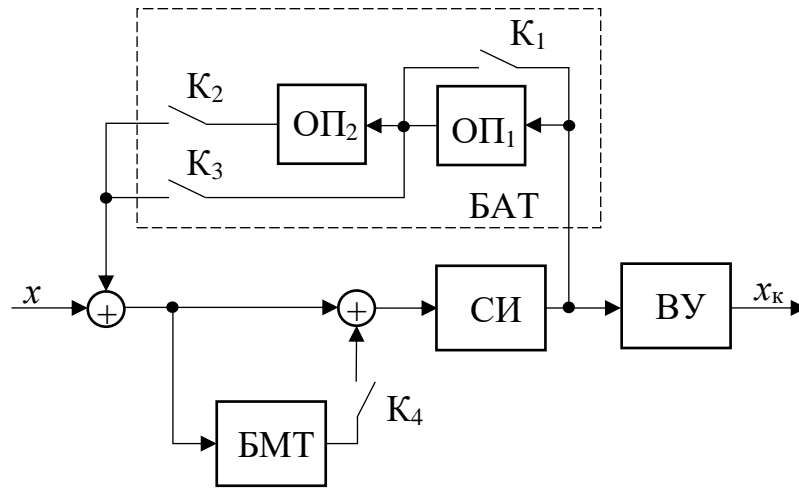


Рисунок 1.5 – Структурная схема ИС

Процесс измерения состоит из шести тактов. Состояния ключей K_1 - K_4 и уравнения преобразования тестов в каждом такте приведены в таблице 1.1, причем 0 (1) – разомкнутое (замкнутое) состояния ключей. Пусть y_i – результат измерения на выходе СИ в $(i + 1)$ -м такте, $i = 0, \dots, 5$. В первом такте измеряется измеряемая величина X . С помощью двух обратных преобразователей ОП₁ и ОП₂ во втором и четвертом тактах аддитивные тесты $x + \beta_1 y_1$ и $x + \beta_2 y_3$ подаются на вход СИ, а в третьем такте $-x + \beta_1 \beta_2 y_2$. С помощью БАТ и БМТ в 5- и 6-м тактах измеряются тесты $(K + 1)(x + \beta_1 y_4)$ и $(K + 1)(x + \beta_2 y_5)$, соответственно.

Для этого уравнение для такта 1 вычтем из уравнений для тактов 2, 3 и 4 и получим следующее равенство:

$$a_2 = \frac{y_1 - y_0}{\beta_1 y_1} = \frac{y_2 - y_0}{\beta_1 \beta_2 y_2} = \frac{y_3 - y_0}{\beta_2 y_3}. \quad (1.32)$$

Из равенства (1.32) получаем коэффициенты преобразования β_1 и β_2 :

$$\beta_1 = \frac{y_3(y_2 - y_0)}{y_2(y_3 - y_0)}; \quad \beta_2 = \frac{y_1(y_2 - y_0)}{y_2(y_1 - y_0)}. \quad (1.33)$$

Таблица 1.1 – Уравнения преобразования тестов и состояния ключей в каждом такте

Такт	Уравнение преобразования тестов	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
1	$y_0 = a_1 + a_2x$	0	0	0	0
2	$y_1 = a_1 + a_2(x + \beta_1 y_1) = (a_1 + a_2x) / (1 - a_2\beta_1)$	0	0	1	0
3	$y_2 = a_1 + a_2(x + \beta_1\beta_2 y_2) = (a_1 + a_2x) / (1 - a_2\beta_1\beta_2)$	0	1	0	0
4	$y_3 = a_1 + a_2(x + \beta_2 y_3) = (a_1 + a_2x) / (1 - a_2\beta_2)$	1	1	0	0
5	$y_4 = a_1 + a_2(K + 1)(x + \beta_1 y_4) = \frac{a_1 + a_2(K + 1)x}{1 - a_2(K + 1)\beta_1}$	0	0	1	1
6	$y_5 = a_1 + a_2(K + 1)(x + \beta_2 y_5) = \frac{a_1 + a_2(K + 1)x}{1 - a_2(K + 1)\beta_2}$	1	1	0	1

Из равенств (1.32) и (1.33) определяем выражения для параметров a_2 , $a_2\beta_1$ и $a_2\beta_2$:

$$a_2 = \frac{(y_1 - y_0)(y_3 - y_0)y_2}{(y_2 - y_0)y_3y_1}; \quad a_2\beta_1 = \frac{y_1 - y_0}{y_1}; \quad a_2\beta_2 = \frac{y_3 - y_0}{y_3}. \quad (1.34)$$

Вычитая уравнение для такта 2 из уравнения для такта 5 и уравнение для такта 4 из уравнения для такта 6, коэффициент преобразования K вычисляется по формуле:

$$K = \frac{y_4 - y_1 - a_2\beta_1(y_4 - y_1)}{a_2(x + \beta_1 y_4)} = \frac{y_5 - y_3 - a_2\beta_2(y_5 - y_3)}{a_2(x + \beta_2 y_5)}. \quad (1.35)$$

Из выражений (1.34) и (1.35) с помощью ВУ скорректированный результат измерения x_k вычисляется следующим образом:

$$x_k = \frac{(y_5 - y_3)(y_1 - y_0)y_4 - (y_4 - y_1)(y_3 - y_0)y_5}{(y_4 - y_1)y_3 - (y_5 - y_3)y_1} \cdot \frac{(y_2 - y_0)y_1y_3}{(y_3 - y_0)(y_1 - y_0)y_2}. \quad (1.36)$$

Из формулы (1.36) видно, что скорректированный результат измерения x_k не зависит от изменяющих параметров ГХ средства измерения, т.е. устраняются аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности. Кроме того, на точность результата измерения x_k не влияют параметры теста (K , β_1 , β_2). Неидентичность двух ОП не вызывает погрешности в ИС, что позволяет достичь высокой точности измерения. Недостатком этого алгоритма является усиление динамической составляющей погрешности, обусловленной характером изменения

значения x входной измеряемой величины X между шестью тактов измерений. Это типичный недостаток для ИС с временным разделением каналов.

В случае отличия от нуля всех коэффициентов полинома, описывающего ГХ средства измерения, ТМ не дают возможность использовать только однотипных аддитивных или мультипликативных тестов. При этом в ИС необходимо использовать и БАТ, и БМТ. Оптимальным выбором является использование одного теста определенного типа и $(n - 1)$ тестов другого типа [10]. Это не вызывает затруднений при измерении электрических величин. Например, умножение измеряемого напряжения на постоянный коэффициент, а также добавление измеряемого напряжения и опорного напряжения не представляют технической сложности. При измерении механических величин удастся сформировать тест только одного типа, что в значительной степени снижает универсальность ТМ [37, 38].

Если хотя бы один коэффициент полинома, описывающего ГХ средства измерения, равен нулю, использование однотипных аддитивных тестов в ИС обеспечивает эффективность повышения точности измерений. Это не удастся при использовании только мультипликативных тестов [10].

Техническая сложность ТМ повышения точности измерения электрических величин при использовании мультипликативных тестов заключается в необходимости обеспечить высокое обобщенное входное сопротивление масштабного преобразователя. Если этого не добиться, то в результате измерения появится методическая погрешность [4]. Как видно из уравнений (1.30) и (1.31), недостатком ТМ является необходимость вычисления отношений разностей близких между собой чисел, что увеличивает случайную составляющую погрешности.

Экспериментальные исследования в работах [23, 25] показали, что при использовании классических ТМ на основе кусочно-линейной аппроксимации нелинейной ГХ значительно увеличивается (в 20-30 раз) случайная составляющая погрешности по сравнению с обычным измерением.

В работах [25] предложено усовершенствование ТМ на основе дробно-

рациональных, степенных и трансцендентных ГХ, которое позволяет разрабатывать датчики, устойчивые к дестабилизирующим факторам в широком диапазоне измерений. Недостатком данного подхода является необходимость знать вид ГХ.

При измерении неэлектрических величин формирование БАТ на основе ОП часто связано с техническими трудностями. Область применения ИС, реализуемой на основе ТМ с ОП, ограничивается измерением электрических величин. Это также типичный недостаток итерационного метода.

Выводы к главе 1

1. Из проведенного анализа традиционных методов повышения точности измерений следует, что:
 - для их эффективной реализации требуется вводить в измерительную систему аппаратную избыточность, метрологические характеристики которой нередко должны иметь более высокие значения по сравнению с исходной измерительной системой.
 - необходимым условием для применения традиционных методов является превалирование систематической составляющей погрешности над случайной составляющей, причем случайная составляющая возрастает после применения традиционных методов.
2. При разработке методов повышения точности результатов измерений следует отдавать предпочтение подходам, обеспечивающим одновременное уменьшение всех составляющих погрешности вне зависимости от их природы и без необходимости введения аппаратной избыточности.

ГЛАВА 2

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН В СОВОКУПНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В этой главе разработаны методы повышения точности оценок измеряемых величин в совокупных измерениях. Предложены метод аддитивных совокупных измерений и метод мультипликативных совокупных измерений для линейных и мультипликативных комбинаций искомых измеряемых величин соответственно.

2.1 Совокупные измерения и гетероскедастичность

Совокупными измерениями называются проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях [7, 39, 94]. Вид функции связи между величинами может быть известен заранее или получен экспериментально. Число N сочетаний (функций) превышает число n неизвестных измеряемых величины и из-за погрешностей измерений нельзя найти такие значения измеряемых величин, чтобы одновременно удовлетворились все уравнения функции, даже если они сами по себе точно известны [96]. Избыточные $N - n$ измерений позволяют повысить точность оценок значений измеряемых величин, но приводят к несогласованности результатов измерений.

Проблема обработки измерительных данных усложняется, когда наблюдения характеризуются неравнодисперсностью (гетероскедастичностью), см., например, [99]. *Гетероскедастичность* означает неоднородность наблюдений, проявляющуюся как изменение дисперсии случайной погрешности регрессионной модели [16], и приводит к неэффективности оценок, получаемых стандартными статистическими методами. Ситуация, когда дисперсия случайной погрешности регрессионной модели остается постоянной, называется *гомоскедастичностью*.

Совокупные измерения представляют особый интерес для метрологов, в частности, в области калибровки мер [56, 60, 103]. Например, в [92, 93] предложено для обработки результатов совокупных измерений при калибровке весов использовать нелинейный метод наименьших квадратов (МНК) с множителями Лагранжа. Автор предложил итерационную процедуру получения оценок значений неизвестных измеряемых величин и их неопределенностей. Однако как выбирать начальные приближенные значения измеряемых величин для итерационной процедуры остается неясным. Кроме того, после калибровки неопределенности оценок масс увеличиваются.

В [59] совокупный метод измерений использован для поверки автомобильных весов. Совокупные измерения производятся путем установки различных весовых нагрузок во всех возможных комбинациях на автомобильные весы. Данный метод позволяет оценить значения весов нагрузок и их неопределенности, однако применим только для случая гомоскедастичности.

В [102] предложен метод калибровки измерительных СИ, основанный на совокупных свойствах набора линейной комбинации значений, являющихся выходными сигналами нескольких артефактов. Однако данный метод также применим только для случая гомоскедастичности.

В [98, 105] предложен совокупный метод измерений, который позволяет повысить точность измерений аддитивных величин. *Аддитивность* величины означает, что она должна удовлетворять следующему распределительному правилу: если объект o , характеризующийся значением x величины X , разделить на n частей o_1, \dots, o_n , которые представлены значениями соответственно x_1, \dots, x_n , той же величины X , то $x = x_1 + \dots + x_n$, т.е. значение величины, соответствующее целому объекту равно сумме значений величин, соответствующих его частям [76]. Примерами аддитивных величин являются масса, длина, напряжение постоянного тока и др. В статье отсутствует формальное обоснование факта, что метод всегда приводит к уменьшению неопределенности оценок измеряемых значений. В случае гетероскедастичности метод теряет свою эффективность.

В [104] предложенный в [98] подход был распространен на случай

гетероскедастичности с помощью использования взвешенного метода наименьших квадратов (ВМНК). Метод дает меньшую неопределенность результата измерения типа В по сравнению с методом непосредственной оценки (МНО). В статье отсутствует формальное обоснование.

В последующих разделах данной главы рассматривается предложенный автором метод повышения точности цифровых СИ с помощью организации совокупных измерений и обработки их результатов *параметрическим методом уравнивания* (ПМУ) (parametric adjustment method), получившим распространение главным образом в области геодезических измерений [8]. Данный метод позволяет снизить неопределенность типа В, вызванную максимальной допустимой погрешностью цифровых средств измерений в случае гетероскедастичности результатов измерений.

2.2 Метод аддитивных совокупных измерений

Пусть имеются n объектов o_1, \dots, o_n , характеризующихся однородными искомыми измеряемыми величинами X_1, \dots, X_n . Значения этих искомых величин будем представлять в векторной форме $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, где $(\cdot)^T$ – транспонированная матрица. Эти измеряемые величины должны быть независимыми, т.е. не связанными между собой функциональными зависимостями. Для получения оценок значений искомых измеряемых величин, число необходимых измерений должно равняться n . Проводятся все N измерений, соответствующих N известным функциям, связывающим измеряемые величины, $N > n$, причем, $N - n$ избыточных измерений [21, 22, 23] позволяют получить наилучшие оценки значений измеряемых величин с повышенной точностью.

2.2.1 Параметрическое уравнивание

Если истинные значения измеряемых величин в каждом опыте совокупных измерений обозначить через вектор $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_N^*)^T$, то

$$y_i^* = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

называется *системой параметрических уравнений связи* $f_i, i = 1, \dots, N, N > n$.

Так как истинные значения y_i^* нам неизвестны, то нельзя определить и точные значения x_j , $j = 1, \dots, n$. Однако в силу неопределенности исходной системы вместо \mathbf{y}^* и \mathbf{x} можно подобрать так называемые вектор уравненных результатов измерений (значений функций) $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N)^T$ и вектор наилучших (уравненных) оценок значений искомым измеряемых величин $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T$ такие, что:

$$\hat{y}_i = f_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n). \quad (2.2)$$

Т.к. в измерениях всегда присутствуют погрешности, вектор уравненных результатов измерений можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \delta\mathbf{y}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$ – вектор результатов измерений (измеренных значений функции); $\delta\mathbf{y} = (\delta y_1, \dots, \delta y_N)^T$ – вектор *поправок* к результатам измерений \mathbf{y} .

Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$ – вектор приближенных значений искомым измеряемых величин; и $\delta\mathbf{x} = (\delta x_1, \dots, \delta x_n)^T$ – вектор поправок к приближенным значениям искомым измеряемых величин. Тогда

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

Разложив функцию (2.2) в ряд Тейлора и ограничившись линейными членами разложения, получим:

$$\hat{y}_i = y_i + \delta y_i = \sum_{j=1}^n \delta x_j (\partial f_i / \partial \hat{x}_j)_{\hat{x}_j = \tilde{x}_j} + f_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n), \quad (2.5)$$

Откуда

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^n \delta x_j (\partial f_i / \partial \hat{x}_j)_{\hat{x}_j = \tilde{x}_j} + r_i, \quad (2.6)$$

где $r_i = f_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - y_i$, называются *невязками*.

Обозначим вектор приближенных уравненных значений через $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)^T$, где $\tilde{y}_i = f_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$. Тогда вектор невязок $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ записывается в матричном виде, как

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}. \quad (2.7)$$

Обозначим матрицу чувствительностей функций f_i через

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где $k_{ij} = \left(\partial f_i / \partial x_j \right)_{x_j = \tilde{x}_j}$. Тогда выражения (2.5) и (2.6) записываются в матричном

виде как

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\delta\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{y}}, \quad (2.9)$$

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{K}\delta\mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad (2.10)$$

а выражение (2.7) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}. \quad (2.11)$$

Пусть диагональная взвешенная матрица весов для \mathbf{y} имеет вид:

$$\mathbf{W} = \text{diag}(u_1^{-2}, \dots, u_N^{-2}) = \begin{pmatrix} u_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_N^{-2} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где $\text{diag}(\cdot)$ – диагональная матрица; каждый диагональный элемент w_{ii} в матрице \mathbf{W} равен обратному квадрату неопределенности u_i^2 результата измерения y_i , а недиагональные элементы равны 0, что означает независимость наблюдений. Матрица \mathbf{W} является положительно определенной [73], обладающей свойством $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$.

Обозначим ковариационную матрицу результатов измерений через $\mathbf{U}_y = \text{diag}(u_1^2, \dots, u_N^2)$. Тогда имеем $\mathbf{U}_y = \mathbf{W}^{-1}$.

В выражении (2.10) переменные $\delta\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{y}$ неизвестны. Для решения этого уравнения воспользуемся ВМНК при следующем условии [24, 29, 61]:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N u_i^{-2} \delta y_i^2 = (\mathbf{W}^{0.5} \delta\mathbf{y})^T (\mathbf{W}^{0.5} \delta\mathbf{y}) = \delta\mathbf{y}^T \mathbf{W} \delta\mathbf{y} \rightarrow \min. \quad (2.13)$$

Условие (2.13) выполняется, если справедливо выражение [2, 61, 27]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta \mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \delta \mathbf{y}} \frac{\partial \delta \mathbf{y}}{\partial \delta \mathbf{x}} = 2\delta \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{K} = 0, \quad (2.14)$$

откуда получаем:

$$\mathbf{K}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{y} = 0. \quad (2.15)$$

Подставляя выражение (2.10) в формуле (2.15), получаем уравнение:

$$\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K} \delta \mathbf{x} + \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{r} = 0, \quad (2.16)$$

решая которое получаем вектор поправок к приближенным значениям измеряемых величин:

$$\delta \mathbf{x} = -(\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{r}. \quad (2.17)$$

Подставляя выражение (2.17) в формулу (2.4), с учетом выражения (2.11) получаем вектор наилучших оценок значений измеряемых величин:

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} (\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) = (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{y}. \quad (2.18)$$

Из выражений (2.9) и (2.18) вектор уравненных результатов измерений вычисляется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{y}. \quad (2.19)$$

Из выражений (2.18) и (2.19) получаем ковариационные матрицы оценок значений измеряемых величин и уравненных результатов измерений [1, 73]:

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{U}_y [(\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}]^T = (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1}, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\hat{\mathbf{y}}} &= \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{U}_y (\mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W})^T \\ &= \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Оценки (2.18) и (2.19) являются приближенными, если функция f_i нелинейна. Поэтому при организации совокупных измерений следует стремиться по возможности обеспечивать линейную зависимость f_i от значений измеряемых величин, т.е.

$$f_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = k_{i1} \hat{x}_1 + \dots + k_{in} \hat{x}_n, \quad (2.22)$$

где k_{ij} – известные коэффициенты. При этом справедливы следующие условия:

- (i) функция f_i должна быть линейной комбинацией искомых измеряемых

величин [76] и

- (ii) с точки зрения практической реализуемости совокупных измерений, следует отдавать предпочтение двоичным значениям коэффициентов k_{ij} , т.е. $k_{ij} \in \{0, 1\}$.

2.2.2 Применение параметрического уравнивания в аддитивных совокупных измерениях

ПМУ был распространен автором на обработку результатов измерений произвольного происхождения путем организации избыточных совокупных измерений исследуемых величин, удовлетворяющих условиям (i) и (ii). Этот подход был назван методом *аддитивных совокупных измерений* (АСИ) (additive combined measurement – ACM). Описание этого метода опубликовано в работах [46, 62].

Возможны измерения следующих комбинаций (т.е. сумм) значений величины на n объектах o_1, \dots, o_n : всех значений x_j , взятых по одному; всех значений x_j , взятых по два, и т.д. при $j = 1, \dots, n$. На рисунке 2.1 показаны возможные комбинации значений измеряемой величины в методе АСИ.



Рисунок 2.1 – Возможные комбинации значений измеряемой величины

Очевидно, что число комбинаций значений (измерений) величин k объектов равно C_n^k (число сочетаний из n по k), $k = 1, \dots, n$. Таким образом, общее количество измерений (параметрических уравнений связи) равно

$N = \sum_{k=1}^n C_n^k = 2^n - 1$. Комбинация значений, взятых по k объектам, может быть представлена в виде вектора i -ой строкой бинарной ($N \times n$) матрицы чувствительности \mathbf{K} , где $k_{ij} = 1$ (или 0) означает, что объект o_j присутствует (или отсутствует) в i -ой комбинации значений измеряемой величины.

Матрица \mathbf{K} фактически задает последовательность (план) [51] проведения измерений, когда в каждом i -ом опыте измеряется i -ая величина, значение которой равно сумме значений величин x_j , имеющих коэффициент $k_{ij} = 1, i = 1, \dots, N$, т.е.

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} \hat{x}_j. \quad (2.23)$$

Надлежащее планирование позволяет также минимизировать эффект гистерезиса и корреляцию между результатами измерений. Для этого воспользуемся предложенным в работе [102] подходом, в котором порядок измерений предполагает поочередное увеличение и уменьшение последовательных значений \hat{y}_i . Для этого строки матрицы чувствительности (2.8) удобно представлять последовательным n -разрядным кодом Грея. Тогда каждые две соседние строки матрицы отличаются друг от друга единственным элементом.

Например, для $n = 2, N = 3$, матрица чувствительности имеет вид:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (2.24)$$

В этом случае выражение (2.22) имеет вид:

$$\hat{y}_1 = \hat{x}_2; \hat{y}_2 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2; \hat{y}_3 = \hat{x}_1. \quad (2.25)$$

В качестве приближенных значений измеряемых величин примем результаты двух необходимых измерений каждой измеряемой величины, т.е. $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T = (y_3, y_1)^T$. Для этого примера векторы оценок $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$, ковариационные матрицы $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{x}}}$ и $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{y}}}$ можно вычислить по формулам (2.18)-(2.21). Неопределенности оценок значений измеряемых величин $u(\hat{x}_j)$ и уравненных результатов измерений $u(\hat{y}_i)$ рассчитываются как корень квадратный из j - и i -

диагональных элементов ковариационных матриц $\mathbf{U}_{\hat{x}}$ и $\mathbf{U}_{\hat{y}}$, соответственно.

2.2.3 Доказательство эффективности предложенного метода АСИ

Докажем, что предложенный метод АСИ позволяет снизить неопределенность оценок измеряемых величин и всегда дает лучшую эффективность по сравнению с известным подходом, предложенным в работе [98], который далее будем обозначать S&G.

Очевидно, что корни системы уравнений (2.22) не зависят от их расположения в системе. Изменим расположение уравнений в системе (2.22) так, чтобы соответствующая ей матрица плана \mathbf{K} имела следующий вид n -разрядной последовательности:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

При этом $\{y_k \mid k = 2^{n-j}\}$ являются результатами измерения величин x_j . Введем обозначение $\mathbf{A} = \mathbf{U}_{\hat{x}} = (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1}$. Чтобы показать, что метод АСИ позволяет снизить неопределенность оценок искомым измеряемых величин, необходимо доказать следующие неравенства:

$$a_{jj} < u_k^2, \quad k = 2^{n-j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.27)$$

где a_{jj} – диагональный элемент j -й строки матрицы \mathbf{A} , $\{u_k \mid k = 2^{n-j}\}$ – неопределенности результатов измерений величин x_j .

При $n = 3$, система неравенств (2.27) имеет вид:

$$a_{11} = u^2(\hat{x}_1) < u_4^2, \quad (2.28)$$

$$a_{22} = u^2(\hat{x}_2) < u_2^2, \quad (2.29)$$

$$a_{33} = u^2(\hat{x}_3) < u_1^2. \quad (2.30)$$

Обозначим $\mathbf{B} = \mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}$, тогда матрица \mathbf{B} имеет следующий вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} u_4^{-2} + u_5^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_5^{-2} + u_7^{-2} \\ u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_2^{-2} + u_3^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} \\ u_5^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} & u_1^{-2} + u_3^{-2} + u_5^{-2} + u_7^{-2} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Так как матрица \mathbf{W} является положительно определенной, а матрица \mathbf{K} имеет полный ранг, то матрица \mathbf{B} также является положительно определённой и ее определитель имеет вид [54]:

$$\det(\mathbf{B}) = b_{11}B_{11} - b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13} > 0, \quad (2.32)$$

где B_{ij} – дополнительный минор к элементу b_{ij} матрицы \mathbf{B} .

Учитывая взаимно обратные матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} , неравенство (2.28) эквивалентно следующему неравенству:

$$(b_{11} - u_4^{-2})B_{11} - b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13} > 0, \quad (2.33)$$

или

$$\begin{vmatrix} u_5^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_5^{-2} + u_7^{-2} \\ u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_2^{-2} + u_3^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} \\ u_5^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} & u_1^{-2} + u_3^{-2} + u_5^{-2} + u_7^{-2} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.34)$$

Очевидно, что левая часть неравенства (2.34) является определителем матрицы $\mathbf{B}_1 = \mathbf{K}_1^T \mathbf{W} \mathbf{K}_1$, где матрица \mathbf{K}_1 получается из матрицы \mathbf{K} путем обращения ее элемента k_{41} в 0. Поскольку \mathbf{W} положительно определена и \mathbf{K}_1 имеет полный ранг, матрица \mathbf{B}_1 положительно определена, как и ее определитель $\det(\mathbf{B}_1) > 0$ [54]. Таким образом, неравенства (2.34) и (2.28) выполняются.

Точно так же можно доказать, что

$$\det(\mathbf{B}_2) = \begin{vmatrix} u_4^{-2} + u_5^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_5^{-2} + u_7^{-2} \\ u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} \\ u_5^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} & u_1^{-2} + u_3^{-2} + u_5^{-2} + u_7^{-2} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.35)$$

$$\det(\mathbf{B}_3) = \begin{vmatrix} u_4^{-2} + u_5^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_5^{-2} + u_7^{-2} \\ u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_2^{-2} + u_3^{-2} + u_6^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} \\ u_5^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_7^{-2} & u_3^{-2} + u_5^{-2} + u_7^{-2} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.36)$$

где матрицы $\mathbf{B}_2 = \mathbf{K}_2^T \mathbf{W} \mathbf{K}_2$, $\mathbf{B}_3 = \mathbf{K}_3^T \mathbf{W} \mathbf{K}_3$, а матрицы \mathbf{K}_2 и \mathbf{K}_3 получаются из матрицы \mathbf{K} путем обращения в ноль ее элементов k_{22} и k_{13} , соответственно. Таким образом, неравенства (2.29) и (2.30) доказаны.

Доказательство неравенства (2.27) в случаях $n \neq 3$, $n > 1$ проводится так же, как и в случае $n = 3$. Таким образом, мы доказали, что метод АСИ всегда позволяет снизить неопределенность оценок измеряемых величин. ♦

Оценки значений искомым измеряемых величин и уравненных результатов измерений с использованием S&G вычисляются по формулам [98]:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{y}, \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{y}. \quad (2.38)$$

Неопределенности оценок $u(\hat{x}_j)$ вычисляются как квадратный корень из диагонального элемента j -ой строки ковариационной матрицы, которая определяется следующим образом:

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1}. \quad (2.39)$$

Ковариационная матрица уравненных результатов измерений вычисляется по формуле:

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T. \quad (2.40)$$

Обозначим разность ковариационных матриц оценок измеряемых величин, полученных методами S&G и АСИ через:

$$\Delta = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1}. \quad (2.41)$$

Тогда диагональные элементы матрицы Δ представляют собой разности квадратов неопределенностей оценок измеряемых величин, полученных методами S&G и АСИ.

Чтобы показать, что неопределенности, полученные методом АСИ, всегда меньше или равны неопределенностям, полученным методом S&G, необходимо доказать, что матрица Δ неотрицательно определена. Действительно, из формулы (2.41) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} + (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \\
&= (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}^{-1} \left[\mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} - \mathbf{W} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \right] \\
&\quad - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \left[\mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} - \mathbf{W} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \right] \\
&= \left[(\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}^{-1} - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \right] \left[\mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} - \mathbf{W} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \right] \\
&= \left[(\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \right] \mathbf{W}^{-1} \left[\mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} - \mathbf{W} \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \right] \\
&= \left[(\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \right] \mathbf{W}^{-1} \left[(\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W} \right]^T.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Очевидно, что матрица $\Delta = \mathbf{Q} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^T$, где $\mathbf{Q} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T - (\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}$. Поскольку матрицы \mathbf{W}^{-1} положительно определена, матрица Δ неотрицательно определена, и ее диагональные элементы больше или равны нулю [55]. Другими словами, неопределенности, полученные методом АСИ, всегда меньше или равны неопределенностям, полученным методом S&G. Случай строго меньше имеет место, если матрица \mathbf{Q} имеет полный ранг. В случае гомоскедастичности, $\mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичная матрица, $\sigma \neq 0$, тогда все элементы матрицы Δ равны нулю, и имеет место равенство неопределенностей методов S&G и АСИ.

2.2.4 Геометрическая интерпретация метода аддитивных совокупных измерений

Для приведенного выше примера $n = 2$, $N = 3$ метод АСИ иллюстрирован на рисунке 2.2. В качестве выборочного среднего квадратического отклонения (СКО) s_i результаты измерений y_1, y_2, y_3 принимают их неопределенности u_1, u_2, u_3 , которые равняют длине, ширине и высоте прямоугольного параллелепипеда ABCDA'B'C'D'. Они расположены в системе трех координат. Каждая ось соответствует одному плану (измерению).

Из формул (2.18)-(2.21), оценки уравненных результатов измерений, оценки значений измеряемых величин и их неопределенности получаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 = \hat{x}_2 &= \frac{y_1(u_2^2 + u_3^2) + (y_2 - y_3)u_1^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = y_1 \cos^2 \alpha_1 + (y_2 - y_3) \sin^2 \alpha_1 \\
&= y_1 + (y_2 - y_3 - y_1) \sin^2 \alpha_1,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

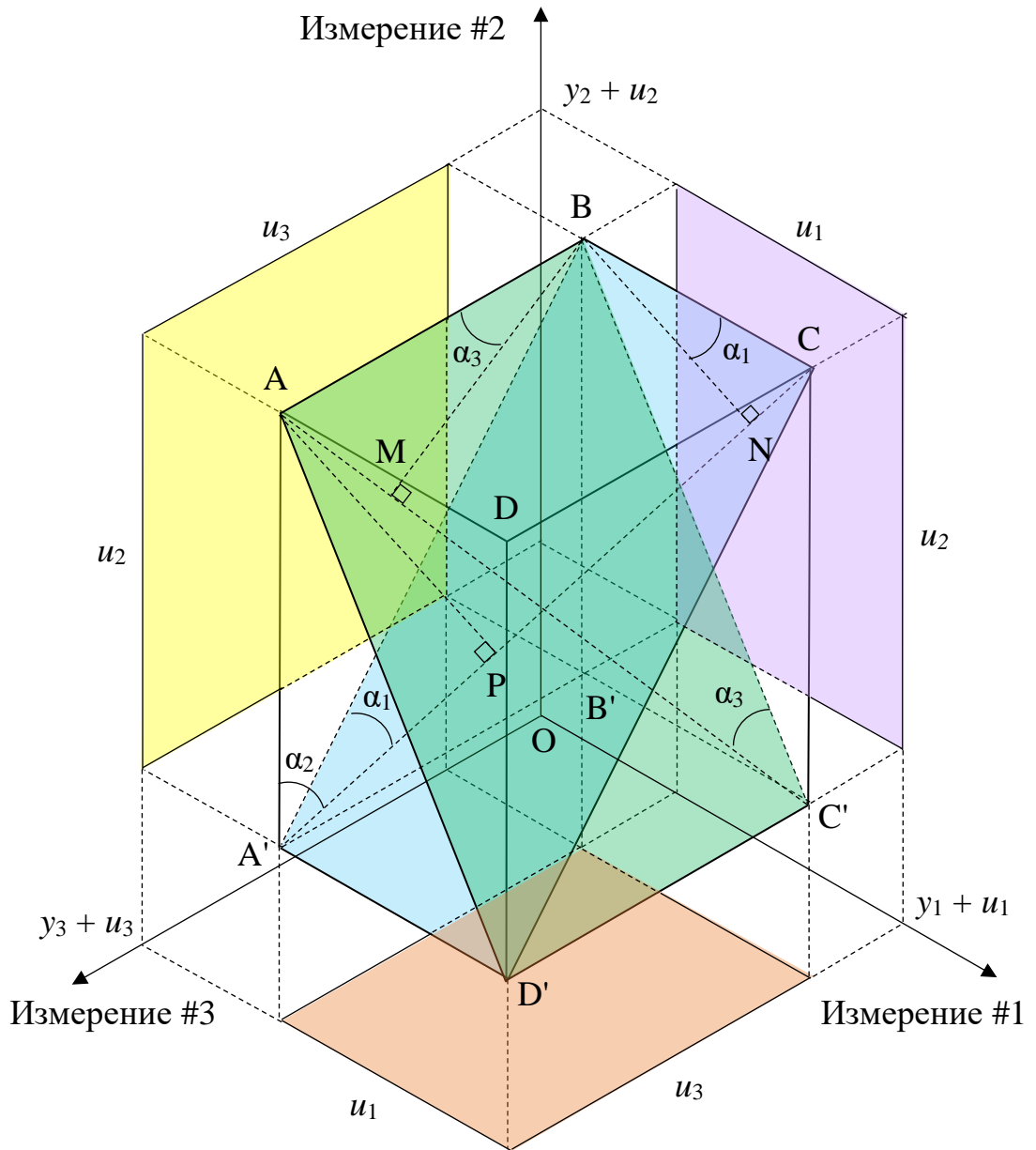


Рисунок 2.2 – Геометрическая интерпретация метода АСИ при $n = 2$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 &= \frac{y_2(u_1^2 + u_3^2) + (y_1 + y_3)u_2^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = y_2 \cos^2 \alpha_2 + (y_1 + y_3) \sin^2 \alpha_2 \\ &= y_2 + (y_1 + y_3 - y_2) \sin^2 \alpha_2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_3 = \hat{x}_1 &= \frac{y_3(u_1^2 + u_2^2) + (y_2 - y_1)u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = y_3 \cos^2 \alpha_3 + (y_2 - y_1) \sin^2 \alpha_3 \\ &= y_3 + (y_2 - y_1 - y_3) \sin^2 \alpha_3, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$u(\hat{y}_1) = u(\hat{x}_2) = u_1 \sqrt{\frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = u_1 \cos \alpha_1, \quad (2.46)$$

$$u(\hat{y}_2) = u_2 \sqrt{\frac{u_1^2 + u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = u_2 \cos \alpha_2, \quad (2.47)$$

$$u(\hat{y}_3) = u(\hat{x}_1) = u_3 \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = u_3 \cos \alpha_3, \quad (2.48)$$

где α_1 – угол, образуемый отрезками А'В и А'С; α_2 – А'А и А'С; α_3 – С'А и С'В.

Из выражений (2.46)-(2.48) следует, что $u(\hat{y}_1)/u_1 = u(\hat{x}_2)/u_1 = \cos \alpha_1 < 1$, $u(\hat{y}_2)/u_2 = \cos \alpha_2 < 1$, $u(\hat{y}_3)/u_3 = u(\hat{x}_1)/u_3 = \cos \alpha_3 < 1$, это означает, что при использовании метода АСИ, неопределенности оценок значений уравненных результатов измерений и измеряемых величин уменьшаются. Чем больше углы α_1 , α_2 и α_3 , тем сильнее эти неопределенности уменьшаются.

Неопределенности $u(\hat{y}_1)$ (равна $u(\hat{x}_2)$), $u(\hat{y}_2)$ и $u(\hat{y}_3)$ (равна $u(\hat{x}_1)$), определяются длиной сторон ВN, А'Р и ВМ (где М, N – проекции точки В на прямые АС' и А'С, Р – проекция точки А на прямую А'С), соответственно.

В зависимости от знака разности $(y_2 - y_1 - y_3)$, значения оценок \hat{y}_1 (равно \hat{x}_2), \hat{y}_2 и \hat{y}_3 (равно \hat{x}_1) могут быть больше или меньше измеренных значений y_1 , y_2 и y_3 , соответственно. Их отклонения равны $(y_2 - y_1 - y_3)\sin^2 \alpha_1$, $-(y_2 - y_1 - y_3)\sin^2 \alpha_2$, $(y_2 - y_1 - y_3)\sin^2 \alpha_3$, соответственно.

2.3 Метод мультипликативных совокупных измерений

В данном разделе предлагается предложенное автором расширение метода АСИ на случай мультипликативных совокупных измерений, когда условные уравнения (2.1) нелинейны.

В практических измерениях нередки ситуации, когда условные уравнения совокупных измерений имеют нелинейный вид [17]. Одной из таких ситуаций является организация совокупных измерений, при которой измеряемые

однородные величины комбинируются мультипликативно [47, 89]. Предложенный автором подход к обработке таких измерений будем называть методом *мультипликативных совокупных измерений* (МСИ).

Как и в случае аддитивных совокупных измерений (раздел 2.2), пусть имеются n объектов o_1, \dots, o_n , характеризующихся однородными измеряемыми величинами X_1, \dots, X_n . Значения этих величин будем представлять в векторной форме $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Обозначим вектор значений измеряемых величин через $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_N^*)^T$ и вектор их результатов измерений через $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$, диагональная взвешенная матрица для \mathbf{y} через $\mathbf{W} = \text{diag}(u_1^{-2}, \dots, u_N^{-2})$, где u_i – неопределенности результатов измерений $y_i, i = 1, \dots, N, (.)^T$ – транспонированная матрица.

В каждом i -опыте совокупных измерений, функция зависимостей значений измеряемых величин $y_i^*, i = 1, \dots, N$ от значений искомых измеряемых величин $x_j, j = 1, \dots, n$ имеет мультипликативную форму, т.е.:

$$y_i^* = c_i \prod_{j=1}^n x_j^{k_{ij}}, \quad (2.49)$$

где c_i – известный коэффициент; k_{ij} – известные элементы матрицы плана \mathbf{K} .

Разделяя обе части уравнения (2.49) на c_i и логарифмируя полученные уравнения, получаем:

$$\ln(y_i^* / c_i) = \sum_{j=1}^n k_{ij} \ln(x_j). \quad (2.50)$$

Обозначим вспомогательные векторы через $\mathbf{q}^* = (q_1^*, \dots, q_N^*)^T$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ и $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$, где:

$$q_i^* = \ln(y_i^* / c_i), \quad (2.51)$$

$$q_i = \ln(y_i / c_i), \quad (2.52)$$

$$\beta_j = \ln(x_j). \quad (2.53)$$

Тогда систему уравнений (2.50) можно переписать следующим образом:

$$q_i^* = \sum_{j=1}^n k_{ij} \beta_j. \quad (2.54)$$

Из выражения (2.52) следует, что неопределенность для некоторого q_i

равна $y_i^{-2}u_i^2$. Тогда диагональная взвешенная матрица для вектора \mathbf{q} имеет вид:

$$\mathbf{W}_q = \text{diag}(y_1^2 u_1^{-2}, \dots, y_N^2 u_N^{-2}). \quad (2.55)$$

Применяя ВМНК (см. п. 2.2.2) к системе (2.54), получаем векторы оценок для β и \mathbf{q} , и их ковариационные матрицы в следующем виде [66]:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{q}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{U}_{\hat{\beta}} = (\mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{K})^{-1}, \quad (2.57)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{q}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{K} (\mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T. \quad (2.59)$$

Из выражений (2.57)-(2.58) векторы оценок значений искомым измеряемых величин $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T$, скорректированных результатов измерений $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N)^T$ и их ковариационные матрицы $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{y}}}$ вычисляются следующим образом [66]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \exp^\circ \left[(\mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}_q \mathbf{q} \right], \quad (2.60)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c} \circ \exp^\circ(\hat{\mathbf{q}}), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{x}}} = \text{diag}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{U}_{\hat{\beta}} \text{diag}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{y}}} = \text{diag}(\hat{\mathbf{y}}) \mathbf{U}_{\hat{\mathbf{q}}} \text{diag}(\hat{\mathbf{y}}). \quad (2.63)$$

где $\exp^\circ(\cdot)$ – поэлементное экспоненцирование, $(\cdot)^\circ(\cdot)$ – произведение Адамара [97].

Неопределенности $u(\hat{x}_j)$ и $u(\hat{y}_i)$ оценок \hat{x}_j и \hat{y}_i вычисляются как квадратные корни из j - и i -диагональных элементов ковариационных матриц $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{x}}}$ и $\mathbf{U}_{\hat{\mathbf{y}}}$, соответственно.

Экспериментальные исследования предложенных в этой главе методов АСИ и МСИ будут рассмотрены в главе 4.

Выводы к главе 2

1. Предложен метод аддитивных совокупных измерений – АСИ, с помощью организации совокупных измерений и обработки их результатов параметрическим методом уравнивания. Предложенный метод позволяет снизить неопределенности оценок значений n искомых измеряемых величин и применяется в случае гетероскедастичности. При этом функции уравнивания являются линейными комбинациями значений измеряемых величин.
2. Предложена геометрическая интерпретация метода АСИ, на основе которой показано, что неопределенности оценок значений измеряемых величин и уравненных результатов измерений уменьшаются.
3. Доказано, что метод АСИ дает наименьшие неопределенности оценок искомых измеряемых величин по сравнению с известным методом S&G, основанным на методе наименьших квадратов.
4. Предложен метод мультипликативных совокупных измерений – МСИ, в котором функции уравнивания являются мультипликативными комбинациями значений измеряемых величин. Метод позволяет снизить неопределенности оценок значений n искомых измеряемых величин в случае гетероскедастичности.

ГЛАВА 3

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ПОМОЩЬЮ АГРЕГИРОВАНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

В данной главе предложен метод повышения точности оценки измеряемой величины на основе процедуры комплексирования интервалов агрегированием предпочтений (IF&PA). Процедура формирует профиль предпочтений, состоящий из ранжирований дискретных значений, полученных разбиением диапазона актуальных значений (ДАЗ), представляющего собой объединение исходных интервалов; определяет для профиля ранжирование консенсуса; и наилучшее значение в ранжировании консенсуса рассматривается в качестве результата комплексирования x^* . Исследован нелинейный эффект нормы разбиения ДАЗ на результат x^* . Предложена модификация IF&PA для получения более точного результата x^{**} .

3.1 Метод комплексирования интервальных измерительных данных агрегированием предпочтений

Метод комплексирования интервальных измерительных данных агрегированием предпочтений IF&PA (interval data fusion with preference aggregation) разработан в научном коллективе под руководством проф. Муравьева С.В. Этот метод имеет многообещающий потенциал для использования при обработке данных гетероскедастичных измерений.

Представим каждое значение x_k с соответствующей стандартной неопределенностью u_k в виде интервала $I_k = [x_k^H, x_k^B]$ на вещественной оси, который характеризуется нижней границей $x_k^H = x_k - u_k$, верхней границей $x_k^B = x_k + u_k$ и средней точкой x_k . Будем рассматривать набор из m замкнутых интервалов $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$, на вещественной числовой оси как исходную информацию для комплексирования методом IF&PA.

Под комплексированием интервальных данных [28, 50, 83, 84, 85]

понимается процедура определения такого *результатирующего интервала* $[x^* \pm u^*]$, который согласован с максимальным количеством исходных интервалов $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$, (не обязательно согласованных между собой) и с максимальной степенью правдоподобия содержит значение x^* , которое может служить представителем всех этих интервалов. *Результатом комплексирования* x^* является средняя точка результирующего интервала с соответствующей неопределенностью u^* .

3.1.1 Интервалы и диапазон актуальных значений

Результат x^* выбирается из конечного числа элементов, связанных с исходными интервалами. Для формирования ряда таких элементов введем понятие диапазона актуальных значений (ДАЗ) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, состоящего из строго упорядоченных дискретных значений a_i , $i = 1, \dots, n$.

ДАЗ образуется посредством объединения всех исходных интервалов $\{I_k\}$, при этом в качестве нижней границы ДАЗ выбирается наименьшая нижняя граница для всех интервалов, т.е. $a_1 = \min\{x_k^H \mid k = 1, \dots, m\}$, а в качестве верхней границы – наибольшая верхняя граница этих интервалов, т.е. $a_n = \max\{x_k^B \mid k = 1, \dots, m\}$. Затем полученный интервал разбивается на $n - 1$ равных подынтервалов, длина (или *норма*, или *разрешающая способность*) которых равна $h = (a_n - a_1) / (n - 1)$, для формирования элементов a_2, a_3, \dots, a_{n-1} . Выбор подходящего числа n или мощности разбиения ДАЗ был рассмотрен в [83]. В этой работе было предложено число n вычислять по формуле:

$$n = \left\lceil \frac{a_n - a_1}{0,31\sigma} \right\rceil + 1, \quad (3.1)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение значений ДАЗ до разбиения.

Зависимость между мощностью n разбиения ДАЗ и точностью результата комплексирования подробно рассматривается в п. 3.3.2.

Таким образом, в результате разбиения ДАЗ получаем множество $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_n\}$ строго упорядоченных дискретных значений a_i ,

$i = 1, \dots, n$, которые затем будут использованы в качестве альтернатив, ранжируемых определенным образом для каждого из исходных интервалов I_k .

3.1.2 Представление исходных интервальных данных инранжированиями

Основная идея метода IF&PA состоит в представлении исходных интервалов $\{I_k\}$ инранжированиями $\lambda = (a_1 \succ a_2 \succ \dots \sim a_s \succ \dots \sim a_n)$ на множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n дискретных значений, принадлежащих этим интервалам, где ранжирование λ представляет собой объединение отношения строгого порядка $\rho(a_i \succ a_j)$ и отношения толерантности $\tau(a_i \sim a_j)$. Любое k -е ранжирование λ_k , наведенное интервалом $\{I_k\}$, или *инранжирование*, формируется в соответствии со следующими формальными условиями при $i, j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 & \text{(i) } a_i \in I_k \text{ и } a_j \notin I_k \Rightarrow a_i \succ a_j; \\
 & \text{(ii) } a_i, a_j \in I_k \text{ или } a_i, a_j \notin I_k \Rightarrow a_i \sim a_j; \\
 & \text{(iii) } a_i \notin I_k \text{ и } a_j \in I_k \Rightarrow a_i \prec a_j; \\
 & \text{(iv) } a_i, a_j \text{ соседние элементы} \Rightarrow j \equiv i + 1.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Набор t инранжирований $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ будем называть *профилем предпочтений* для набора исходных интервалов $\{I_k\}$.

3.1.3 Агрегирование инранжирований

Для такого профиля предпочтений Λ можно определить *ранжирование консенсуса* β , представляющее собой наилучший компромисс между всеми инранжированиями профиля. Для поиска всех возможных ранжирований консенсуса β по *правилу Кемени* применим рекурсивный алгоритм ветвей и границ RECURSALL [86], реализующий правило Кемени.

Правило агрегирования предпочтений, известное как *правило Кемени* [20], позволяет определить такой строгий порядок β альтернатив, что расстояние $D(\beta, \Lambda)$ (определенное в терминах числа парных несоответствий между ранжированиями) от β до инранжирований исходного профиля $\Lambda(m, n)$

минимально для всех возможных строгих порядков (перестановок) ρ альтернатив:

$$\beta = \arg \min \sum_{i < j} p_{ij}, \quad (3.3)$$

где $p_{ij} = \sum_{k=1}^m [1 - \text{sgn}(a_i^k, a_j^k)]$ – элемент $(n \times n)$ матрицы профиля $[p_{ij}] = P$, строки и столбцы которой обозначены номерами альтернатив, $i, j = 1, \dots, n$;

$$\text{sgn}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1, & a_i \succ a_j \\ 0, & a_i \sim a_j \\ -1, & a_i \prec a_j \end{cases} - \text{функция, определяющая знак (или направление) пары}$$

$(a_i, a_j) \in \lambda$.

Правило Кемени допускает существование неединственного ранжирования консенсуса: число N найденных по этому правилу ранжирований консенсуса может достигать значений более 10^7 даже для небольших $m = 4$ и $n = 15$ [81]. Для приведения множества ранжирований консенсуса $V = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$ к единственному итоговому ранжированию консенсуса β_{fin} будем использовать следующее *правило свертки* [82].

Пусть $V(N, n) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$, $V \subset \Pi_n$, является набором ранжирований консенсуса для профиля $\Lambda(m, n) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, полученного для набора альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Пусть ранг r_i^k – это позиция альтернативы a_i в ранжировании консенсуса $\beta_k \in V$, $k = 1, \dots, N$. Пусть *общий ранг* r_i альтернативы a_i определяется как $r_i = \sum_{k=1}^N r_i^k$. Тогда для всех $i < j$, $i, j = 1, \dots, n$, имеем:

$$r_i < r_j \Rightarrow a_i \succ a_j, \text{ и } r_i = r_j \Rightarrow a_i \sim a_j. \quad (3.4)$$

где оба отношения \succ и \sim принадлежат единственному итоговому ранжированию консенсуса β_{fin} .

Наиболее предпочтительная альтернатива a_i , которая занимает крайнее левое положение в полученном ранжировании β_{fin} , выбирается в качестве результата комплексирования x^* . Это означает, что ранг r_i этой альтернативы равен 1, т.е.

$$x^* = a_i^1, a_i^1 \in \beta_{\text{fin}}. \quad (3.5)$$

Если β_{fin} содержит более одной наилучшей альтернативы, то есть $\{a_i^1 \sim a_j^1 \sim \dots \sim a_k^1\} \subseteq \beta_{\text{fin}}$, для $i, j, k = 1, \dots, m$, то естественным единственным представителем всех этих альтернатив (они уже отсортированы в порядке возрастания) является *выборочная медиана*:

$$x^* = \begin{cases} a_{(k+1)/2}^1, & \text{если } k \text{ нечетно;} \\ (a_{k/2}^1 + a_{1+k/2}^1)/2, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Следует отметить, что правило Кемени, реализованное как дискретная оптимизационная Задача о Ранжировании Кемени (3.3), относится к классу NP-полных [86] задач, т.е. характеризуется экспоненциальным ростом времени решения в зависимости от размерности n задачи. Это приводит к ситуации, когда мощность n разбиения ДАЗ (см. п. 3.1.1) не может быть произвольной. Фактически, она ограничена довольно небольшим верхним значением, т.е. $n \leq 20$, что позволяет алгоритму RECURSALL находить все ранжирования консенсуса за приемлемое время, равное нескольким миллисекундам. К счастью, ограничение $n \leq 20$ достаточно для того, чтобы в подавляющем большинстве практических случаев обеспечивать возможность получения существенных результатов.

3.1.4 Этапы процедуры IF&PA

Метод IF&PA включает в себя 3 основных этапа, описанных ниже. Пример практической реализации этапов показан на рисунке 3.1.

Этап 1. *Формирование ДАЗ* $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. На этом этапе происходит формирование ДАЗ из набора исходных интервалов $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$, расчет нормы h и разбиение ДАЗ на $n - 1$ равных подынтервалов длиной h в соответствии с формулой (3.1) для получения множества дискретных значений $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Этап 2. *Представление интервалов инранжированиями и построение профиля предпочтений* $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$. На основании исходных интервалов $\{I_k\}$ в соответствии с формулой (3.2) формируются инранжирования λ_k и профиль предпочтения Λ , состоящий из m инранжирований.

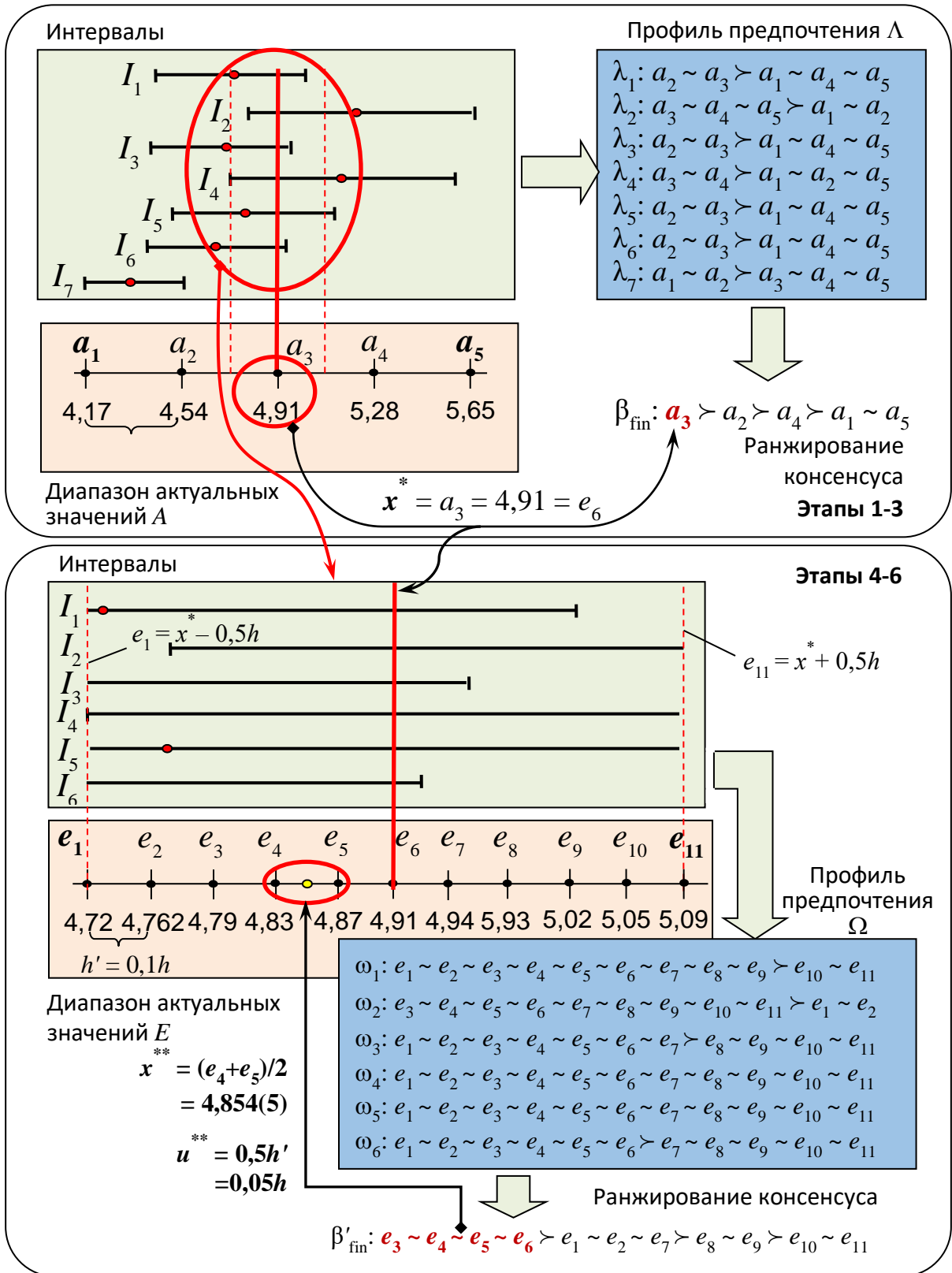


Рисунок 3.1 – Пример применения процедуры IF&PA

Этап 3. Определение результата комплексирования x^ как лучшей альтернативы в ранжировании консенсуса β_{fin} для профиля Λ . Этап включает в себя применение рекурсивного алгоритма ветвей и границ RECURSALL для*

поиска всех ранжирований консенсуса β по правилу Кемени, свертку найденных ранжирований в единственное ранжирование консенсуса β_{fin} и выбор наиболее предпочтительной альтернативы a_i в полученном ранжировании в качестве результата комплексирования x^* в соответствии с формулами (3.3)-(3.6). Неопределенность u^* результата комплексирования x^* зависит от нормы h и определяется по формуле: $u^* = \pm 0,5h$.

3.1.5 Дальнейшие этапы для повышения точности IF&PA

Очевидно, что оценка неопределенности первого результата комплексирования в третьем этапе метода IF&PA довольно грубая и имеет сравнительно невысокую точность. Поэтому процедура IF&PA была доработана путем добавления этапов 4-6 для определения более точного результата комплексирования x^{**} [63]. Доработка была реализована посредством повторного использования IF&PA для обновленного ДАЗ в окрестности x^* в границах, равных половине исходной нормы разбиения ДАЗ $\pm 0,5h$. Полученный эффект аналогичен тому, который достигается при использовании нониусной шкалы [71].

Этап 4. Формирование нового ДАЗ $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{11}\}$ с нижней границей $e_1 = x^* - 0,5h$ и верхней границей $e_{11} = x^* + 0,5h$; разбиение ДАЗ E на $n - 1 = 10$ равных подынтервалов длиной (нормой) $h' = 0,1h$ для получения элементов e_2, e_3, \dots, e_{10} (см. рисунок 3.1).

Этап 5. Представление обновленных исходных интервалов $\{I_k\}$ новыми итеранжированиями ω_k . Заметим, что исходные интервалы $\{I_k\}$ входят в новый ДАЗ E только теми своими частями, которые удовлетворяют условию $e_1 \leq e_i \leq e_{11}$, $e_i \in I_k$, $i = 1, \dots, 11$. Следовательно, некоторые из обновленных исходных интервалов будут усечены, а некоторые будут проигнорированы как не удовлетворяющие вышеупомянутому условию, т.е. значение m может уменьшиться до m_{con} . Итеранжирования ω_k формируются с использованием условий (3.2), где вместо A используется множество $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{11}\}$, а исходные интервалы $\{I_k\}$ являются обновленными. Таким образом формируется

новый профиль предпочтений $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m_{\text{con}}}\}$.

Этап 6. Определение более точного результата комплексирования x^{**} как наилучшей альтернативы в ранжировании консенсуса β'_{fin} для профиля Ω . То есть выполняются те же операции, что и на этапе 3, но для нового профиля предпочтения Ω вместо профиля Λ . Неопределенность u^{**} результата комплексирования x^{**} рассчитывается как половина нормы разбиения h' , т.е. $u^{**} = 0,5h' = 0,05h$.

Можно видеть, что точность результата комплексирования x^{**} существенно увеличивается за счет повторного использования IF&PA, что позволяет обновлять ДАЗ в окрестности x^* в границах, равных половине исходной нормы ДАЗ, т.е. $\pm 0,5h$. Полученный эффект аналогичен тому, который достигается с использованием классической *нониусной шкалы* [71].

Показанный на рисунке 3.1 пример применения метода IF&PA содержит следующие данные: исходный набор $m = 7$ интервалов $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, 7$; ДАЗ $A = \{a_1, \dots, a_5\}$; его разбиение на $n = 4$ подынтервала; соответствующий профиль предпочтений $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_7\}$; результат первого комплексирования интервалов $x^* = 4,91$; обновленный набор $m_{\text{con}} = 6$ интервалов $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, 6$ (интервал I_7 не учитывается, так как он не пересекается с диапазоном E); ДАЗ $E = \{e_1, \dots, e_{11}\}$, построенный вокруг $x^* = e_6$ и разбитый на $n = 10$ подынтервалов; соответствующий профиль предпочтений $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$; результат второго комплексирования интервалов $x^{**} = 4,854(5)$, рассчитанный как выборочная медиана четырех лучших альтернатив $\{e_3, \dots, e_6\}$ для β'_{fin} ; и неопределенность результата второго комплексирования u^{**} .

3.2 Свойства разбиения диапазона актуальных значений

Разбиение ДАЗ, изначально содержащего бесконечное число вещественных значений, на конечное число подынтервалов представляет собой процесс дискретизации данных [88]. При этом действительное число x на вещественной оси заменяется дискретным значением из ограниченного строго

упорядоченного множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда все значения x , лежащие в интервале $(a_i \pm 0,5h)$, соотносятся со значением a_i .

Очевидно, что точность представления дискретных значений a_i напрямую связана с длиной подынтервала h разбиения и, следовательно, с мощностью n разбиения. Это означает, что значение h определяет разрешающую способность метода IF&PA, т.е. минимальное возможное изменение значения x , имеющее место при переходе от непрерывного ДАЗ к дискретному множеству A . Интуитивно понятно, что чем больше число n , тем точнее может быть определен результат комплексирования x^* . Однако в [83, 87] было показано, что влияние нормы разбиения h (и, следовательно, мощности n ДАЗ-разбиения) на точность результата комплексирования существенно нелинейно. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

3.2.1 Математическое описание формирования дискретных значений

Обозначим множество числовых последовательностей, полученных при разбиении ДАЗ на $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) равных подынтервалов, через $A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_i^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}\}$. Тогда для любых $p, q \in \mathbb{N}$ ($p \neq q, p, q > 1$), мы имеем:

$$A_p = \{a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \dots, a_i^{(p)}, \dots, a_p^{(p)}\}, \quad (3.7)$$

$$A_q = \{a_1^{(q)}, a_2^{(q)}, \dots, a_j^{(q)}, \dots, a_q^{(q)}\}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что значения нижней и верхней границ ДАЗ остаются неизменными для любого разбиения, т.е. справедливо следующее равенство:

$$a_1^{(p)} = a_1^{(q)}, a_p^{(p)} = a_q^{(q)}. \quad (3.9)$$

Пример 1. На рисунке 3.2 показаны различные разбиения ДАЗ, представляющего собой интервал $[a_1^{(p)}, a_p^{(p)}]$ для мощностей $p = \{3, 4, 5, \dots, 11\}$. Периодический характер появления значений $a_i^{(p)}$ для разбиений при различных p очевиден. ♦

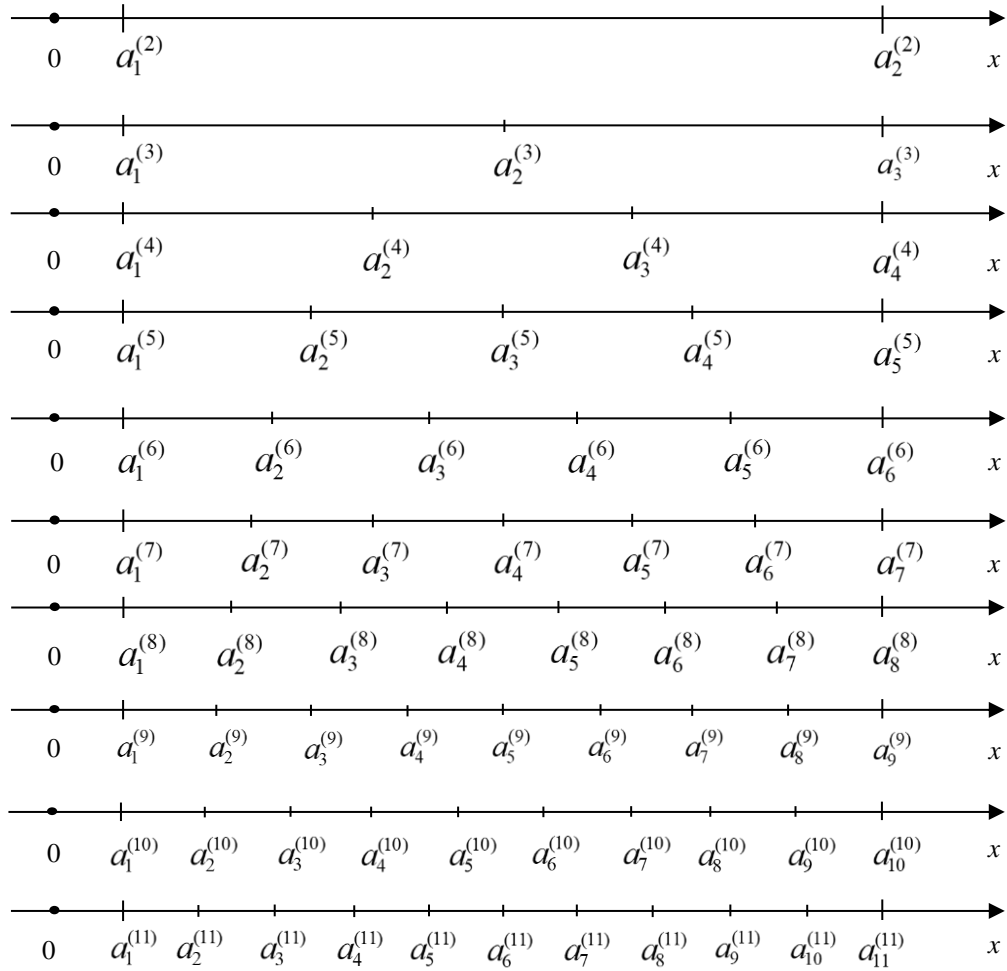


Рисунок 3.2 – Разбиение ДАЗ = $[a_1^{(p)}, a_p^{(p)}]$ на $p - 1$ подынтервалов, $p = \{3, \dots, 11\}$

Из рисунка 3.2 видно, что некоторые значения $a_i^{(p)}$ повторяются при различных разбиениях ДАЗ. При этом, значение $a_2^{(3)}$, полученное при первом разбиении ДАЗ на 2 подынтервала, встречается как $a_3^{(5)}$, $a_4^{(7)}$, $a_5^{(9)}$ в последующих разбиениях наиболее часто. Следующими по частоте появления являются значения $a_2^{(4)}$ и $a_3^{(4)}$, полученные при разбиении на 3 подынтервала. Таким образом, значения, появляющиеся в первых разбиениях при малых p , характеризуются наибольшей частотой появления в последующих разбиениях. Верно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любых двух натуральных чисел $p, q \in \mathbb{N}$ ($p, q > 1, p \neq q$), если значение $a_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, p$, полученное разбиением ДАЗ на

$p - 1$ подынтервалов, совпадает со значением $a_j^{(q)}$, $j = 1, \dots, q$, полученным разбиением ДАЗ на $q - 1$ подынтервалов, то

$$(i - 1) / (p - 1) = (j - 1) / (q - 1). \quad (3.10)$$

Доказательство. Используя известные свойства арифметической прогрессии [11], для всех $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$, имеем:

$$a_i^{(p)} = a_1^{(p)} + (i - 1)(a_p^{(p)} - a_1^{(p)}) / (p - 1), \quad (3.11)$$

$$a_j^{(q)} = a_1^{(q)} + (j - 1)(a_q^{(q)} - a_1^{(q)}) / (q - 1). \quad (3.12)$$

Тогда, из уравнения $a_i^{(p)} = a_j^{(q)}$ с учетом (3.9) получаем равенство (3.10). ♦

Очевидно, что некоторые множества A_q полностью включают в себя другие множества A_p с меньшим индексом p , т.е. $A_p \subset A_q$ для $p \leq q$. Таким образом, для $i = 1, \dots, p$, справедливо следующее выражение:

$$a_i^{(p)} \in A_q. \quad (3.13)$$

Из утверждения (3.13) получаем два следствия для нахождения множеств, включающих множество A_p (Утверждение 2), и множеств, вложенных в A_p (Утверждение 3).

Утверждение 2. Для любых натуральных чисел $p = 2, \dots, Q$, индекс $q_k = p, \dots, Q$ множества A_{q_k} , включающего множество A_p , определяется уравнением:

$$q_k = k(p - 1) + 1, \quad (3.14)$$

где $k = 1, \dots, K$; $K = [(Q - 1) / (p - 1)]$, $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x .

Доказательство. Из уравнения (3.11) и $A_p \subset A_{q_k}$ следует, что для любого $i = 2, \dots, p$ существует индекс $j = 2, \dots, q_k$ такой, что $a_i^{(p)} = a_j^{(q_k)}$. Этот индекс определяется как $j = (i - 1)l + 1$, где $l = (q_k - 1) / (p - 1)$. Поскольку $q_k = p, \dots, Q$, справедливо неравенство: $1 \leq l \leq (Q - 1) / (p - 1)$.

Очевидно, что l принимает значения из множества $\{1, 2, \dots, K\}$, где

$K = \lfloor (Q - 1)/(p - 1) \rfloor$. Тогда из выражений для l с $k = 1, \dots, K$ и $i = 2, \dots, p$, следует, что выражение (3.14) справедливо для определения q_k . Таким образом, имеет место следующее выражение:

$$1 < j = (i - 1)k + 1 \leq q_k. \blacklozenge \quad (3.22)$$

Пример 2. Для $p = 4$, $Q = 10$, множество значений l равно $\{1, 2, 3\}$, тогда множество значений q_k оказывается равным $\{4, 7, 10\}$. Следовательно, множествами, включающими множество A_4 , являются A_4, A_7, A_{10} . На рисунке 3.2 показано, что все значения $a_i^{(4)}$, $i = 1, \dots, 4$, полученные разбиением ДАЗ на 3 подынтервала, принадлежат множествам $A_7 = \{a_j^{(7)}\}$, $j = 1, \dots, 7$, и $A_{10} = \{a_k^{(10)}\}$, $k = 1, \dots, 10$, полученным разбиением ДАЗ на 6 и 9 подынтервалов соответственно. \blacklozenge

Утверждение 3. Для любого натурального числа $p \geq 2$ и индекса $q_k = 2, \dots, p$ множества A_{q_k} , входящего в A_p , выполняется условие: $q_k - 1$ является делителем числа $p - 1$, где $k = 1, \dots, K$; K равно количеству делителей $p - 1$.

Доказательство. Поскольку $A_{q_k} \subset A_p$, для любого $j = 2, \dots, q_k$ существует индекс $i = 2, \dots, p$ такой, что $a_i^{(p)} = a_j^{(q_k)}$. Из Утверждения 1 следует, что $(i - 1)/(p - 1) = (j - 1)/(q_k - 1)$. Тогда для любого $j = 2, \dots, q_k$, имеем:

$$i = [(p - 1)/(q_k - 1)](j - 1) + 1, \quad (3.15)$$

где $p - 1$ содержит $q_k - 1$, т.е. $q_k - 1$ является делителем значения $p - 1$. \blacklozenge

Пример 3. Для $p = 11$, делителями числа $p - 1$ являются 1, 2, 5, 10; тогда $K = 4$, и множествами, вложенными в A_{11} , являются A_2, A_3, A_6, A_{11} . Из рисунка 3.2 видно, что все значения $a_i^{(2)}$, $a_j^{(3)}$, $a_k^{(6)}$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, \dots, 6$, полученные при разбиении ДАЗ на 1, 2 и 5 подынтервалов соответственно, принадлежат множеству $A_{11} = \{a_i^{(11)}\}$, $i = 1, \dots, 11$, полученному при разбиении ДАЗ на 10 подынтервалов. Множества, вложенные в A_p для различных p , представлены в таблице 3.1. \blacklozenge

Таблица 3.1 – Множества, вложенные в A_p для $p = \{2, 3, \dots, 20\}$

p	Множества, вложенные в A_p	p	Множества, вложенные в A_p
2	A_2	11	A_2, A_3, A_6, A_{11}
3	A_2, A_3	12	A_2, A_{12}
4	A_2, A_4	13	$A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, A_{13}$
5	A_2, A_3, A_5	14	A_2, A_{14}
6	A_2, A_6	15	A_2, A_3, A_8, A_{15}
7	A_2, A_3, A_4, A_7	17	$A_2, A_3, A_5, A_9, A_{17}$
8	A_2, A_8	18	A_2, A_{18}
9	A_2, A_3, A_5, A_9	19	$A_2, A_3, A_4, A_7, A_{10}, A_{19}$
10	A_2, A_4, A_{10}	20	A_2, A_{20}

3.2.2 Нелинейное влияние нормы разбиения на результат комплексирования

Очевидно, что чем больше мощность n разбиения ДАЗ, тем более точный результат комплексирования x^* может быть получен (см. п. 3.1.1). Однако это не всегда так. В этом разделе мы собираемся показать, что зависимость точности результата комплексирования от нормы разбиения h существенно нелинейна. Из-за этого могут возникать ситуации, когда более точные результаты получаются при меньших значениях мощности. Как и в предыдущем разделе, здесь мы используем два натуральных числа $p, q \in \mathbb{N}$ ($p \neq q; p, q > 1$) в качестве мощностей двух соответствующих множеств A_p и A_q , каждое из которых состоит из дискретных элементов $a_i^{(p)}$ и $a_j^{(q)}$ соответственно, определенных выражениями (3.7) и (3.8).

Пусть $x_p^* = a_i^{(p)}$, $i = 1, \dots, p$, является результатом комплексирования (т.е. оценкой значения некоторой измеряемой величины), полученным с помощью метода IF&PA при разбиении ДАЗ на $q - 1$ равных подынтервалов. Определим *точность* оценки x_p^* , понимаемой как отклонение x_p^* от его номинального значения $x_{\text{ном}}$ следующим выражением:

$$\xi_p = x_p^* - x_{\text{ном}}. \quad (3.16)$$

Норма h_p , представляющая разрешающую способность процедуры IF&PA,

очевидно, определяется следующим образом:

$$h_p = (a_p^{(p)} - a_1^{(p)}) / (p - 1). \quad (3.17)$$

Ясно, что $\xi_p < u^*$. С учетом выражения для неопределенности u^* результата комплексирования (см. Этап 3 процедуры IF&PA, п. 3.1.4), справедливо следующее неравенство:

$$|\xi_p| < 0,5h_p. \quad (3.18)$$

Разделяя ДАЗ на $q - 1$ равных подынтервалов, из выражений (3.16)-(3.18) имеем:

$$a_j^{(q)} - 0,5h_q < x_{\text{НОМ}} < a_j^{(q)} + 0,5h_q. \quad (3.19)$$

Из выражений (3.12), (3.17) и (3.19) имеем:

$$a_1^{(q)} + (j - 1,5) \frac{a_q^{(q)} - a_1^{(q)}}{q - 1} < x_{\text{НОМ}} < a_1^{(q)} + (j - 0,5) \frac{a_q^{(q)} - a_1^{(q)}}{q - 1}. \quad (3.20)$$

Неравенство (3.20) с учетом выражений (3.9) и (3.16) приводит к следующему неравенству для индекса j :

$$\frac{x_p^* - \xi_p - a_1^{(p)}}{a_p^{(p)} - a_1^{(p)}} (q - 1) + 0,5 < j < \frac{x_p^* - \xi_p - a_1^{(p)}}{a_p^{(p)} - a_1^{(p)}} (q - 1) + 1,5. \quad (3.21)$$

Для случая разбиения ДАЗ на $q - 1$ равных подынтервалов, результат комплексирования может быть записан как $x_q^* = a_j^{(q)} = a_1^{(q)} + (j - 1)d_q$, где индекс j удовлетворяет неравенству (3.19). Точность ξ_q оценки x_q^* , $|\xi_q| < 0,5h_q$, имеет вид:

$$\xi_q = x_q^* - x_{\text{НОМ}} = x_q^* - x_p^* + \xi_p. \quad (3.22)$$

Уравнения (3.21) и (3.22) позволяют рассматривать точность ξ_q как функцию от мощности разбиения q и в явном виде исследовать ее интересные свойства. Например, для $p = 6$, $a_1^{(6)} = 2$ и $a_6^{(6)} = 5$, имеем $h_q = (5 - 2) / (6 - 1) = 0,6$; поведение точности ξ_q при увеличении мощности q от 6 до 20 для каждого из трех различных фиксированных номинальных значений $x_{\text{НОМ}}$ показано на рисунке 3.3.

Можно видеть, что кривые на рисунке 3.3 имеют пилообразный характер. Это означает, что точность ξ_q может скачкообразно изменяться при монотонном

увеличении числа подынтервалов разбиения q и зависит от расположения (которое, вообще говоря, является случайной величиной) номинального значения $x_{\text{НОМ}}$ относительно центра подынтервала длины h_q .

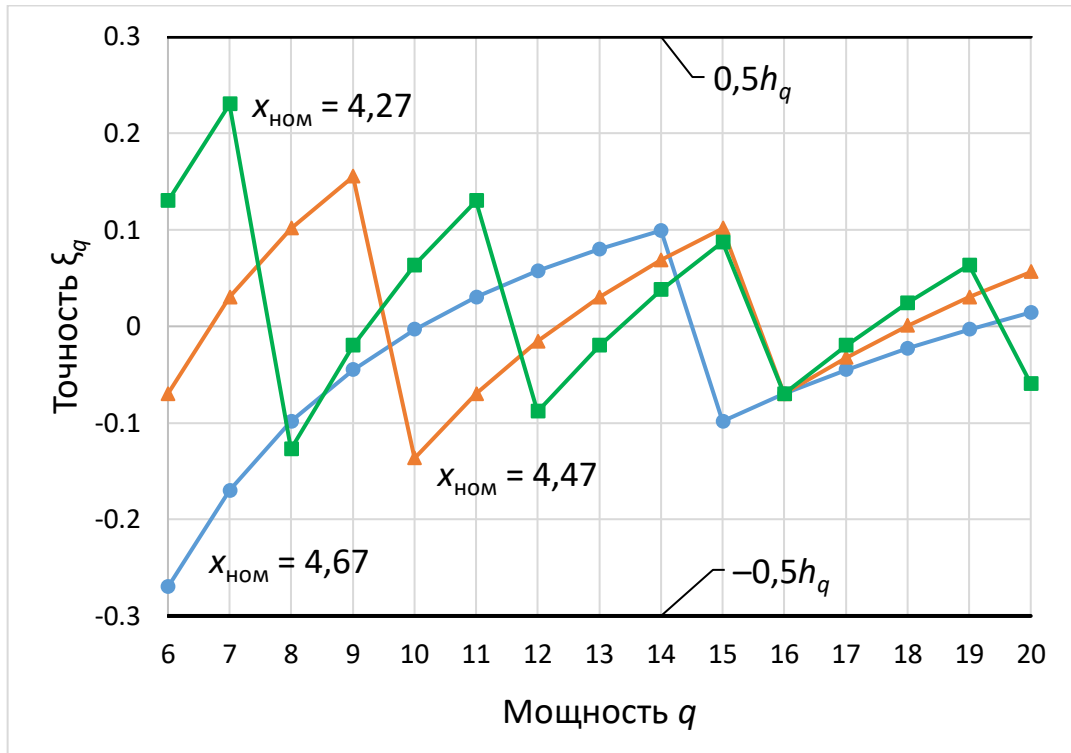


Рисунок 3.3 – Зависимость отклонения ξ_q от мощности q разбиения для $x_{\text{НОМ}} = \{4,67, 4,47, 4,27\}$ при $a_1^{(6)} = 2$ и $a_6^{(6)} = 5$, $p = 6$

Рисунок 3.4 построен на основе из тех же данных, что и рисунок 3.3, но они реорганизованы таким образом, чтобы продемонстрировать, как оценка x_q^* , найденная при различных значениях мощности q и фиксированном номинальном значении $x_{\text{НОМ}}$, распределяется по оси абсцисс. Из рисунка 3.4 явно следует, что оценка x_q^* колеблется в окрестности номинального значения $x_{\text{НОМ}}$ и стремится к нему с увеличением значения q . В частности, некоторые значения x_q^* могут быть получены как при меньшем, так и при большем числе q разбиений. Например, оказывается, что $x_{10}^* = x_{19}^* = 4,67$, то есть разбиение ДАЗ на 10 подынтервалов может дать такую же наиболее точную оценку x_q^* , как и разбиение ДАЗ на 19

подынтервалов. Существуют также пары с меньшей, но приемлемой точностью, такие как $x_9^* = x_{17}^* = 4,63$ и $x_8^* = x_{15}^* = 4,57$.

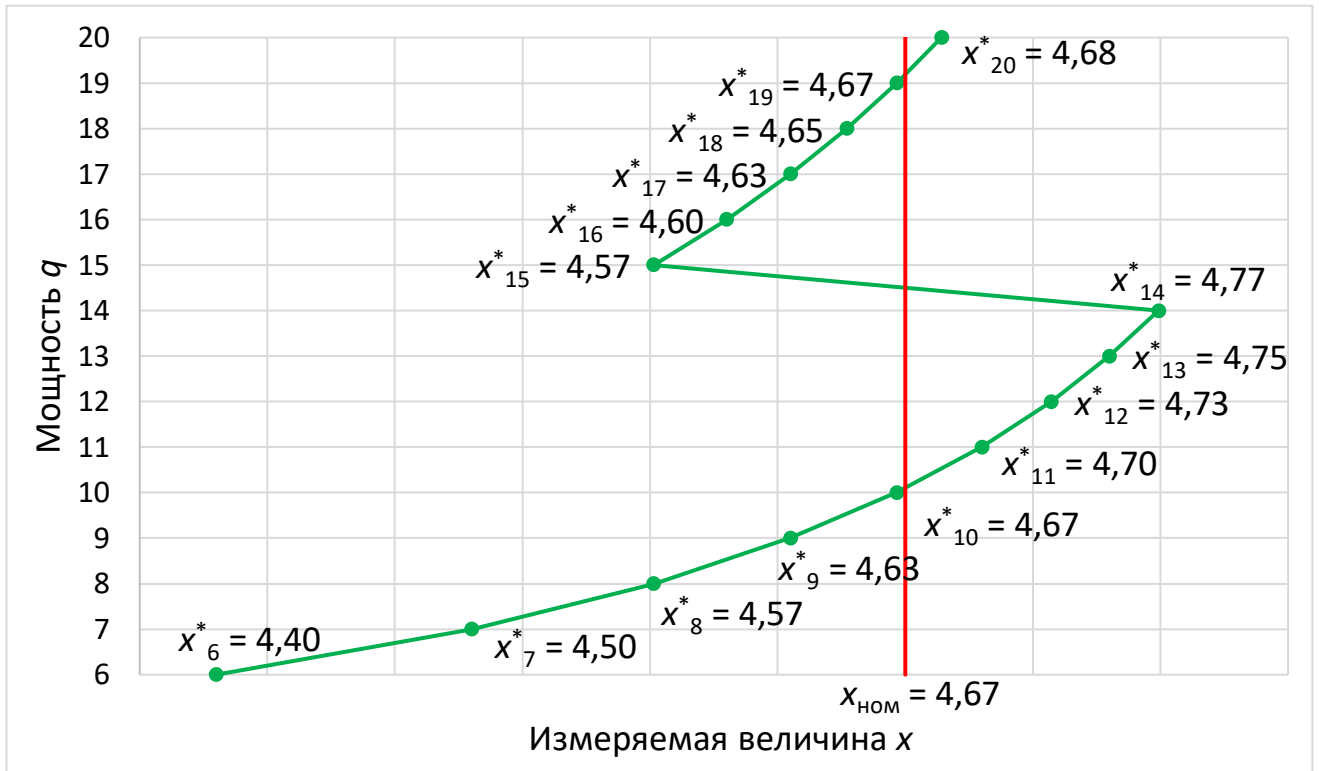


Рисунок 3.4 – Распределение оценок x_q^* в окрестности $x_{\text{НОМ}} = 4,67$ для разных мощностей q

Ясно, что меньшая мощность q разбиения является более предпочтительной, однако в реальных измерениях значение $x_{\text{НОМ}}$ неизвестно, и выбор q может быть сделан только с учетом «внешних» по отношению к исходному множеству $\{I_k\}$ интервалов соображений. Одно из таких соображений, основанное на поправке Шеппарда, было использовано в [83], что позволило применить формулу (3.1) для расчета мощности n на первом этапе процедуры IF&PA (см. п. 3.2.4). После третьего этапа результирующая неопределенность $u^* = \pm 0,5h$ остается высокой, что может быть неприемлемо для некоторых приложений. Поэтому были разработаны дополнительные этапы 4-6, которые позволили существенно минимизировать нежелательное влияние нелинейности начального разбиения ДАЗ.

Выводы к главе 3

4. Рассмотрен метод нахождения оценки измеряемой величины на основе процедуры комплексирования интервалов агрегированием предпочтений (IF&PA). Процедура формирует профиль предпочтений, состоящий из ранжирований дискретных значений, полученных разбиением диапазона актуальных значений (ДАЗ), представляющего собой объединение исходных интервалов; определяет для профиля ранжирование консенсуса; и наилучшее значение в ранжировании консенсуса рассматривается в качестве первого результата комплексирования x^* .
5. Предложено усовершенствование IF&PA путем введения дополнительных этапов, обеспечивающих повторное использование IF&PA для обновленного ДАЗ в окрестности первого результата комплексирования x^* в границах, равных половине исходной нормы разбиения ДАЗ. Это позволяет повысить точность второго результата комплексирования x^{**} и существенно снизить его неопределенность по сравнению с первым результатом комплексирования x^* .
6. Исследованы свойства разбиения диапазона актуальных значений. Предложено математическое описание процесса формирования дискретных значений. Показано, что влияние нормы разбиения ДАЗ (и, следовательно, мощности разбиения ДАЗ) на точность результата комплексирования существенно нелинейно. Усовершенствованная процедура IF&PA позволяет существенно минимизировать нежелательное влияние нелинейности разбиения ДАЗ.

ГЛАВА 4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННЫХ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

В этой главе приведены результаты экспериментальной апробации методов АСИ и МСИ в задаче повышения точности измерений активных сопротивлений. Приведены результаты обработки синтетических и реальных интервальных данных усовершенствованным методом IF&PA при согласовании значений фундаментальных физических констант. Рассматриваются также результаты обработки этим методом реальных данных для повышения точности измерений напряжения постоянного тока и угловой скорости.

4.1 Расчет погрешности используемых в экспериментах СИ

В ходе всех экспериментов в качестве характеристики точности средства измерения использовалась *максимальная допустимая погрешность* Δ_d , представляющая собой максимальное значение погрешности измерения (без учета знака), которое содержится в паспорте, свидетельстве о калибровке и (или) инструкции по эксплуатации СИ [39].

Согласно [94], каждый результат измерения характеризуется значением Δ_d , равным максимальной допустимой погрешности, и погрешностью показания Δ_n , имеющей равномерное распределение [67]. Свидетельство о калибровке СИ гарантирует, что погрешность Δ_n , включающая систематическую и случайную составляющие, находится в пределах $\pm\Delta_d$ (см. рисунок 4.1).

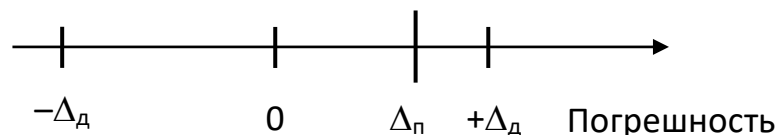


Рисунок 4.1 – Соотношение погрешностей Δ_d и Δ_n

Максимальная допустимая погрешность цифровых СИ обычно определяется на основе показания СИ и разрешения (количества единиц

младшего разряда – LSD), указанного в паспорте СИ. Например, в диапазоне 5 В при разрешении (LSD), равном 0,1 мВ, погрешность мультиметра АМ-1097 нормирована в виде формулы:

$$\Delta_d = \pm(0,06 \% \text{ от показания} + 5 \text{ LSD}). \quad (4.1)$$

Тогда, если показание составило 2,0001 В, то максимальная допускаемая погрешность $\Delta_d = \pm(0,06 \% \times 2,0001 + 5 \times 0,0001) = \pm 0,0017$ В.

В соответствии с руководством [14] оценка неопределенности результата измерения типа В получается путем анализа всей доступной информации о возможной вариативности измеряемой величины. Эта информация включает данные из свидетельства о калибровке или паспорта прибора. Таким образом, неопределенность результата измерения, вызванная максимальной допускаемой погрешностью СИ, считается составляющей неопределенности типа В и определяется по формуле [94]:

$$u_B = \Delta_d / \sqrt{3}. \quad (4.2)$$

4.2 Метод аддитивных совокупных измерений

4.2.1 Эксперимент по уменьшению неопределенности типа В

Цель эксперимента состоит в применении описанного в разделе 2.2 метода АСИ к задаче уменьшения неопределенности результата измерения типа В. Полученные результаты сравниваются с результатами применения к тем же исходным данным метода S&G (см. п. 2.2.3) [98] и метода непосредственной оценки (НО).

В ходе эксперимента оценивались значения x_1, \dots, x_5 сопротивлений пяти резисторов R_1, \dots, R_5 . Очевидно, сопротивление последовательных соединений резисторов является *аддитивной* величиной.

В методе НО, сопротивления резисторов R_1, \dots, R_5 прямо измерялись мультиметром в режиме омметра. Полученные данные использовались как исходные для методов S&G и АСИ.

Метод АСИ позволяет оценить значения x_1, \dots, x_5 и уменьшить их неопределенности по сравнению с методом НО. Для этого, помимо пяти

измерений сопротивлений отдельных резисторов R_1, \dots, R_5 , проводили измерения сопротивлений всех возможных последовательных соединений резисторов. Таким образом, количество необходимых измерений (неизвестных измеряемых величин) $n = 5$; количество всех измерений $N = 31$; количество избыточных измерений равно 26, из которых должны быть проведены

- десять измерений сопротивлений возможных разных последовательных соединений двух резисторов,
- десять измерений сопротивлений возможных разных последовательных соединений трех резисторов,
- пять измерений сопротивлений возможных разных последовательных соединений четырех резисторов, и
- одно измерение последовательного соединения пяти резисторов.

Порядок перечисленных измерений организовывали в соответствии с матрицей **К**, строки которой представлены последовательным 5-разрядным кодом Грея [102]. Транспонированная матрица **К** представлена в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Транспонированная матрица **К**

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Тогда, система параметрических уравнений связи (2.2) принимает вид (см. п. 2.2.1):

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}, \tag{4.3}$$

где $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{31})^T$, $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_5)^T$.

Номинальные значения $x_j^{\text{ном}}$, $j = 1, \dots, 5$, сопротивлений резисторов R_j были выбраны равными 4420; 4420; 1100; 1100 и 100 Ом соответственно. Четыре прецизионных резистора R_1, \dots, R_4 были типа С5-54 с наибольшей мощностью 0,125 Вт и температурным коэффициентом сопротивления (ТКС) $\pm 10 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, а в качестве R_5 использовалась катушка электрического сопротивления

измерительная P331, имеющая наибольшую допустимую мощность 1 Вт. Класс точности всех резисторов – 0,01.

Сопротивления каждого резистора и всех их возможных соединений измерялись непосредственно и однократно с помощью цифровых мультиметров двух типов *различной точности*: UT61E ($\Delta_d = 1,2 \% + 2$) и AM-1097 ($\Delta_d = 0,05 \% + 10$). Два разных типа мультиметров были использованы для того, чтобы оценить влияние точности СИ на эффективность уменьшения неопределенности.

4.2.2 Результаты и обсуждение

Результаты измерений y_i получены с учетом поправок на сопротивление щупов. Неопределенности u_i вычислялись по формуле (4.1) (см. п. 1.5). Эти данные приведены в столбцах 2 и 3 таблиц 4.2 и 4.3 для двух мультиметров AM-1097 и UT61E, соответственно.

Таблица 4.2 – Экспериментальные данные повышенной точности (AM-1097)

i	НО		S&G		АСИ	
	y_i , Ом	u_i , Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом
1	99,99	0,18	100,00	2,18	99,99	0,18
2	1199,65	1,10	1199,46	2,74	1199,69	0,66
3	1099,75	1,06	1099,46	2,29	1099,70	0,65
4	2199,55	1,60	2199,04	2,67	2199,41	0,78
5	2299,55	1,65	2299,04	2,62	2299,40	0,77
6	1199,65	1,10	1199,58	2,74	1199,70	0,66
7	1099,75	1,06	1099,58	2,29	1099,71	0,65
8	5517,95	7,76	5518,43	3,10	5518,69	1,64
9	5617,95	7,81	5618,43	3,12	5618,68	1,64
10	6717,95	8,36	6717,89	2,79	6718,39	1,65
11	6617,95	8,31	6617,89	3,19	6618,40	1,66
12	5517,95	7,76	5518,30	3,10	5518,69	1,64
13	5617,95	7,81	5618,30	3,12	5618,68	1,64
14	4519,35	2,76	4518,85	2,88	4518,97	1,54
15	4419,35	2,71	4418,85	2,38	4418,98	1,54
16	8837,95	9,42	8837,74	3,19	8838,11	1,98
17	8937,95	9,47	8937,74	3,28	8938,10	1,98
18	10036,95	10,02	10037,20	3,29	10037,81	2,03
19	9936,95	9,97	9937,20	3,58	9937,82	2,03
20	11036,95	10,52	11036,78	3,47	11037,53	2,03
21	11136,95	10,57	11136,78	2,76	11137,52	2,01

Продолжение таблицы 4.2

i	НО		S&G		АСИ	
	y_i , Ом	u_i , Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом
22	10036,95	10,02	10037,32	3,29	10037,81	2,03
23	9937,95	9,97	9937,32	3,58	9937,82	2,03
24	5517,95	7,76	5518,48	3,10	5518,84	1,64
25	5617,95	7,81	5618,48	3,12	5618,83	1,64
26	6717,95	8,36	6717,94	2,79	6718,53	1,65
27	6617,95	8,31	6617,94	3,19	6618,54	1,66
28	5517,95	7,76	5518,35	3,10	5518,83	1,64
29	5617,95	7,81	5618,35	3,12	5618,82	1,64
30	4519,55	2,76	4518,90	2,88	4519,12	1,54
31	4419,55	2,71	4418,90	2,38	4419,13	1,54

Таблица 4.3 – Экспериментальные данные пониженной точности (UT61E)

i	НО		S&G		АСИ	
	y_i , Ом	u_i , Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом
1	100,01	0,61	99,20	12,67	100,01	0,61
2	1197,83	6,99	1197,77	15,33	1197,97	4,27
3	1097,93	6,49	1098,57	12,72	1097,96	4,25
4	2195,93	11,98	2197,28	15,53	2195,99	5,51
5	2295,93	21,48	2296,48	15,07	2295,99	5,50
6	1197,83	6,99	1197,91	15,33	1198,03	4,27
7	1098,03	6,49	1098,71	12,72	1098,03	4,25
8	5514,93	37,58	5516,05	17,12	5515,06	12,11
9	5614,93	38,08	5615,24	17,22	5615,07	12,11
10	6713,93	43,57	6713,81	15,39	6713,03	12,18
11	6614,93	43,08	6614,62	17,91	6613,02	12,19
12	5514,93	37,58	5515,91	17,12	5515,00	12,11
13	5613,93	38,07	5615,10	17,22	5615,00	12,11
14	4514,93	32,58	4516,53	16,55	4517,04	11,78
15	4414,93	32,08	4417,34	13,52	4417,03	11,77
16	8833,93	54,17	8834,67	19,24	8834,09	14,43
17	8933,93	54,67	8933,87	19,78	8934,10	14,44
18	10033,93	60,17	10032,44	19,04	10032,06	14,35
19	9933,93	59,67	9933,24	20,70	9932,06	14,35
20	11033,93	65,17	11031,95	20,11	11030,08	14,07
21	11132,93	65,67	11131,15	15,85	11130,09	14,05
22	10033,93	60,17	10032,58	19,04	10032,13	14,35
23	9933,93	59,67	9933,38	20,70	9932,12	14,35
24	5514,93	37,58	5516,05	17,12	5515,09	12,11
25	5614,93	38,08	5615,24	17,22	5615,09	12,11
26	6713,93	43,57	6713,81	15,39	6713,05	12,18
27	6613,93	43,07	6614,62	17,90	6613,05	12,19

Продолжение таблицы 4.3

i	НО		S&G		АСИ	
	y_i , Ом	u_i , Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом	\hat{y}_i , Ом	$u(\hat{y}_i)$, Ом
28	5514,93	37,58	5515,91	17,12	5515,02	12,11
29	5614,93	38,08	5615,10	17,22	5615,03	12,11
30	4514,93	32,58	4516,53	16,55	4517,07	11,78
31	4414,93	32,08	4417,34	13,52	4417,06	11,77

Методы АСИ и S&G были использованы для оценивания значений искомым измеряемых величин, значений уравненных результатов измерений в каждой комбинации и их неопределенностей по формулам (2.18)-(2.21) и (2.37)-(2.40), соответственно (см. п. 2.2.1 и 2.2.2). Значения уравненных результатов измерений и их неопределенности, полученные методами АСИ и S&G, показаны в четырех правых столбцах таблиц 4.2 и 4.3.

Оценки стандартных неопределенностей $u(\hat{x}_j)$, $j = 1, \dots, 5$, искомым измеряемых величин, полученные тремя методами и двумя мультиметрами, сведены в таблицу 4.4.

Таблица 4.4 – Полученные оценки $u(\hat{x}_i)$, Ом

R_j	$x_j^{\text{НОМ}}$	AM-1097			UT61E		
		НО	S&G	АСИ	НО	S&G	АСИ
R ₁	100	0,18	2,18	0,18	0,61	12,67	0,61
R ₂	1100	1,06	2,29	0,65	6,49	12,72	4,25
R ₃	1100	1,06	2,29	0,65	6,49	12,72	4,25
R ₄	4420	2,71	2,38	1,54	32,08	13,52	11,77
R ₅	4420	2,71	2,38	1,54	32,08	13,52	11,77

Абсолютное отклонение ξ_i уравненного результата измерения \hat{y}_i от его номинального значения $y_i^{\text{НОМ}}$ вычислялось по формуле:

$$\xi_i = |\hat{y}_i - y_i^{\text{НОМ}}|. \quad (4.4)$$

В таблице 4.5 показаны абсолютные отклонения ξ_j , $j = 1, \dots, 5$, оценок искомым измеряемых величин.

Таблица 4.5 – Полученные отклонения ξ_j , Ом

$x_j^{\text{НОМ}}$	AM-1097			UT61E		
	НО	S&G	АСИ	НО	S&G	АСИ
100	0,01	0,00	0,01	0,01	0,80	0,01
1100	0,25	0,42	0,29	1,97	1,29	1,97
1100	0,25	0,54	0,30	2,07	1,43	2,04
4420	0,45	1,10	0,87	5,07	2,66	2,94
4420	0,65	1,15	1,02	5,07	2,66	2,97

На рисунках 4.2-4.5 показаны графики абсолютных отклонений ξ_i , $i = 1, \dots, 31$, уравненных результатов измерений от их номинальных значений и неопределённостей $u(\hat{y}_i)$ уравненных результатов измерений.

Из рисунков 4.2 и 4.4 видно, что отклонения ξ_i уравненных результатов измерений, полученные всеми рассматриваемыми методами, увеличиваются с увеличением значений измеряемых сопротивлений.

Для более точного СИ (AM-1097), метод АСИ дал лучшие отклонения ξ_i уравненных результатов измерений по сравнению с методом S&G. Для менее точного СИ (UT61E) лучшие отклонения ξ_i обеспечил метод S&G.

Из рисунков 4.3 и 4.5 видно, что для обоих типов мультиметров AM-1097 и UT61E метод АСИ дал наименьшие неопределенности уравненных результатов измерений. Неопределенности оценок сопротивлений резисторов R_1 и R_2 (с наибольшим номинальным значением 4420 Ом) уменьшились в 1,7 раза (для мультиметра AM-1097) и 2,7 раза (для мультиметра UT61E).

Из экспериментов следует, что чем больше номинальные значения измеряемых сопротивлений, тем меньше неопределенности $u(\hat{y}_i)$, полученные методами АСИ и S&G. При наибольшем сопротивлении (при последовательном соединении пяти резисторов), метод АСИ позволил снизить неопределенность оценки сопротивления в 5,2 раза (для AM-1097) и в 4,7 раза (для UT61E), а метод S&G – в 3,8 раза (для AM-1097) и в 4,1 раза (для UT61E). Однако при малых значениях измеряемых сопротивлений, метод S&G дал худшие неопределенности уравненных результатов измерений по сравнению с методом НО.

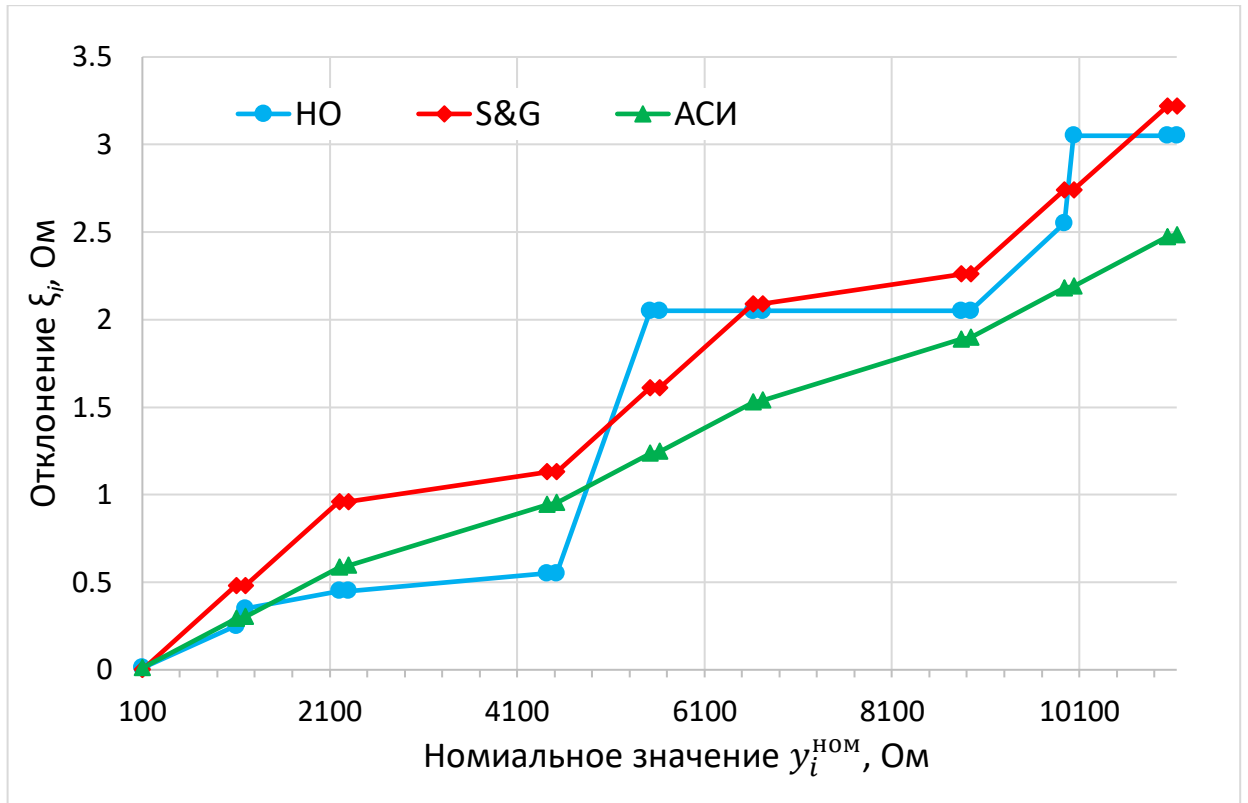


Рисунок 4.2 – Отклонение ξ_i уравненных результатов измерений, полученные методами HO, S&G и АСИ для мультиметра АМ-1097

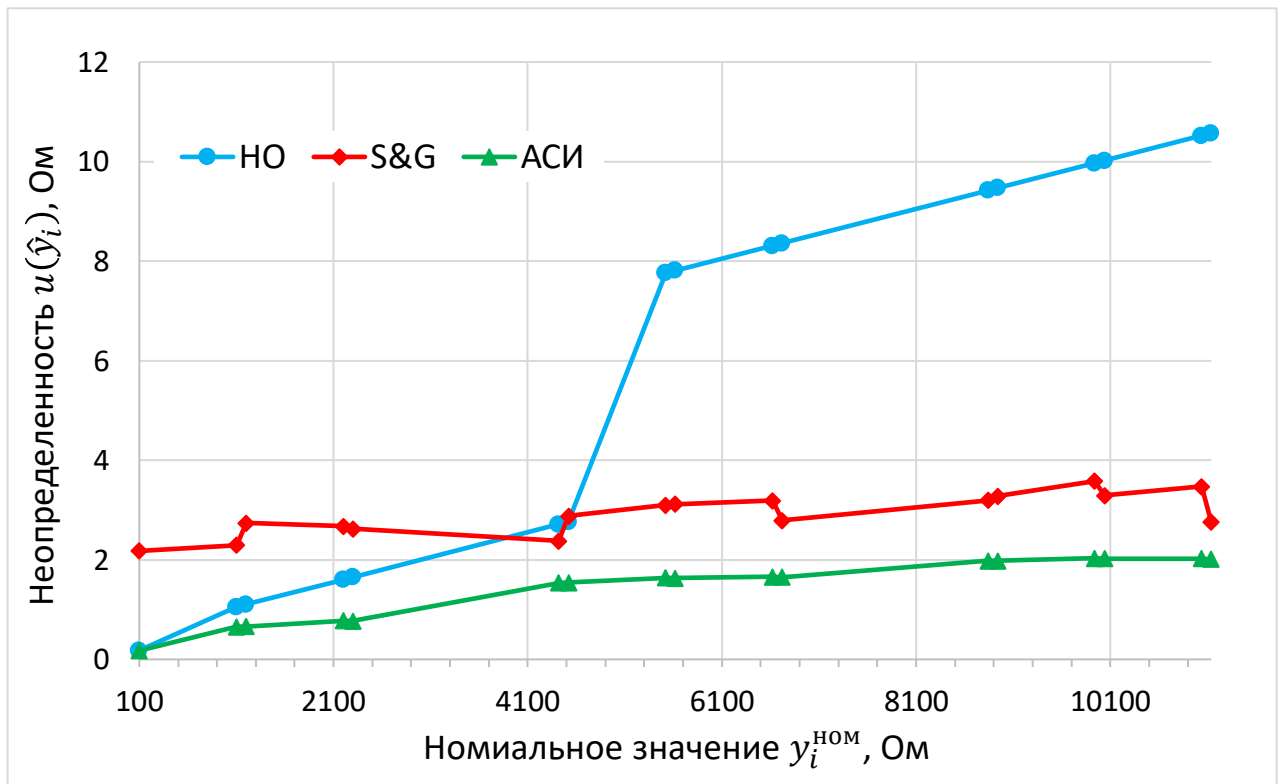


Рисунок 4.3 – Неопределенности $u(\hat{y}_i)$ уравненных результатов измерений, полученные методами HO, S&G и АСИ для мультиметра АМ-1097

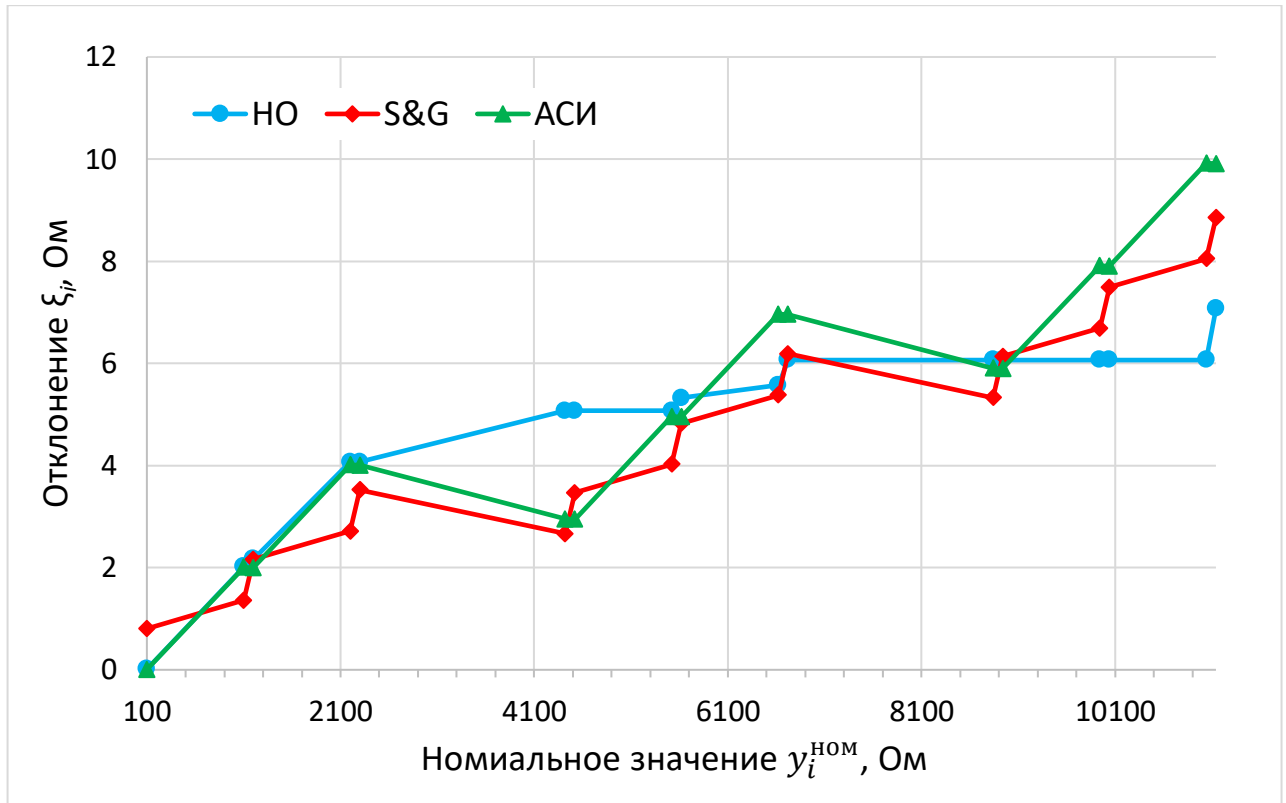


Рисунок 4.4 – Отклонение ξ_i уравненных результатов измерений, полученные методами HO, S&G и АСИ для мультиметра UT61E

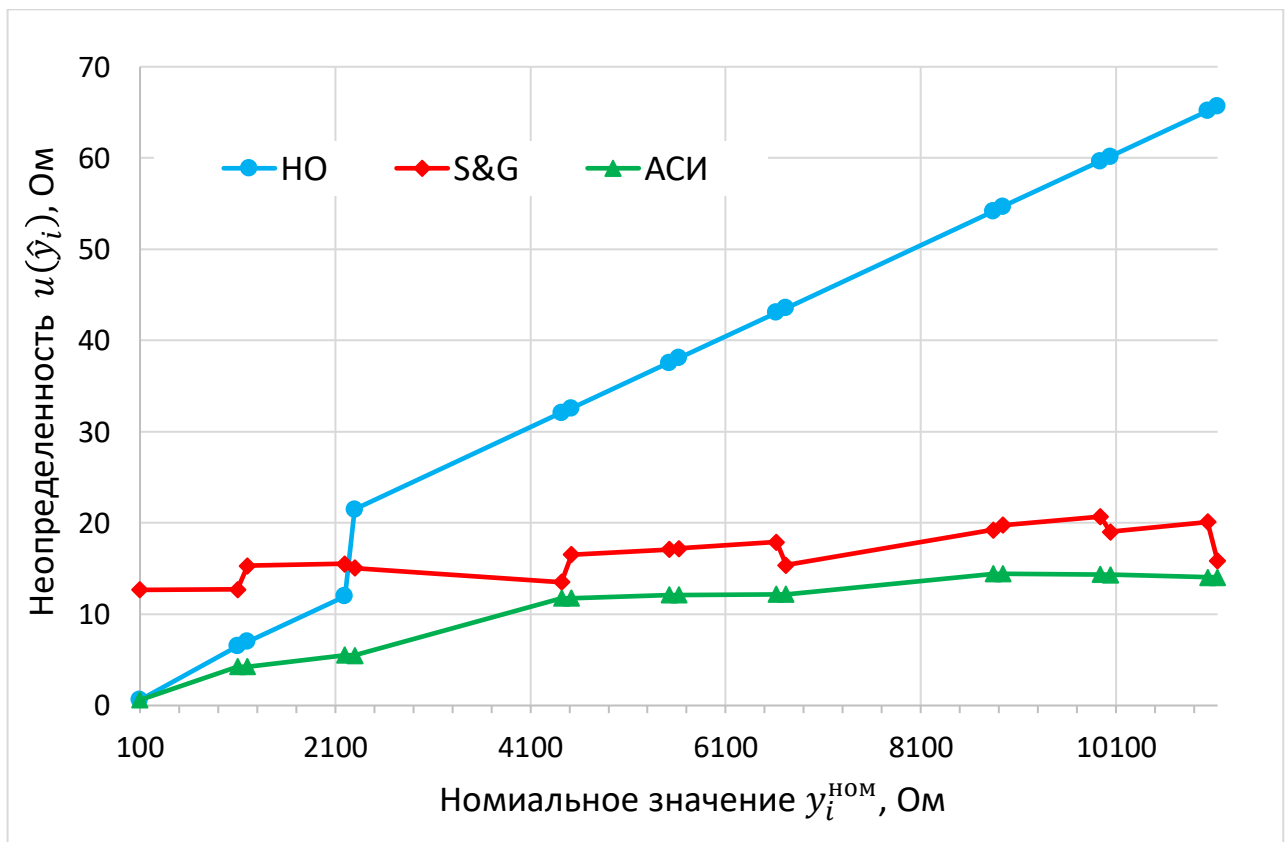


Рисунок 4.5 – Неопределенности $u(\hat{y}_i)$ уравненных результатов измерений, полученные методами HO, S&G и АСИ для мультиметра UT61E

Таким образом, результаты эксперимента подтвердили работоспособность и эффективность метода АСИ. На метод АСИ получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2020664471 [42].

4.3 Метод мультипликативных совокупных измерений

4.3.1 Эксперимент по уменьшению неопределенности типа В

Цель эксперимента состоит в применении описанного в разделе 2.3 метода МСИ к задаче уменьшения неопределенности результата измерения типа В. Полученные результаты сравниваются с результатами метода непосредственной оценки [47].

В ходе эксперимента оценивались значения x_1 , x_2 и x_3 сопротивлений трех резисторов R_1 , R_2 и R_3 . Номинальные значения $x_j^{\text{НОМ}}$, $j = 1, 2, 3$ сопротивлений резисторов R_j были выбраны равными 4420; 1100 и 1000 Ом соответственно. Прецизионные резисторы R_1 и R_2 были типа С5-54 с наибольшей мощностью 0,125 Вт и ТКС $\pm 10 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, а R_3 – катушка электрического сопротивления измерительная Р331, имеющая наибольшую допустимую мощность 1 Вт. Класс точности всех резисторов – 0,01.

При использовании метода НО, сопротивление резистора измерялось однократно мультиметром АМ-1097 в режиме омметра.

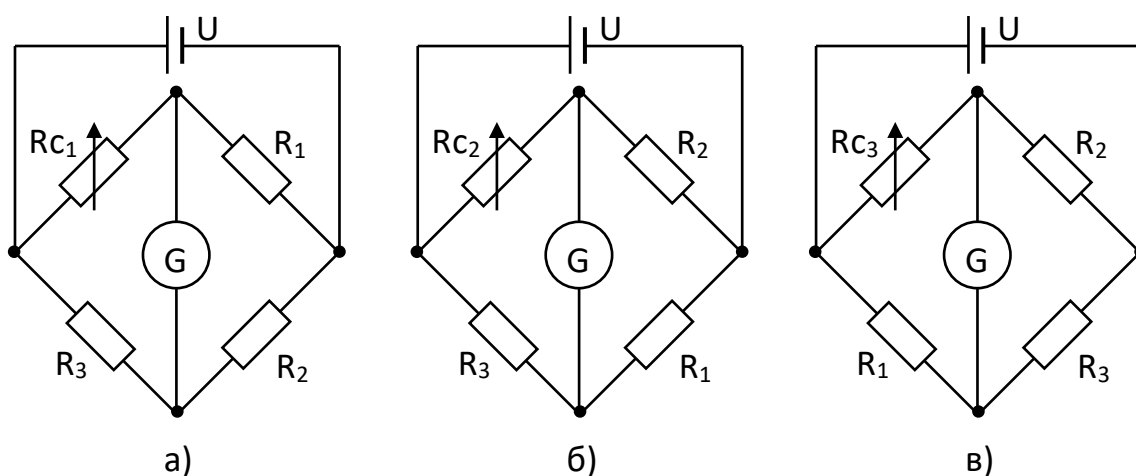


Рисунок 4.6 – Схемы измерений измерительным мостом

При использовании МСИ, вектор \hat{x} оценок сопротивлений резисторов R_1 ,

R_2 , R_3 был получен путем обработки вектора результатов измерений y с применением мостовой схемы [33]. Были проведены три измерения (опыта), соответствующие мостовые схемы для которых приведены на рисунке 4.6 а, б, в.

В каждом опыте, три сопротивления R_1 , R_2 и R_3 были включены в плечи мостовой цепи, а в роли регулируемого плеча R_{c_i} , $i = 1, 2, 3$, использовался калибратор Fluke 5520A. В качестве гальванометра G использовался модуль мультиметра National Instruments NI PXI-4072, который позволяет измерять малые токи. Для формирования напряжения постоянного тока $U = 5,25$ В использовался генератор AWG-4110. В каждом опыте мост уравнивался путем регулировки R_{c_i} с помощью калибратора Fluke 5520A до достижения нулевого значения тока, протекающего через гальванометр.

Обозначим вектор значений сопротивлений R_{c_i} , $i = 1, \dots, 3$, при уравнивании моста через $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)^T$ и вектор результатов их измерений через $y = (y_1, \dots, y_3)^T$. Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1^* = x_1 x_2^{-1} x_3 \\ y_2^* = x_1^{-1} x_2 x_3 \\ y_3^* = x_1 x_2 x_3^{-1} \end{cases} \quad (4.5)$$

Очевидно, что система (4.5) является частным случаем (2.49) (см. п. 2.3). При этом, вектор коэффициентов $c = (1, 1, 1)^T$, а матрица плана K имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

4.3.2 Результаты и обсуждение

Результаты измерений y_i были получены с учетом поправок на сопротивление щупов. Неопределенности u_i результатов измерений y_i вычислялись по формуле (4.1) (см. п. 1.5). Данные эксперимента сведены в таблицу 4.6.

Результаты расчета вектора оценок значений искомых сопротивлений \hat{x} и ковариационной матрицы $U_{\hat{x}}$, полученных методом МСИ, представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.6 – Результаты измерений сопротивлений, полученные двумя методами

i	НО		МСИ	
	$y_i, \text{ОМ}$	$u_i, \text{ОМ}$	$y_i, \text{ОМ}$	$u_i, \text{ОМ}$
1	4419,65	2,71	4018,36	0,21
2	1099,65	1,06	249,04	0,03
3	999,75	1,01	4862,18	0,24

Абсолютное отклонение $\xi_j, j = 1, \dots, 3$ оценки значения сопротивления \hat{x}_j от его номинального значения $x_j^{\text{НОМ}}$ вычислялось по формуле:

$$\xi_j = \left| \hat{x}_j - x_j^{\text{НОМ}} \right|. \quad (4.7)$$

Таблица 4.7 – Значения вектора \hat{x} и матрицы $U_{\hat{x}}$, полученные методом МСИ

$\hat{x}, \text{ОМ}$	МСИ		
		4420,25	1100,22
$U_{\hat{x}}$	$2,52 \times 10^{-2}$	$2,86 \times 10^{-3}$	$3,11 \times 10^{-3}$
	$2,86 \times 10^{-3}$	$4,27 \times 10^{-3}$	$3,24 \times 10^{-3}$
	$3,11 \times 10^{-3}$	$3,24 \times 10^{-3}$	$3,64 \times 10^{-3}$

В таблице 4.8 показаны отклонения ξ_j и неопределенности $u(\hat{x}_j)$ искомых сопротивлений, полученные методами МСИ и НО.

Таблица 4.8 – Отклонения и неопределенности искомых сопротивлений, полученные двумя методами

R_j	$x_j^{\text{НОМ}}, \text{ОМ}$	НО		МСИ	
		$\xi_j, \text{ОМ}$	$u(\hat{x}_j), \text{ОМ}$	$\xi_j, \text{ОМ}$	$u(\hat{x}_j), \text{ОМ}$
R_1	4420	0,35	2,71	0,25	0,16
R_2	1100	0,35	1,06	0,22	0,07
R_3	1000	0,25	1,01	0,23	0,06

Из таблицы 4.8 видно, что метод МСИ дает лучшие результаты по сравнению с методом НО, т.к. полученные значения оценок искомых сопротивлений наиболее близки к их номинальным значениям. Неопределенности оценок искомых сопротивлений, полученные методом МСИ, в 16-17 раз меньше

по сравнению с методом НО.

4.4 Усовершенствованный метод IF&PA

В этом разделе рассматриваются экспериментальные исследования предложенного в главе 3 усовершенствованного метода IF&PA. Обрабатываемые данные характеризуются гетероскедастичностью (см. раздел 2.1). Традиционно для обработки таких данных применяется метод взвешенного среднего (ВС). Результаты применения IF&PA будут сравниваться с результатами применения ВС на тех же входных данных.

Метод взвешенного среднего, позволяющем комплексировать данные результатов измерений одной и той же величины x .

Оценка x_{BC} по методу ВС измеряемой величины X на основе гетероскедастичных (неравноточных) результатов ее измерений x_1, \dots, x_m рассчитывается по следующей формуле [36]:

$$x_{\text{BC}} = \sum_{k=1}^m w_k x_k / \sum_{k=1}^m w_k, \quad (4.8)$$

где веса $w_k = u_k^{-2}$ определяются как значения, обратные квадратам неопределенностей u_k результатов измерений x_k , $k = 1, \dots, m$. При этом предполагается, что результаты измерений и их неопределенности независимы и нормально распределены.

Стандартная неопределенность оценки x_{BC} вычисляется следующим образом:

$$u_{\text{BC}} = \left(1 / \sum_{k=1}^m w_k \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Если результаты измерений гомоскедастичны, то веса w_k равны между собой, т.е., оценка x_{BC} становится обычным средним арифметическим.

4.4.1 Программное обеспечение для экспериментальных исследований метода IF&PA

Для проведения экспериментальных исследований метод IF&PA был реализован программно, что подтверждено свидетельством о государственной

регистрации программы для ЭВМ № 2020664470 [41].

Программное обеспечение (ПО), разработанное в среде App Designer пакета MATLAB, обеспечивает выполнение следующих функций:

- представление исходных гетероскедастичных интервалов ранжированиями на множестве дискретных значений, принадлежащих этим интервалам;
- определение ранжирования консенсуса для полученного набора ранжирований (профиля предпочтений) дискретных значений;
- формирование оценки измеряемой величины как наилучшего дискретного значения в ранжировании консенсуса и расчет ее неопределенности;
- определение уточненной оценки измеряемой величины путем выполнения предыдущих трех функций для исходных интервалов, ограниченных рассчитанной неопределенностью;
- генерация, загрузка, отображение и сохранение исходных (синтетических или реальных) данных и результатов их обработки в формате Microsoft Excel.

4.4.2 Согласование значений фундаментальных физических констант

Фундаментальными физическими константами (ФФК) называются постоянные величины, входящие в уравнения, описывающие фундаментальные законы природы и свойства материи [19]. ФФК возникают в теоретических моделях наблюдаемых явлений в виде универсальных коэффициентов в соответствующих математических выражениях.

Согласованный набор рекомендованных значений основных фундаментальных констант периодически обновляется Комитетом по данным Международного союза науки ICSU (КОДАТА) [78]. Эти значения констант вместе с их неопределенностями определяются на международном уровне с помощью специальной процедуры, называемой согласованием (adjustment). *Согласование* – это обработка множества измеренных (или рассчитанных) числовых значений, полученных экспериментально или теоретически различными методами и предоставленных разными лабораториями, для оценки наилучшего *согласованного значения* константы. Каждые четыре года Рабочая группа

КОДАТА по фундаментальным константам выполняет так называемое *least squares adjustment* (LSA) (т.е. согласование методом наименьших квадратов) фундаментальных констант с учетом всех соответствующих данных из различных источников [69, 70, 77, 79, 90].

Необходимым условием проведения процедуры согласования является *согласованность* исходных данных [69, 70]. Данные, предоставленные разными лабораториями, часто являются несогласованными, т.е. расхождение между исходными значениями превышает соответствующие неопределенности. Причиной этой несогласованности могут быть неизвестные источники неопределенности, которые следует идентифицировать, но на практике это сложно реализовать. Чтобы уменьшить несогласованность данных, приходится исключать некоторые значения из исходного согласуемого множества или увеличивать неопределенность этих значений.

Более того, определение согласованного значения физической константы на основе несогласованных входных данных требует дополнительных предположений. А именно, существующие методы, используемые для согласования, включая LSA, предполагают, что входные данные являются нормально распределенными, независимыми случайными величинами с одинаковым средним μ и точно известными дисперсиями u_k^2 , но это предположение далеко не всегда верно [74]. Вообще говоря, проблему согласования значения ФФК можно рассматривать как типичную ситуацию, когда необходимо найти наиболее достоверное значение величины и ее неопределенность на основе измерений, выполненных разными наблюдателями с помощью различных методов и инструментов в разных лабораториях и (или) условиях окружающей среды [96]. Данные, обрабатываемые в такой ситуации, называются *гетероскедастическими*, т.е. характеризующимися разными дисперсиями [53].

Среди методов комбинирования несогласованных данных одной из наиболее популярных является процедура, основанная на отношении Бёрджа [57,

58, 68, 100]. Она применяется Рабочей группой КОДАТА по фундаментальным физическим константам для согласования значений фундаментальных констант [79, 90]. Пусть x_1, \dots, x_m – это множество измеренных (или рассчитанных) значений одной и той же фундаментальной константы с соответствующими стандартными неопределенностями u_1, \dots, u_m . Необходимо объединить эти данные, чтобы получить единственную оценку x_{birge} и ее неопределенность u_{birge} .

Оценка x_{birge} обычно вычисляется как средневзвешенное значение, т.е.

$$x_{\text{birge}} = x_{\text{вс}} \quad (4.10)$$

с соответствующей неопределенностью u , определяемой по формуле (4.8), при числе m , равном количеству значений константы.

О согласованности исходных данных можно судить по известному критерию χ^2 с $m - 1$ степенями свободы:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m (x_{\text{birge}} - x_k)^2 / u_k^2, \quad (4.11)$$

полагая, что значения x_k независимы и нормально распределены с одним и тем же средним μ и *разными известными* дисперсиями u_k^2 , $k = 1, \dots, m$.

Использование отношения Бёрджа подразумевает, что значение x_k нормально распределено со средним μ и дисперсией $c^2 u_k^2$. В случае комбинирования данных по одной и той же константе значение $(\chi^2 / m - 1)$ является несмещенной оценкой величины c^2 , т.е.

$$c = \sqrt{\chi^2 / m - 1}. \quad (4.12)$$

Тогда стандартная неопределенность оценки (4.10) вычисляется следующим образом:

$$u_{\text{birge}} = cu = u\sqrt{\chi^2 / m - 1}. \quad (4.13)$$

В [100] рассмотрено модифицированное отношение Бёрджа, учитывающее стохастический характер наблюдаемого значения χ^2 (4.11) при более точной стандартной неопределенности. Существуют и другие альтернативные методы для согласования фундаментальных констант, например, методы, основанные на модели случайных эффектов [75, 100] или модели фиксированных эффектов [95,

100].

В данном разделе представлены результаты обработки интервальных комбинируемых данных о константах методом IF&PA, а также их сравнение с результатами, полученными другими методами. Обработываемые данные представляют собой как *синтезированные (смоделированные)* случайные значения, так и *реальные* значения постоянной Планка, взятые из наборов данных КОДАТА.

Моделирование проводилось с помощью специально разработанного ПО, которое позволяло генерировать синтетические псевдослучайные интервальные данные на основе метода Монте-Карло [13]. Сгенерированные данные представляли собой измеренные значения постоянной Планка с относительными неопределенностями в виде пар $\langle x_k, u_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$, где x_k – центры интервалов, а u_k – границы интервалов. В каждой индивидуальной задаче набор сгенерированных интервалов обрабатывался процедурой IF&PA и процедурой, основанной на отношении Бёрджа [100]. Были определены соответствующие результирующие оценки x^{**} и x_{birge} вместе с их относительными неопределенностями $u_{\Gamma}^{**} = u^{**} / x^{**}$ и $u_{\text{birge}_{\Gamma}} = u_{\text{birge}} / x_{\text{birge}}$.

Если номинальное значение $x_{\text{ном}}$ точно известно и (или) задано при моделировании, то о точности процедуры можно судить по отклонению ξ полученной результирующей оценки x^{**} или x_{birge} от номинального значения $x_{\text{ном}}$ [83]. То есть мерами точности процедур IF&PA и Бёрджа являлись соответственно

$$\xi^{**} = \left| x_{\text{ном}} - x^{**} \right| \text{ и } \xi_{\text{birge}} = \left| x_{\text{ном}} - x_{\text{birge}} \right|. \quad (4.14)$$

Обработка реальных данных проводилась для значений постоянной Планка h , использованных при согласованиях КОДАТА в 2006 и 2017 годах. С помощью процедуры IF&PA были определены результирующие оценки и соответствующие относительные неопределенности. Полученные результаты процедуры IF&PA сравнивали с соответствующими результатами процедур, основанных на отношении Бёрджа, модифицированном отношении Бёрджа,

модели случайных эффектов и модели фиксированных эффектов [100].

Обработка данных численного моделирования

При моделировании в качестве номинального (истинного) значения $x_{\text{ном}}$ измеряемой величины использовалось рекомендованное значение КОДАТА $6,626070150 (69) \times 10^{-34}$ Дж·с. Число m интервалов было принято равным 15, и были решены по 100 индивидуальных задач для нормально и равномерно распределенных исходных интервальных данных. Пример смоделированных (нормально распределенных) значений x_k (которые представляют значения постоянной Планка h_k) и соответствующих относительных неопределенностей $u_r = u_k / x_k$ для одной произвольно выбранной задачи представлен в таблице 4.9.

Таблица 4.9 – Смоделированные измеренные значения $x_k = h_k$ постоянной Планка с соответствующими относительными неопределенностями u_r

Индекс k интервала	$x_k = h_k$, Дж·с	u_r
1	$6,626\ 070\ 165\ (30) \times 10^{-34}$	$1,65 \times 10^{-9}$
2	$6,626\ 070\ 114\ (63) \times 10^{-34}$	$1,17 \times 10^{-9}$
3	$6,626\ 070\ 114\ (74) \times 10^{-34}$	$1,02 \times 10^{-8}$
4	$6,626\ 070\ 112\ (48) \times 10^{-34}$	$4,40 \times 10^{-9}$
5	$6,626\ 070\ 116\ (10) \times 10^{-34}$	$1,39 \times 10^{-9}$
6	$6,626\ 070\ 114\ (12) \times 10^{-34}$	$1,22 \times 10^{-8}$
7	$6,626\ 070\ 116\ (62) \times 10^{-34}$	$5,75 \times 10^{-9}$
8	$6,626\ 070\ 113\ (97) \times 10^{-34}$	$1,19 \times 10^{-8}$
9	$6,626\ 070\ 119\ (69) \times 10^{-34}$	$7,64 \times 10^{-9}$
10	$6,626\ 070\ 112\ (84) \times 10^{-34}$	$3,43 \times 10^{-9}$
11	$6,626\ 070\ 116\ (15) \times 10^{-34}$	$5,45 \times 10^{-9}$
12	$6,626\ 070\ 110\ (72) \times 10^{-34}$	$1,02 \times 10^{-8}$
13	$6,626\ 070\ 111\ (91) \times 10^{-34}$	$1,30 \times 10^{-8}$
14	$6,626\ 070\ 113\ (20) \times 10^{-34}$	$1,07 \times 10^{-8}$
15	$6,626\ 070\ 113\ (00) \times 10^{-34}$	$1,01 \times 10^{-8}$

Результаты, полученные двумя процедурами для конкретного примера из таблицы 4.9, сведены в таблицу 4.10.

Таблица 4.10 – Оценки постоянной Планка для данных из таблицы 4.9

Метод	Оценка h , Дж·с	Оценка u_r	$\xi / 10^{-34}$, Дж·с
Отношение Бёрджа	$x_{\text{birge}} = 6,626\ 070\ 153\ (23) \times 10^{-34}$	$u_{\text{birge}_r} = 6,76 \times 10^{-10}$	$\xi_{\text{birge}} = 2,5 \times 10^{-9}$
IF&PA	$x^{**} = 6,626\ 070\ 149\ (97) \times 10^{-34}$	$u_r^{**} = 1,10 \times 10^{-9}$	$\xi^{**} = 7,2 \times 10^{-10}$

Синтетические интервальные данные, а также полученные результаты двух процедур показаны на рисунке 4.7. Пунктирная линия на графике указывает номинальное значение $x_{\text{ном}}$. Для данного примера относительные неопределенности для обеих процедур почти одинаковы, в то время как итоговая оценка, полученная IF&PA, ближе к номинальному значению.

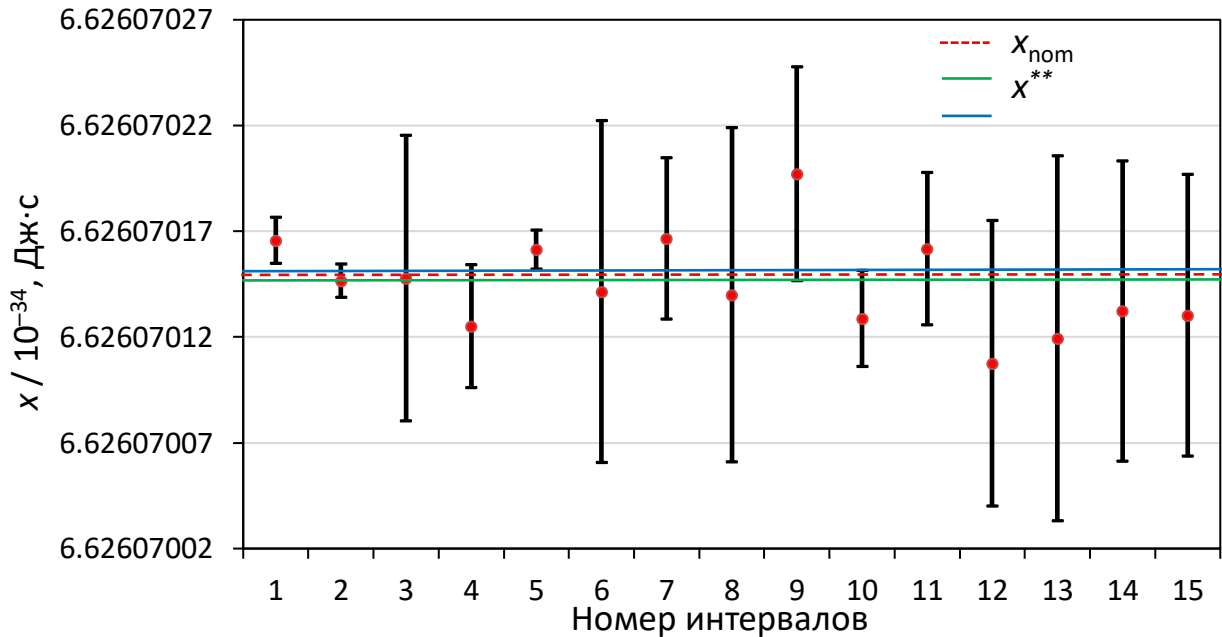


Рисунок 4.7 – Пример смоделированных интервальных данных и оценок, полученных процедурами IF&PA (зеленая линия) и Бёрджа (синяя линия)

Синтетические данные также использовались для экспериментальной проверки нелинейности влияния мощности разбиения n на точность результата комплексирования. В каждой индивидуальной задаче для каждого $n = 4, 5, \dots, 15$ результат комплексирования x^* определялся методом IF&PA (этапы 1-3, см. п. 3.1.4). В качестве примера результаты x^* , полученные для исходных данных из таблицы 4.9, показаны на рисунке 4.8.

Из рисунка 4.8 видно, что разные значения мощности n действительно приводят к разным результатам, оказывая сильное влияние на точность процедуры. На этапе 3 мощность $n = 13$, рассчитанная по формуле (3.5), позволяет получить оценку $x^* = 6,626\,070\,149\,(08) \times 10^{-34}$ Дж·с (обозначена красной точкой на рисунке 4.8), которая является довольно точным, но не лучшим результатом для этой индивидуальной задачи. В таких условиях настоятельно требуется проведение дополнительных этапов (этапы 4-6) для повышения точности оценки.

Действительно, рисунок 4.8 показывает, что результат комплексирования $x^{**} = 6,626\ 070\ 149\ (97) \times 10^{-34}$ Дж·с (обозначен оранжевой линией на рисунке 4.8), определенный на этапе 6, расположен ближе к номинальному значению.

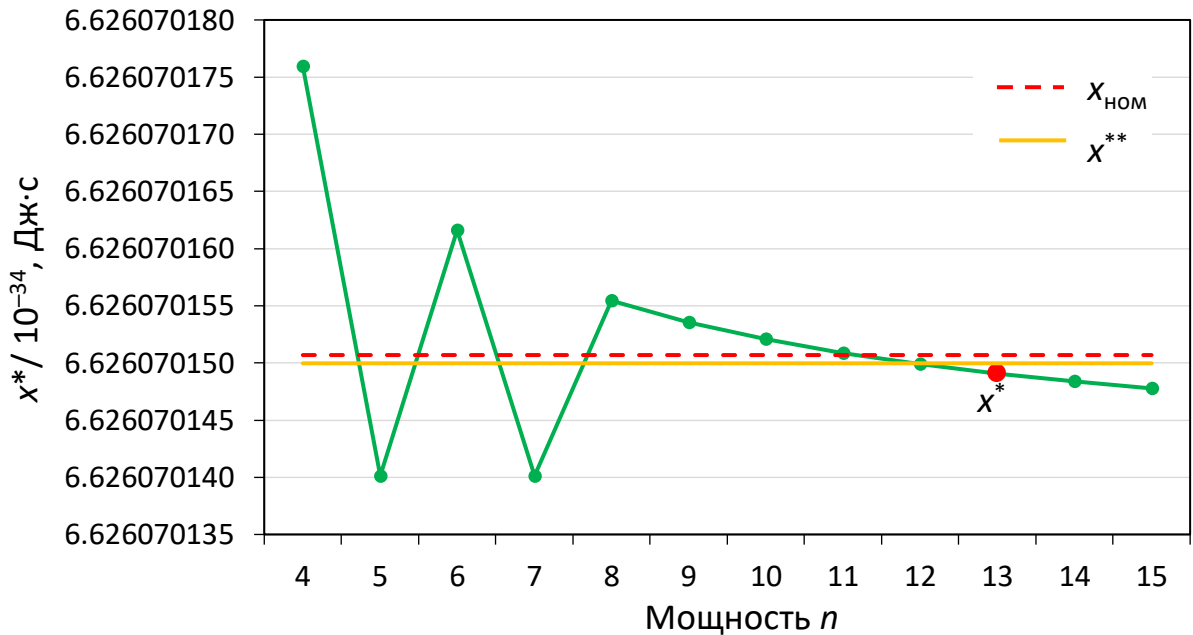


Рисунок 4.8 – Результаты комплексирования x^* , полученные на третьем этапе для разных значений мощности n

Для сравнения точности используемых методов IF&PA и Бёрджа результаты решений 100 индивидуальных задач приведены в таблицах 4.11 и 4.12.

Таблица 4.11 – Оценки значений постоянной Планка, относительные неопределенности и отклонения от номинального значения, полученные методами IF&PA и Бёрджа для 100 индивидуальных задач (нормальное распределение)

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с
1	6,626 070 155 (27)	$1,42 \times 10^{-10}$	$4,58 \times 10^{-9}$	6,626 070 145 (51)	$1,05 \times 10^{-9}$	$5,18 \times 10^{-9}$
2	6,626 070 158 (32)	$1,51 \times 10^{-10}$	$7,63 \times 10^{-9}$	6,626 070 129 (99)	$2,00 \times 10^{-9}$	$2,07 \times 10^{-8}$
3	6,626 070 144 (89)	$1,12 \times 10^{-10}$	$5,80 \times 10^{-9}$	6,626 070 155 (34)	$1,94 \times 10^{-10}$	$4,65 \times 10^{-9}$
4	6,626 070 157 (34)	$2,11 \times 10^{-10}$	$6,65 \times 10^{-9}$	6,626 070 138 (90)	$2,51 \times 10^{-9}$	$1,18 \times 10^{-8}$
5	6,626 070 142 (69)	$8,15 \times 10^{-11}$	$8,00 \times 10^{-9}$	6,626 070 156 (68)	$3,30 \times 10^{-10}$	$5,99 \times 10^{-9}$
6	6,626 070 148 (43)	$2,13 \times 10^{-10}$	$2,26 \times 10^{-9}$	6,626 070 188 (22)	$9,52 \times 10^{-10}$	$3,75 \times 10^{-8}$
7	6,626 070 169 (89)	$1,26 \times 10^{-10}$	$1,92 \times 10^{-8}$	6,626 070 152 (43)	$1,04 \times 10^{-9}$	$1,74 \times 10^{-9}$
8	6,626 070 145 (09)	$8,74 \times 10^{-11}$	$5,60 \times 10^{-9}$	6,626 070 149 (16)	$1,05 \times 10^{-9}$	$1,53 \times 10^{-9}$
9	6,626 070 153 (88)	$1,20 \times 10^{-10}$	$3,19 \times 10^{-9}$	6,626 070 146 (50)	$5,42 \times 10^{-10}$	$4,19 \times 10^{-9}$
10	6,626 070 184 (61)	$2,61 \times 10^{-10}$	$3,39 \times 10^{-8}$	6,626 070 272 (78)	$5,19 \times 10^{-10}$	$1,22 \times 10^{-7}$
11	6,626 070 149 (77)	$2,25 \times 10^{-11}$	$9,20 \times 10^{-10}$	6,626 070 155 (12)	$3,36 \times 10^{-10}$	$4,43 \times 10^{-9}$
12	6,626 070 165 (50)	$2,38 \times 10^{-10}$	$1,48 \times 10^{-8}$	6,626 070 157 (83)	$1,32 \times 10^{-9}$	$7,14 \times 10^{-9}$

Продолжение таблицы 4.11

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{\text{birge}} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{\text{birge}} \times 10^{34}$, Дж·с
13	6,626 070 179 (17)	$3,89 \times 10^{-10}$	$2,85 \times 10^{-8}$	6,626 070 177 (91)	$4,38 \times 10^{-10}$	$2,72 \times 10^{-8}$
14	6,626 070 128 (02)	$1,47 \times 10^{-10}$	$2,27 \times 10^{-8}$	6,626 070 147 (05)	$2,01 \times 10^{-10}$	$3,64 \times 10^{-9}$
15	6,626 070 189 (12)	$1,84 \times 10^{-10}$	$3,84 \times 10^{-8}$	6,626 070 171 (30)	$9,66 \times 10^{-10}$	$2,06 \times 10^{-8}$
16	6,626 070 172 (97)	$1,68 \times 10^{-10}$	$2,23 \times 10^{-8}$	6,626 070 077 (33)	$9,57 \times 10^{-10}$	$7,34 \times 10^{-8}$
17	6,626 070 151 (95)	$6,78 \times 10^{-11}$	$1,26 \times 10^{-9}$	6,626 070 150 (87)	$7,60 \times 10^{-10}$	$1,81 \times 10^{-10}$
18	6,626 070 171 (41)	$1,74 \times 10^{-10}$	$2,07 \times 10^{-8}$	6,626 070 146 (57)	$1,84 \times 10^{-9}$	$4,12 \times 10^{-9}$
19	6,626 070 149 (84)	$2,90 \times 10^{-10}$	$8,45 \times 10^{-10}$	6,626 070 157 (06)	$1,42 \times 10^{-10}$	$6,37 \times 10^{-9}$
20	6,626 070 158 (16)	$1,41 \times 10^{-10}$	$7,47 \times 10^{-9}$	6,626 070 186 (95)	$2,01 \times 10^{-9}$	$3,63 \times 10^{-8}$
21	6,626 070 155 (20)	$5,77 \times 10^{-11}$	$4,51 \times 10^{-9}$	6,626 070 153 (22)	$6,30 \times 10^{-11}$	$2,53 \times 10^{-9}$
22	6,626 070 156 (38)	$2,16 \times 10^{-10}$	$5,69 \times 10^{-9}$	6,626 070 115 (95)	$1,62 \times 10^{-9}$	$3,47 \times 10^{-8}$
23	6,626 070 156 (27)	$1,40 \times 10^{-10}$	$5,58 \times 10^{-9}$	6,626 070 168 (29)	$8,63 \times 10^{-10}$	$1,76 \times 10^{-8}$
24	6,626 070 157 (99)	$3,37 \times 10^{-10}$	$7,30 \times 10^{-9}$	6,626 070 226 (40)	$1,13 \times 10^{-9}$	$7,57 \times 10^{-8}$
25	6,626 070 168 (42)	$1,31 \times 10^{-10}$	$1,77 \times 10^{-8}$	6,626 070 166 (97)	$4,81 \times 10^{-10}$	$1,63 \times 10^{-8}$
26	6,626 070 152 (41)	$6,31 \times 10^{-11}$	$1,72 \times 10^{-9}$	6,626 070 166 (46)	$5,93 \times 10^{-10}$	$1,58 \times 10^{-8}$
27	6,626 070 149 (57)	$2,23 \times 10^{-11}$	$1,12 \times 10^{-9}$	6,626 070 146 (75)	$1,76 \times 10^{-10}$	$3,94 \times 10^{-9}$
28	6,626 070 128 (96)	$2,14 \times 10^{-10}$	$2,17 \times 10^{-8}$	6,626 070 144 (06)	$1,23 \times 10^{-9}$	$6,63 \times 10^{-9}$
29	6,626 070 201 (70)	$4,51 \times 10^{-10}$	$5,10 \times 10^{-8}$	6,626 070 141 (91)	$3,90 \times 10^{-11}$	$8,79 \times 10^{-9}$
30	6,626 070 125 (96)	$3,00 \times 10^{-10}$	$2,47 \times 10^{-8}$	6,626 070 146 (34)	$1,28 \times 10^{-9}$	$4,35 \times 10^{-9}$
31	6,626 070 158 (93)	$9,36 \times 10^{-11}$	$8,24 \times 10^{-9}$	6,626 070 171 (18)	$1,34 \times 10^{-9}$	$2,05 \times 10^{-8}$
32	6,626 070 208 (89)	$2,54 \times 10^{-10}$	$5,82 \times 10^{-8}$	6,626 070 184 (88)	$2,35 \times 10^{-9}$	$3,42 \times 10^{-8}$
33	6,626 070 129 (64)	$2,44 \times 10^{-10}$	$2,10 \times 10^{-8}$	6,626 070 184 (58)	$7,32 \times 10^{-10}$	$3,39 \times 10^{-8}$
34	6,626 070 147 (98)	$2,43 \times 10^{-10}$	$2,71 \times 10^{-9}$	6,626 070 180 (03)	$1,85 \times 10^{-9}$	$2,93 \times 10^{-8}$
35	6,626 070 146 (96)	$1,32 \times 10^{-10}$	$3,73 \times 10^{-9}$	6,626 070 139 (06)	$9,25 \times 10^{-10}$	$1,16 \times 10^{-8}$
36	6,626 070 150 (54)	$1,93 \times 10^{-12}$	$1,50 \times 10^{-10}$	6,626 070 150 (69)	$8,00 \times 10^{-12}$	$1,00 \times 10^{-12}$
37	6,626 070 148 (91)	$1,26 \times 10^{-10}$	$1,78 \times 10^{-9}$	6,626 070 166 (60)	$1,21 \times 10^{-9}$	$1,59 \times 10^{-8}$
38	6,626 070 149 (08)	$1,40 \times 10^{-11}$	$1,61 \times 10^{-9}$	6,626 070 150 (71)	$2,30 \times 10^{-11}$	$2,10 \times 10^{-11}$
39	6,626 070 167 (21)	$6,61 \times 10^{-11}$	$1,65 \times 10^{-8}$	6,626 070 153 (13)	$5,95 \times 10^{-10}$	$2,44 \times 10^{-9}$
40	6,626 070 179 (22)	$1,49 \times 10^{-10}$	$2,85 \times 10^{-8}$	6,626 070 180 (77)	$1,26 \times 10^{-9}$	$3,01 \times 10^{-8}$
41	6,626 070 179 (13)	$3,71 \times 10^{-10}$	$2,84 \times 10^{-8}$	6,626 070 158 (36)	$2,56 \times 10^{-9}$	$7,67 \times 10^{-9}$
42	6,626 070 169 (50)	$1,50 \times 10^{-10}$	$1,88 \times 10^{-8}$	6,626 070 205 (08)	$6,30 \times 10^{-10}$	$5,44 \times 10^{-8}$
43	6,626 070 162 (32)	$1,14 \times 10^{-10}$	$1,16 \times 10^{-8}$	6,626 070 159 (71)	$1,28 \times 10^{-9}$	$9,01 \times 10^{-9}$
44	6,626 070 112 (03)	$4,98 \times 10^{-10}$	$3,87 \times 10^{-8}$	6,626 070 142 (78)	$1,32 \times 10^{-9}$	$7,91 \times 10^{-9}$
45	6,626 070 136 (34)	$2,07 \times 10^{-10}$	$1,44 \times 10^{-8}$	6,626 070 103 (72)	$3,92 \times 10^{-10}$	$4,70 \times 10^{-8}$
46	6,626 070 171 (72)	$2,34 \times 10^{-10}$	$2,10 \times 10^{-8}$	6,626 070 128 (76)	$1,28 \times 10^{-9}$	$2,19 \times 10^{-8}$
47	6,626 070 149 (72)	$1,52 \times 10^{-10}$	$9,70 \times 10^{-10}$	6,626 070 149 (29)	$1,87 \times 10^{-9}$	$1,40 \times 10^{-9}$
48	6,626 070 152 (09)	$8,62 \times 10^{-11}$	$1,40 \times 10^{-9}$	6,626 070 164 (73)	$7,10 \times 10^{-11}$	$1,40 \times 10^{-8}$
49	6,626 070 170 (95)	$1,07 \times 10^{-10}$	$2,03 \times 10^{-8}$	6,626 070 153 (00)	$1,40 \times 10^{-9}$	$2,31 \times 10^{-9}$
50	6,626 070 157 (95)	$1,68 \times 10^{-10}$	$7,26 \times 10^{-9}$	6,626 070 210 (39)	$1,32 \times 10^{-9}$	$5,97 \times 10^{-8}$
51	6,626 070 151 (80)	$8,36 \times 10^{-12}$	$1,11 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (68)	$3,90 \times 10^{-11}$	$2,01 \times 10^{-9}$
52	6,626 070 138 (40)	$1,68 \times 10^{-10}$	$1,23 \times 10^{-8}$	6,626 070 175 (63)	$5,02 \times 10^{-10}$	$2,49 \times 10^{-8}$
53	6,626 070 150 (69)	$8,00 \times 10^{-14}$	0	6,626 070 150 (70)	$1,00 \times 10^{-12}$	$7,00 \times 10^{-12}$
54	6,626 070 186 (23)	$1,75 \times 10^{-10}$	$3,55 \times 10^{-8}$	6,626 070 129 (39)	$1,43 \times 10^{-9}$	$2,13 \times 10^{-8}$

Продолжение таблицы 4.11

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{\text{birge}} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{\text{birge}} \times 10^{34}$, Дж·с
55	6,626 070 103 (91)	$3,20 \times 10^{-10}$	$4,68 \times 10^{-8}$	6,626 070 098 (48)	$8,60 \times 10^{-10}$	$5,22 \times 10^{-8}$
56	6,626 070 137 (04)	$9,61 \times 10^{-11}$	$1,37 \times 10^{-8}$	6,626 070 168 (24)	$9,35 \times 10^{-10}$	$1,76 \times 10^{-8}$
57	6,626 070 136 (27)	$1,33 \times 10^{-10}$	$1,44 \times 10^{-8}$	6,626 070 120 (90)	$8,71 \times 10^{-10}$	$2,98 \times 10^{-8}$
58	6,626 070 150 (57)	$1,68 \times 10^{-10}$	$1,20 \times 10^{-10}$	6,626 070 159 (82)	$9,90 \times 10^{-10}$	$9,13 \times 10^{-9}$
59	6,626 070 148 (61)	$2,88 \times 10^{-10}$	$2,08 \times 10^{-9}$	6,626 070 130 (49)	$1,49 \times 10^{-9}$	$2,02 \times 10^{-8}$
60	6,626 070 144 (33)	$3,06 \times 10^{-10}$	$6,37 \times 10^{-9}$	6,626 070 191 (82)	$1,53 \times 10^{-10}$	$4,11 \times 10^{-8}$
61	6,626 070 112 (41)	$1,63 \times 10^{-10}$	$3,83 \times 10^{-8}$	6,626 070 141 (13)	$2,35 \times 10^{-9}$	$9,56 \times 10^{-9}$
62	6,626 070 144 (25)	$9,39 \times 10^{-11}$	$6,44 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (04)	$1,06 \times 10^{-9}$	$2,65 \times 10^{-9}$
63	6,626 070 149 (97)	$1,35 \times 10^{-10}$	$7,15 \times 10^{-10}$	6,626 070 153 (23)	$5,02 \times 10^{-10}$	$2,54 \times 10^{-9}$
64	6,626 070 146 (89)	$1,17 \times 10^{-10}$	$3,80 \times 10^{-9}$	6,626 070 161 (22)	$6,51 \times 10^{-10}$	$1,05 \times 10^{-8}$
65	6,626 070 145 (07)	$5,40 \times 10^{-11}$	$5,62 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (04)	$7,20 \times 10^{-10}$	$2,65 \times 10^{-9}$
66	6,626 070 152 (36)	$4,09 \times 10^{-11}$	$1,67 \times 10^{-9}$	6,626 070 143 (14)	$2,35 \times 10^{-10}$	$7,55 \times 10^{-9}$
67	6,626 070 149 (63)	$1,52 \times 10^{-10}$	$1,06 \times 10^{-9}$	6,626 070 152 (65)	$1,55 \times 10^{-9}$	$1,96 \times 10^{-9}$
68	6,626 070 146 (86)	$4,66 \times 10^{-11}$	$3,83 \times 10^{-9}$	6,626 070 172 (99)	$1,16 \times 10^{-10}$	$2,23 \times 10^{-8}$
69	6,626 070 166 (70)	$2,14 \times 10^{-10}$	$1,60 \times 10^{-8}$	6,626 070 164 (56)	$4,10 \times 10^{-10}$	$1,39 \times 10^{-8}$
70	6,626 070 147 (77)	$2,41 \times 10^{-11}$	$2,92 \times 10^{-9}$	6,626 070 150 (87)	$1,37 \times 10^{-10}$	$1,79 \times 10^{-10}$
71	6,626 070 144 (54)	$1,32 \times 10^{-10}$	$6,15 \times 10^{-9}$	6,626 070 164 (87)	$8,84 \times 10^{-10}$	$1,42 \times 10^{-8}$
72	6,626 070 167 (04)	$1,52 \times 10^{-10}$	$1,63 \times 10^{-8}$	6,626 070 211 (85)	$1,36 \times 10^{-9}$	$6,12 \times 10^{-8}$
73	6,626 070 135 (92)	$1,40 \times 10^{-10}$	$1,48 \times 10^{-8}$	6,626 070 156 (41)	$1,13 \times 10^{-9}$	$5,72 \times 10^{-9}$
74	6,626 070 165 (73)	$2,04 \times 10^{-10}$	$1,50 \times 10^{-8}$	6,626 070 117 (90)	$8,22 \times 10^{-10}$	$3,28 \times 10^{-8}$
75	6,626 070 158 (61)	$3,92 \times 10^{-11}$	$7,92 \times 10^{-9}$	6,626 070 155 (53)	$5,23 \times 10^{-10}$	$4,84 \times 10^{-9}$
76	6,626 070 148 (00)	$2,25 \times 10^{-11}$	$2,69 \times 10^{-9}$	6,626 070 154 (09)	$1,57 \times 10^{-10}$	$3,40 \times 10^{-9}$
77	6,626 070 151 (97)	$1,24 \times 10^{-11}$	$1,28 \times 10^{-9}$	6,626 070 153 (12)	$4,20 \times 10^{-11}$	$2,43 \times 10^{-9}$
78	6,626 070 173 (56)	$1,22 \times 10^{-10}$	$2,29 \times 10^{-8}$	6,626 070 165 (32)	$1,02 \times 10^{-9}$	$1,46 \times 10^{-8}$
79	6,626 070 134 (75)	$1,45 \times 10^{-10}$	$1,59 \times 10^{-8}$	6,626 070 180 (46)	$3,11 \times 10^{-10}$	$2,98 \times 10^{-8}$
80	6,626 070 152 (74)	$2,07 \times 10^{-11}$	$2,05 \times 10^{-9}$	6,626 070 142 (70)	$2,99 \times 10^{-10}$	$8,00 \times 10^{-9}$
81	6,626 070 151 (41)	$5,03 \times 10^{-12}$	$7,20 \times 10^{-10}$	6,626 070 151 (30)	$2,00 \times 10^{-11}$	$6,08 \times 10^{-10}$
82	6,626 070 136 (20)	$1,37 \times 10^{-10}$	$1,45 \times 10^{-8}$	6,626 070 132 (72)	$1,23 \times 10^{-9}$	$1,80 \times 10^{-8}$
83	6,626 070 137 (32)	$9,25 \times 10^{-11}$	$1,34 \times 10^{-8}$	6,626 070 157 (77)	$1,35 \times 10^{-9}$	$7,08 \times 10^{-9}$
84	6,626 070 134 (07)	$1,32 \times 10^{-10}$	$1,66 \times 10^{-8}$	6,626 070 162 (43)	$8,26 \times 10^{-10}$	$1,17 \times 10^{-8}$
85	6,626 070 152 (58)	$1,33 \times 10^{-11}$	$1,89 \times 10^{-9}$	6,626 070 149 (40)	$8,00 \times 10^{-12}$	$1,29 \times 10^{-9}$
86	6,626 070 154 (58)	$2,34 \times 10^{-10}$	$3,89 \times 10^{-9}$	6,626 070 195 (96)	$6,87 \times 10^{-10}$	$4,53 \times 10^{-8}$
87	6,626 070 154 (00)	$1,49 \times 10^{-10}$	$3,31 \times 10^{-9}$	6,626 070 152 (03)	$7,35 \times 10^{-10}$	$1,33 \times 10^{-9}$
88	6,626 070 151 (74)	$1,66 \times 10^{-10}$	$1,05 \times 10^{-9}$	6,626 070 153 (90)	$7,51 \times 10^{-10}$	$3,21 \times 10^{-9}$
89	6,626 070 134 (65)	$2,35 \times 10^{-10}$	$1,60 \times 10^{-8}$	6,626 070 164 (96)	$1,25 \times 10^{-9}$	$1,43 \times 10^{-8}$
90	6,626 070 159 (55)	$1,36 \times 10^{-10}$	$8,86 \times 10^{-9}$	6,626 070 132 (53)	$6,93 \times 10^{-10}$	$1,82 \times 10^{-8}$
91	6,626 070 173 (08)	$1,26 \times 10^{-10}$	$2,24 \times 10^{-8}$	6,626 070 153 (23)	$1,18 \times 10^{-9}$	$2,54 \times 10^{-9}$
92	6,626 070 146 (12)	$4,74 \times 10^{-11}$	$4,57 \times 10^{-9}$	6,626 070 158 (49)	$2,29 \times 10^{-10}$	$7,80 \times 10^{-9}$
93	6,626 070 152 (57)	$1,21 \times 10^{-10}$	$1,88 \times 10^{-9}$	6,626 070 135 (90)	$6,38 \times 10^{-10}$	$1,48 \times 10^{-8}$
94	6,626 070 118 (99)	$3,47 \times 10^{-10}$	$3,17 \times 10^{-8}$	6,626 070 153 (27)	$5,44 \times 10^{-10}$	$2,57 \times 10^{-9}$
95	6,626 070 215 (96)	$1,49 \times 10^{-10}$	$6,53 \times 10^{-8}$	6,626 070 143 (39)	$7,19 \times 10^{-10}$	$7,30 \times 10^{-9}$
96	6,626 070 127 (79)	$3,41 \times 10^{-10}$	$2,29 \times 10^{-8}$	6,626 070 225 (77)	$5,50 \times 10^{-10}$	$7,51 \times 10^{-8}$

Продолжение таблицы 4.11

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с
97	6,626 070 155 (13)	$7,65 \times 10^{-11}$	$4,44 \times 10^{-9}$	6,626 070 154 (39)	$1,71 \times 10^{-10}$	$3,70 \times 10^{-9}$
98	6,626 070 159 (72)	$2,60 \times 10^{-10}$	$9,03 \times 10^{-9}$	6,626 070 175 (59)	$5,98 \times 10^{-10}$	$2,49 \times 10^{-8}$
99	6,626 070 170 (35)	$1,33 \times 10^{-10}$	$1,97 \times 10^{-8}$	6,626 070 143 (55)	$1,28 \times 10^{-9}$	$7,14 \times 10^{-9}$
100	6,626 070 102 (71)	$3,56 \times 10^{-10}$	$4,80 \times 10^{-8}$	6,626 070 130 (45)	$9,13 \times 10^{-10}$	$2,02 \times 10^{-8}$

Таблица 4.12 – Оценки значений постоянной Планка, относительные неопределенности и отклонения от номинального значения, полученные методами IF&PA и Бёрджа для 100 индивидуальных задач (равномерное распределение)

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с
1	6,626 070 143 (12)	$3,82 \times 10^{-8}$	$7,57 \times 10^{-9}$	6,626 070 121 (56)	$3,41 \times 10^{-10}$	$2,91 \times 10^{-8}$
2	6,626 070 233 (99)	$3,32 \times 10^{-7}$	$8,33 \times 10^{-8}$	6,626 070 154 (52)	$3,53 \times 10^{-9}$	$3,83 \times 10^{-9}$
3	6,626 070 143 (67)	$5,72 \times 10^{-8}$	$7,03 \times 10^{-9}$	6,626 070 164 (74)	$3,49 \times 10^{-10}$	$1,40 \times 10^{-8}$
4	6,626 070 251 (00)	$2,21 \times 10^{-7}$	$1,00 \times 10^{-7}$	6,626 070 147 (04)	$3,17 \times 10^{-9}$	$3,65 \times 10^{-9}$
5	6,626 070 094 (16)	$1,30 \times 10^{-7}$	$5,65 \times 10^{-8}$	6,626 070 142 (91)	$1,63 \times 10^{-9}$	$7,78 \times 10^{-9}$
6	6,626 070 244 (42)	$2,08 \times 10^{-7}$	$9,37 \times 10^{-8}$	6,626 070 224 (63)	$3,39 \times 10^{-9}$	$7,39 \times 10^{-8}$
7	6,626 070 156 (46)	$1,87 \times 10^{-8}$	$5,77 \times 10^{-9}$	6,626 070 145 (64)	$2,67 \times 10^{-10}$	$5,05 \times 10^{-9}$
8	6,626 070 169 (41)	$1,37 \times 10^{-7}$	$1,87 \times 10^{-8}$	6,626 070 123 (76)	$2,83 \times 10^{-9}$	$2,69 \times 10^{-8}$
9	6,626 070 142 (19)	$3,51 \times 10^{-7}$	$8,50 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (52)	$3,12 \times 10^{-9}$	$2,17 \times 10^{-9}$
10	6,626 070 150 (48)	$7,93 \times 10^{-8}$	$2,10 \times 10^{-10}$	6,626 070 123 (02)	$5,59 \times 10^{-10}$	$2,77 \times 10^{-8}$
11	6,626 070 174 (83)	$1,49 \times 10^{-7}$	$2,41 \times 10^{-8}$	6,626 070 180 (90)	$1,85 \times 10^{-9}$	$3,02 \times 10^{-8}$
12	6,626 070 157 (49)	$1,63 \times 10^{-7}$	$6,80 \times 10^{-9}$	6,626 070 162 (85)	$1,96 \times 10^{-9}$	$1,22 \times 10^{-8}$
13	6,626 070 194 (81)	$3,24 \times 10^{-7}$	$4,41 \times 10^{-8}$	6,626 070 133 (89)	$1,99 \times 10^{-9}$	$1,68 \times 10^{-8}$
14	6,626 070 092 (95)	$3,10 \times 10^{-7}$	$5,77 \times 10^{-8}$	6,626 070 090 (97)	$2,16 \times 10^{-9}$	$5,97 \times 10^{-8}$
15	6,626 070 145 (03)	$7,14 \times 10^{-8}$	$5,66 \times 10^{-9}$	6,626 070 159 (53)	$1,05 \times 10^{-10}$	$8,84 \times 10^{-9}$
16	6,626 070 117 (47)	$5,51 \times 10^{-8}$	$3,32 \times 10^{-8}$	6,626 070 161 (61)	$1,13 \times 10^{-9}$	$1,09 \times 10^{-8}$
17	6,626 070 157 (20)	$2,93 \times 10^{-7}$	$6,51 \times 10^{-9}$	6,626 070 142 (19)	$2,42 \times 10^{-9}$	$8,50 \times 10^{-9}$
18	6,626 070 130 (97)	$8,43 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-8}$	6,626 070 174 (48)	$2,21 \times 10^{-10}$	$2,38 \times 10^{-8}$
19	6,626 070 153 (94)	$1,28 \times 10^{-7}$	$3,25 \times 10^{-9}$	6,626 070 211 (73)	$3,40 \times 10^{-10}$	$6,10 \times 10^{-8}$
20	6,626 070 068 (99)	$4,36 \times 10^{-7}$	$8,17 \times 10^{-8}$	6,626 070 069 (92)	$5,63 \times 10^{-10}$	$8,08 \times 10^{-8}$
21	6,626 070 150 (40)	$1,02 \times 10^{-7}$	$2,85 \times 10^{-10}$	6,626 070 193 (46)	$1,82 \times 10^{-9}$	$4,28 \times 10^{-8}$
22	6,626 070 153 (57)	$8,95 \times 10^{-8}$	$2,88 \times 10^{-9}$	6,626 070 216 (23)	$8,56 \times 10^{-10}$	$6,55 \times 10^{-8}$
23	6,626 070 123 (95)	$2,31 \times 10^{-7}$	$2,67 \times 10^{-8}$	6,626 070 104 (45)	$1,52 \times 10^{-9}$	$4,62 \times 10^{-8}$
24	6,626 070 149 (17)	$5,89 \times 10^{-8}$	$1,52 \times 10^{-9}$	6,626 070 139 (32)	$3,34 \times 10^{-10}$	$1,14 \times 10^{-8}$
25	3,313 035 155 (09)	$7,10 \times 10^{-8}$	$3,31 \times 10^{00}$	6,626 070 193 (75)	$4,76 \times 10^{-9}$	$4,31 \times 10^{-8}$
26	6,626 070 101 (54)	$1,61 \times 10^{-7}$	$4,92 \times 10^{-8}$	6,626 070 181 (71)	$2,67 \times 10^{-9}$	$3,10 \times 10^{-8}$
27	6,626 070 155 (85)	$2,20 \times 10^{-8}$	$5,16 \times 10^{-9}$	6,626 070 154 (76)	$1,55 \times 10^{-10}$	$4,07 \times 10^{-9}$
28	6,626 070 223 (41)	$3,96 \times 10^{-7}$	$7,27 \times 10^{-8}$	6,626 070 159 (28)	$1,75 \times 10^{-9}$	$8,59 \times 10^{-9}$
29	6,626 070 183 (01)	$1,27 \times 10^{-7}$	$3,23 \times 10^{-8}$	6,626 070 150 (52)	$2,92 \times 10^{-9}$	$1,68 \times 10^{-10}$

Продолжение таблицы 4.12

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{\text{birge}} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{\text{birge}} \times 10^{34}$, Дж·с
30	6,626 070 157 (08)	$1,73 \times 10^{-7}$	$6,39 \times 10^{-9}$	6,626 070 234 (34)	$1,09 \times 10^{-9}$	$8,37 \times 10^{-8}$
31	6,626 070 129 (85)	$9,64 \times 10^{-8}$	$2,08 \times 10^{-8}$	6,626 070 171 (61)	$3,13 \times 10^{-9}$	$2,09 \times 10^{-8}$
32	6,626 070 169 (63)	$1,56 \times 10^{-7}$	$1,89 \times 10^{-8}$	6,626 070 123 (61)	$1,85 \times 10^{-9}$	$2,71 \times 10^{-8}$
33	6,626 070 162 (79)	$8,03 \times 10^{-8}$	$1,21 \times 10^{-8}$	6,626 070 170 (24)	$6,36 \times 10^{-10}$	$1,96 \times 10^{-8}$
34	6,626 070 141 (74)	$2,10 \times 10^{-7}$	$8,95 \times 10^{-9}$	6,626 070 087 (05)	$3,92 \times 10^{-10}$	$6,36 \times 10^{-8}$
35	6,626 070 215 (91)	$3,72 \times 10^{-7}$	$6,52 \times 10^{-8}$	6,626 070 105 (25)	$3,90 \times 10^{-9}$	$4,54 \times 10^{-8}$
36	6,626 070 150 (23)	$5,28 \times 10^{-9}$	$4,60 \times 10^{-10}$	6,626 070 154 (33)	$4,40 \times 10^{-11}$	$3,64 \times 10^{-9}$
37	6,626 070 128 (06)	$6,83 \times 10^{-8}$	$2,26 \times 10^{-8}$	6,626 070 127 (52)	$1,21 \times 10^{-10}$	$2,32 \times 10^{-8}$
38	6,626 070 208 (23)	$3,26 \times 10^{-7}$	$5,75 \times 10^{-8}$	6,626 070 211 (97)	$2,75 \times 10^{-10}$	$6,13 \times 10^{-8}$
39	6,626 070 135 (96)	$7,10 \times 10^{-8}$	$1,47 \times 10^{-8}$	6,626 070 136 (70)	$9,86 \times 10^{-10}$	$1,40 \times 10^{-8}$
40	6,626 070 152 (24)	$1,60 \times 10^{-7}$	$1,55 \times 10^{-9}$	6,626 070 117 (43)	$3,90 \times 10^{-10}$	$3,33 \times 10^{-8}$
41	6,626 070 222 (90)	$2,36 \times 10^{-7}$	$7,22 \times 10^{-8}$	6,626 070 219 (86)	$1,92 \times 10^{-10}$	$6,92 \times 10^{-8}$
42	6,626 070 092 (20)	$1,16 \times 10^{-7}$	$5,85 \times 10^{-8}$	6,626 070 164 (56)	$2,57 \times 10^{-9}$	$1,39 \times 10^{-8}$
43	6,626 070 189 (81)	$6,47 \times 10^{-7}$	$3,91 \times 10^{-8}$	6,626 070 101 (35)	$4,51 \times 10^{-9}$	$4,93 \times 10^{-8}$
44	6,626 070 148 (10)	$1,71 \times 10^{-8}$	$2,59 \times 10^{-9}$	6,626 070 150 (10)	$6,00 \times 10^{-12}$	$5,88 \times 10^{-10}$
45	6,626 070 260 (92)	$3,87 \times 10^{-7}$	$1,10 \times 10^{-7}$	6,626 070 133 (96)	$3,95 \times 10^{-9}$	$1,67 \times 10^{-8}$
46	6,626 070 154 (50)	$2,67 \times 10^{-8}$	$3,81 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (77)	$2,45 \times 10^{-10}$	$1,93 \times 10^{-9}$
47	6,626 070 171 (24)	$2,07 \times 10^{-7}$	$2,05 \times 10^{-8}$	6,626 070 169 (59)	$5,12 \times 10^{-10}$	$1,89 \times 10^{-8}$
48	6,626 070 144 (57)	$2,65 \times 10^{-7}$	$6,12 \times 10^{-9}$	6,626 070 100 (59)	$3,53 \times 10^{-9}$	$5,01 \times 10^{-8}$
49	6,626 070 165 (40)	$4,68 \times 10^{-7}$	$1,47 \times 10^{-8}$	6,626 070 159 (35)	$6,54 \times 10^{-10}$	$8,66 \times 10^{-9}$
50	6,626 070 130 (85)	$2,87 \times 10^{-7}$	$1,98 \times 10^{-8}$	6,626 070 148 (40)	$2,37 \times 10^{-9}$	$2,30 \times 10^{-9}$
51	6,626 070 090 (48)	$2,16 \times 10^{-7}$	$6,02 \times 10^{-8}$	6,626 070 064 (86)	$1,38 \times 10^{-9}$	$8,58 \times 10^{-8}$
52	6,626 070 113 (90)	$2,17 \times 10^{-7}$	$3,68 \times 10^{-8}$	6,626 070 129 (78)	$1,47 \times 10^{-9}$	$2,09 \times 10^{-8}$
53	6,626 070 178 (30)	$1,16 \times 10^{-7}$	$2,76 \times 10^{-8}$	6,626 070 150 (22)	$1,00 \times 10^{-9}$	$4,67 \times 10^{-10}$
54	6,626 070 182 (77)	$2,41 \times 10^{-7}$	$3,21 \times 10^{-8}$	6,626 069 991 (58)	$7,25 \times 10^{-10}$	$1,59 \times 10^{-7}$
55	6,626 070 116 (57)	$4,33 \times 10^{-7}$	$3,41 \times 10^{-8}$	6,626 070 118 (55)	$1,57 \times 10^{-9}$	$3,21 \times 10^{-8}$
56	6,626 070 097 (45)	$2,71 \times 10^{-7}$	$5,32 \times 10^{-8}$	6,626 070 124 (52)	$3,53 \times 10^{-9}$	$2,62 \times 10^{-8}$
57	6,626 070 174 (38)	$2,05 \times 10^{-7}$	$2,37 \times 10^{-8}$	6,626 070 177 (77)	$2,05 \times 10^{-9}$	$2,71 \times 10^{-8}$
58	6,626 070 185 (90)	$2,13 \times 10^{-7}$	$3,52 \times 10^{-8}$	6,626 070 243 (28)	$4,28 \times 10^{-10}$	$9,26 \times 10^{-8}$
59	6,626 070 206 (30)	$2,60 \times 10^{-7}$	$5,56 \times 10^{-8}$	6,626 070 184 (56)	$2,26 \times 10^{-9}$	$3,39 \times 10^{-8}$
60	6,626 070 201 (23)	$1,09 \times 10^{-7}$	$5,05 \times 10^{-8}$	6,626 070 185 (19)	$1,78 \times 10^{-9}$	$3,45 \times 10^{-8}$
61	6,626 070 187 (93)	$9,59 \times 10^{-8}$	$3,72 \times 10^{-8}$	6,626 070 134 (90)	$8,05 \times 10^{-10}$	$1,58 \times 10^{-8}$
62	6,626 070 150 (69)	$1,81 \times 10^{-7}$	0	6,626 070 094 (78)	$2,44 \times 10^{-10}$	$5,59 \times 10^{-8}$
63	6,626 070 115 (99)	$3,02 \times 10^{-7}$	$3,47 \times 10^{-8}$	6,626 070 074 (56)	$1,12 \times 10^{-9}$	$7,61 \times 10^{-8}$
64	6,626 070 163 (96)	$8,45 \times 10^{-8}$	$1,33 \times 10^{-8}$	6,626 070 130 (52)	$1,10 \times 10^{-9}$	$2,02 \times 10^{-8}$
65	6,626 070 051 (70)	$3,49 \times 10^{-7}$	$9,90 \times 10^{-8}$	6,626 070 143 (46)	$1,07 \times 10^{-10}$	$7,23 \times 10^{-9}$
66	6,626 070 153 (90)	$4,62 \times 10^{-8}$	$3,21 \times 10^{-9}$	6,626 070 130 (04)	$3,45 \times 10^{-10}$	$2,07 \times 10^{-8}$
67	6,626 070 238 (13)	$2,89 \times 10^{-7}$	$8,74 \times 10^{-8}$	6,626 070 188 (63)	$2,85 \times 10^{-9}$	$3,79 \times 10^{-8}$
68	6,626 070 177 (91)	$9,88 \times 10^{-8}$	$2,72 \times 10^{-8}$	6,626 070 147 (60)	$1,74 \times 10^{-9}$	$3,10 \times 10^{-9}$
69	6,626 070 091 (39)	$2,02 \times 10^{-7}$	$5,93 \times 10^{-8}$	6,626 070 211 (19)	$5,53 \times 10^{-10}$	$6,05 \times 10^{-8}$
70	6,626 070 128 (42)	$1,03 \times 10^{-7}$	$2,23 \times 10^{-8}$	6,626 070 144 (30)	$5,90 \times 10^{-10}$	$6,39 \times 10^{-9}$
71	6,626 070 146 (06)	$5,81 \times 10^{-8}$	$4,63 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (26)	$2,47 \times 10^{-10}$	$2,43 \times 10^{-9}$

Продолжение таблицы 4.12

ν	Процедура IF&PA			Процедура Бёрджа		
	$x^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	u_r^{**}	$\xi^{**} \times 10^{34}$, Дж·с	$x_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с	u_{birge_r}	$\xi_{birge} \times 10^{34}$, Дж·с
72	6,626 070 109 (43)	$2,98 \times 10^{-7}$	$4,13 \times 10^{-8}$	6,626 070 179 (38)	$3,85 \times 10^{-9}$	$2,87 \times 10^{-8}$
73	6,626 070 187 (47)	$3,40 \times 10^{-7}$	$3,68 \times 10^{-8}$	6,626 070 293 (04)	$1,16 \times 10^{-10}$	$1,42 \times 10^{-7}$
74	6,626 070 151 (20)	$8,55 \times 10^{-8}$	$5,10 \times 10^{-10}$	6,626 070 153 (58)	$4,51 \times 10^{-10}$	$2,89 \times 10^{-9}$
75	6,626 070 123 (17)	$2,64 \times 10^{-7}$	$2,75 \times 10^{-8}$	6,626 070 111 (05)	$2,32 \times 10^{-9}$	$3,96 \times 10^{-8}$
76	6,626 070 164 (65)	$2,94 \times 10^{-7}$	$1,40 \times 10^{-8}$	6,626 070 301 (80)	$1,39 \times 10^{-9}$	$1,51 \times 10^{-7}$
77	6,626 070 101 (58)	$2,61 \times 10^{-7}$	$4,91 \times 10^{-8}$	6,626 070 110 (64)	$3,38 \times 10^{-9}$	$4,01 \times 10^{-8}$
78	6,626 070 247 (22)	$1,81 \times 10^{-7}$	$9,65 \times 10^{-8}$	6,626 070 243 (09)	$3,02 \times 10^{-9}$	$9,24 \times 10^{-8}$
79	6,626 070 099 (79)	$1,74 \times 10^{-7}$	$5,09 \times 10^{-8}$	6,626 070 058 (23)	$3,78 \times 10^{-9}$	$9,25 \times 10^{-8}$
80	6,626 070 178 (14)	$1,41 \times 10^{-7}$	$2,74 \times 10^{-8}$	6,626 070 173 (93)	$1,17 \times 10^{-9}$	$2,32 \times 10^{-8}$
81	6,626 070 162 (98)	$2,02 \times 10^{-8}$	$1,23 \times 10^{-8}$	6,626 070 161 (57)	$4,74 \times 10^{-10}$	$1,09 \times 10^{-8}$
82	6,626 070 117 (14)	$1,22 \times 10^{-7}$	$3,36 \times 10^{-8}$	6,626 070 157 (64)	$1,11 \times 10^{-9}$	$6,95 \times 10^{-9}$
83	6,626 070 159 (24)	$3,81 \times 10^{-7}$	$8,55 \times 10^{-9}$	6,626 070 217 (88)	$4,95 \times 10^{-10}$	$6,72 \times 10^{-8}$
84	6,626 070 170 (39)	$1,04 \times 10^{-7}$	$1,97 \times 10^{-8}$	6,626 070 099 (22)	$4,16 \times 10^{-10}$	$5,15 \times 10^{-8}$
85	6,626 070 155 (33)	$2,56 \times 10^{-7}$	$4,64 \times 10^{-9}$	6,626 070 137 (62)	$1,92 \times 10^{-9}$	$1,31 \times 10^{-8}$
86	6,626 070 139 (08)	$6,60 \times 10^{-8}$	$1,16 \times 10^{-8}$	6,626 070 128 (36)	$1,70 \times 10^{-9}$	$2,23 \times 10^{-8}$
87	6,626 070 193 (29)	$3,93 \times 10^{-7}$	$4,26 \times 10^{-8}$	6,626 070 191 (92)	$5,40 \times 10^{-10}$	$4,12 \times 10^{-8}$
88	6,626 070 153 (27)	$1,69 \times 10^{-8}$	$2,58 \times 10^{-9}$	6,626 070 148 (89)	$1,50 \times 10^{-10}$	$1,80 \times 10^{-9}$
89	6,626 070 112 (89)	$4,98 \times 10^{-7}$	$3,78 \times 10^{-8}$	6,626 070 112 (23)	$3,38 \times 10^{-9}$	$3,85 \times 10^{-8}$
90	6,626 070 147 (41)	$2,01 \times 10^{-7}$	$3,28 \times 10^{-9}$	6,626 070 202 (09)	$1,16 \times 10^{-9}$	$5,14 \times 10^{-8}$
91	6,626 070 150 (44)	$3,52 \times 10^{-10}$	$2,50 \times 10^{-10}$	6,626 070 150 (62)	$1,20 \times 10^{-11}$	$7,30 \times 10^{-11}$
92	6,626 070 236 (24)	$2,31 \times 10^{-7}$	$8,55 \times 10^{-8}$	6,626 070 114 (86)	$3,92 \times 10^{-9}$	$3,58 \times 10^{-8}$
93	6,626 070 115 (48)	$1,99 \times 10^{-7}$	$3,52 \times 10^{-8}$	6,626 070 248 (31)	$1,26 \times 10^{-9}$	$9,76 \times 10^{-8}$
94	6,626 070 190 (16)	$1,46 \times 10^{-7}$	$3,95 \times 10^{-8}$	6,626 070 202 (04)	$3,18 \times 10^{-9}$	$5,13 \times 10^{-8}$
95	6,626 070 204 (91)	$3,31 \times 10^{-7}$	$5,42 \times 10^{-8}$	6,626 070 289 (06)	$2,66 \times 10^{-10}$	$1,38 \times 10^{-7}$
96	6,626 070 176 (38)	$5,38 \times 10^{-8}$	$2,57 \times 10^{-8}$	6,626 070 129 (03)	$4,88 \times 10^{-10}$	$2,17 \times 10^{-8}$
97	6,626 070 139 (16)	$1,49 \times 10^{-7}$	$1,15 \times 10^{-8}$	6,626 070 092 (74)	$3,67 \times 10^{-9}$	$5,80 \times 10^{-8}$
98	6,626 070 148 (69)	$4,18 \times 10^{-8}$	$2,00 \times 10^{-9}$	6,626 070 150 (48)	$2,48 \times 10^{-10}$	$2,11 \times 10^{-10}$
99	6,626 070 151 (24)	$2,72 \times 10^{-8}$	$5,55 \times 10^{-10}$	6,626 070 157 (63)	$8,44 \times 10^{-10}$	$6,94 \times 10^{-9}$
100	6,626 070 072 (71)	$3,71 \times 10^{-7}$	$7,80 \times 10^{-8}$	6,626 070 009 (20)	$2,88 \times 10^{-9}$	$1,41 \times 10^{-7}$

По данным таблиц 4.11 и 4.12 построены кривые $\xi(\nu)$ (см. рисунок 4.9), где значения ξ отсортированы в порядке возрастания, а ν – это номер индивидуальной задачи. На графике точность визуализируется расстоянием между кривыми $\xi(\nu)$ и осью x ; чем меньше расстояние, тем выше точность процедуры.

Из рисунка 4.9 видно, что кривые $\xi(\nu)$ для IF&PA ближе к оси x , чем кривые, полученные с помощью процедуры Бёрджа как для нормального, так и для равномерного распределения. Средние значения отклонения ξ (в Дж·с)

составляют $1,33 \times 10^{-42}$ и $1,74 \times 10^{-42}$ (случай нормального распределения), и $3,21 \times 10^{-42}$ и $3,67 \times 10^{-42}$ (случай равномерного распределения) для процедур IF&PA и Бёрджа соответственно. Эти результаты указывают на более высокую точность IF&PA по сравнению с процедурой Бёрджа.

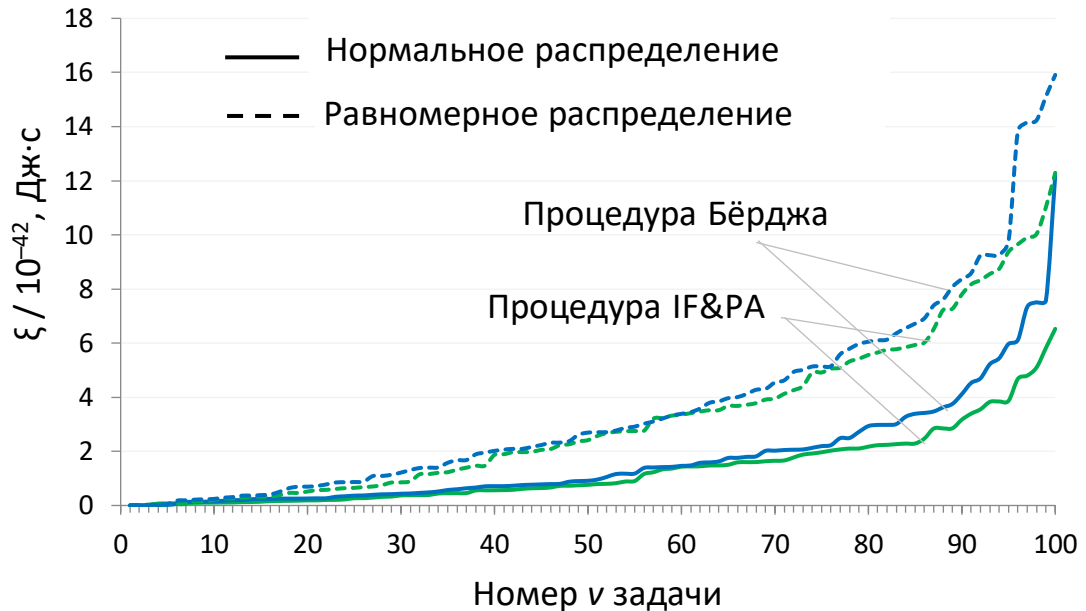


Рисунок 4.9 – Отклонения ξ , полученные процедурами IF&PA (зеленые линии) и Бёрджа (синие линии) для равномерного и нормального распределений исходных интервальных данных

На рисунке 4.10 показаны полученные значения стандартных неопределенностей u^{**} или u_{birge} , отсортированные по возрастанию для тех же 100 индивидуальных задач. Как видно, неопределенности, полученные с помощью IF&PA, существенно ниже, чем неопределенности процедуры Бёрджа.

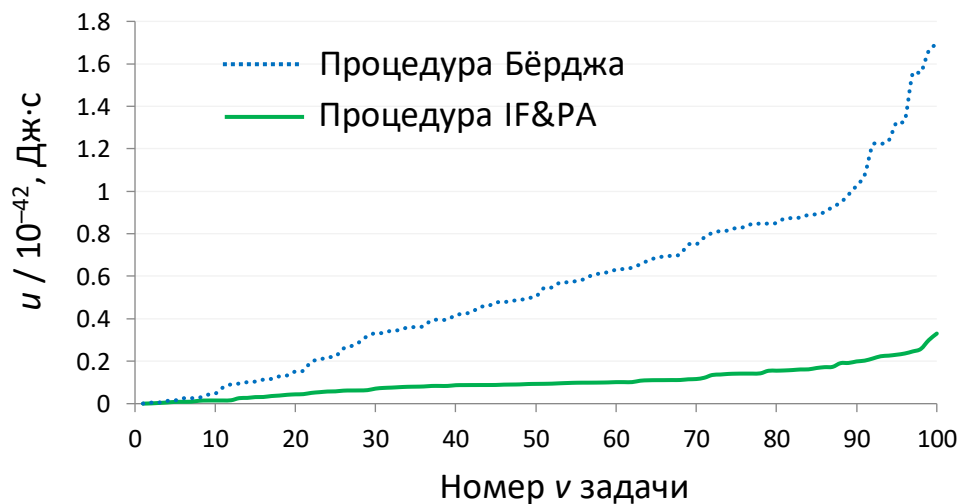


Рисунок 4.10 – Значения стандартных неопределенностей, полученные процедурами IF&PA и Бёрджа

В следующих двух разделах рассматриваются результаты обработки реальных данных для согласования значения постоянной Планка.

Обработка данных согласования КОДАТА 2006 г.

Для анализа были использованы данные из работы [100], которые представляют собой значения постоянной Планка h , предоставленные различными организациями и полученные разными методами, см. таблицу 4.13. Данные в таблице 4.13 обозначены в соответствии с кодификацией КОДАТА. Набор включает восемь значений, использованных для согласования КОДАТА 2006 г., и четыре значения, полученные после этого согласования.

Таблица 4.13 – Измеренные значения постоянной Планка с относительными неопределенностями [100]

Идентификатор	h , Дж·с	u_r
NPL-79	$6,626\ 0729 \times 10^{-34}$	$1,0 \times 10^{-6}$
NIST-80	$6,626\ 0657 \times 10^{-34}$	$1,3 \times 10^{-6}$
NMI-89	$6,626\ 0684 \times 10^{-34}$	$5,4 \times 10^{-7}$
NPL-90	$6,626\ 0682 \times 10^{-34}$	$2,0 \times 10^{-7}$
PTB-91	$6,626\ 0670 \times 10^{-34}$	$6,3 \times 10^{-7}$
NIM-95	$6,626\ 071 \times 10^{-34}$	$1,6 \times 10^{-6}$
NIST-98	$6,626\ 068\ 91 \times 10^{-34}$	$8,7 \times 10^{-8}$
NIST-07	$6,626\ 068\ 91 \times 10^{-34}$	$3,6 \times 10^{-8}$
METAS-11	$6,626\ 0691 \times 10^{-34}$	$2,9 \times 10^{-7}$
NPL-12	$6,626\ 0712 \times 10^{-34}$	$2,0 \times 10^{-7}$
NRC-12	$6,626\ 070\ 63 \times 10^{-34}$	$6,5 \times 10^{-8}$
Avogadro-11	$6,626\ 070\ 09 \times 10^{-34}$	$3,0 \times 10^{-8}$

Данные из таблицы 4.13 были обработаны процедурой IF&PA. Результаты комплексирования h^* , полученные на этапе 3 (см. п. 3.1.4) для различных $n = 4, 5, \dots, 15$, показаны на рисунке 4.11. Графика также демонстрирует нелинейное влияние мощности n на результат комплексирования. Оценка h_{15}^* , рассчитанная по формуле (3.1) при $n = 15$, обозначена красной точкой. Улучшенный результат комплексирования h^{**} показан оранжевой линией.

Для сравнения, наряду с оценкой h^{**} IF&PA, в таблице 4.14 показаны оценки постоянной Планка, взятые из [100] и полученные с помощью других

известных процедур комбинирования данных: (1) отношением Бёрджа, (2) модифицированным отношением Бёрджа, (3) моделью случайных эффектов и (4) моделью фиксированных эффектов. Можно видеть, что итоговая оценка h^{**} , полученная IF&PA, существенно отличается от оценок, полученных другими методами. Это можно объяснить тем, что упомянутые четыре процедуры используют вычисленное по формуле (4.10) средневзвешенное значение для оценивания значения h . Это приводит к почти одинаковым значениям h для всех четырех процедур.

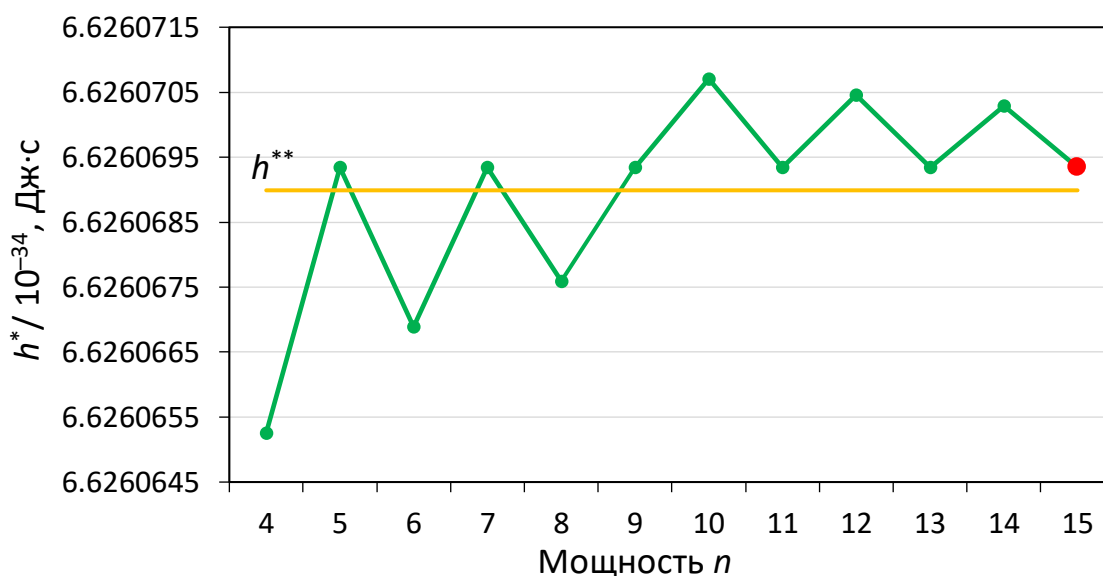


Рисунок 4.11 – Результаты комплексирования h^* при различных мощностях n и улучшенный результат комплексирования h^{**} (оранжевая линия)

Итоговая оценка h^{**} также графически представлена на рисунке 4.12 вместе с исходными данными из таблицы 4.13.

С другой стороны, результаты численного моделирования (см. рисунок 4.10) демонстрируют, что IF&PA обеспечивает наилучшее значение консенсуса для наибольшего подмножества согласованных интервалов без предварительного исключения какого-либо начального интервала (и в условиях гетероскедастичности, см. п. 2.1). Этот факт может служить объяснением того, почему процедура IF&PA приводит к оценке постоянной Планка с более низкой стандартной неопределенностью u_{τ}^{**} по сравнению с альтернативными процедурами.

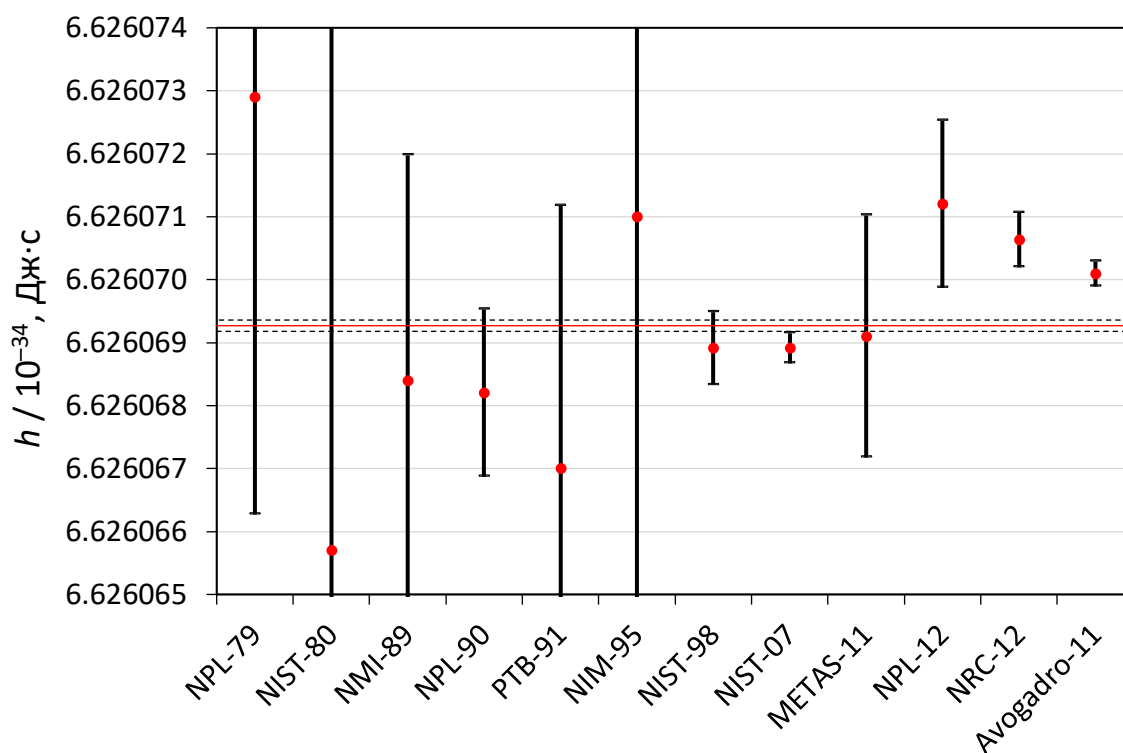


Рисунок 4.12 – Измеренные значения постоянной Планка [100]; итоговая оценка h^{**} (красная линия) и границы неопределенности (пунктирные линии)

Таблицы 4.14 – Оценки постоянной Планка, полученные процедурой IF&PA и альтернативными процедурами для данных из таблицы 4.13

№	Метод	Оценка h , Дж·с	Оценка u_r
1	Отношение Бёрджа	$6,626\ 069\ 67 \times 10^{-34}$	$3,13 \times 10^{-8}$
2	Модифицированное отношение Бёрджа	$6,626\ 069\ 67 \times 10^{-34}$	$3,46 \times 10^{-8}$
3	Модель случайных эффектов	$6,626\ 069\ 60 \times 10^{-34}$	$6,68 \times 10^{-8}$
4	Модель фиксированных эффектов	$6,626\ 069\ 60 \times 10^{-34}$	$9,21 \times 10^{-8}$
5	IF&PA	$h^{**} = 6,626\ 068\ 99 \times 10^{-34}$	$u_r^{**} = 1,32 \times 10^{-8}$

Обработка данных специального согласования КОДАТА 2017 г.

Метод IF&PA был применен для обработки новейших значений постоянной Планка h (см. таблица 4.15), использованных в специальном согласовании КОДАТА в 2017 году, проведенном для пересмотра Международной системы единиц [79, 90].

Результаты обработки данных из таблицы 4.15 с помощью IF&PA проиллюстрированы на рисунках 4.13 и 4.14. В таблице 4.16 показаны значения согласованных оценок постоянной Планка и их относительные стандартные неопределенности, полученные с помощью методов IF&PA и Бёрджа. Заметим,

что оценка, найденная методом Бёрджа, была принята в качестве рекомендованного значения КОДАТА 2017.

Таблица 4.15 – Измеренные значения постоянной Планка и соответствующие относительные неопределенности [79]

Идентификатор	h , Дж·с	u_r
NRC-17	$6,626\ 070\ 133(60) \times 10^{-34}$	$9,1 \times 10^{-9}$
IAC-17	$6,626\ 070\ 405(77) \times 10^{-34}$	$1,2 \times 10^{-8}$
NIST-17	$6,626\ 069\ 934(88) \times 10^{-34}$	$1,3 \times 10^{-8}$
IAC-15	$6,626\ 070\ 22(13) \times 10^{-34}$	$2,0 \times 10^{-8}$
NMIJ-17	$6,626\ 070\ 13(16) \times 10^{-34}$	$2,4 \times 10^{-8}$
IAC-11	$6,626\ 069\ 94(20) \times 10^{-34}$	$3,0 \times 10^{-8}$
LNE-17	$6,626\ 070\ 40(38) \times 10^{-34}$	$5,7 \times 10^{-8}$
NIST-15	$6,626\ 069\ 36(38) \times 10^{-34}$	$5,7 \times 10^{-8}$
NIST-98	$6,626\ 068\ 91(58) \times 10^{-34}$	$8,7 \times 10^{-8}$

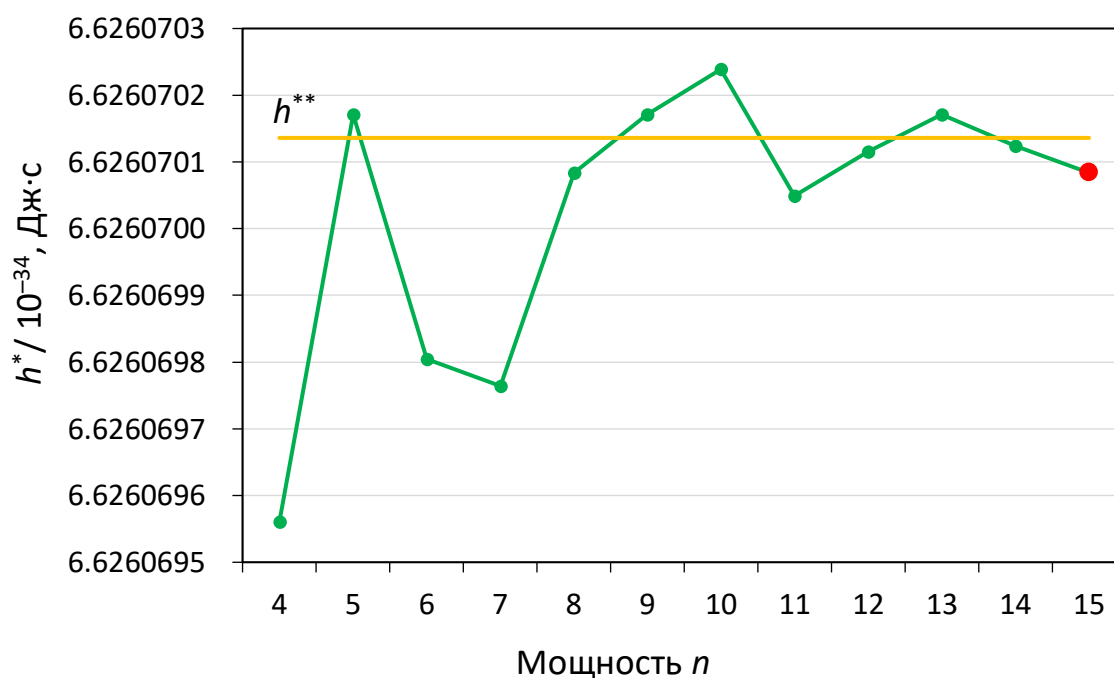


Рисунок 4.13 – Результаты комплексирования h^* при различных мощностях n и улучшенный результат комплексирования h^{**} (оранжевая линия)

Видно, что оценка IF&PA довольно близка к рекомендованной в [79] и имеет гораздо меньшую неопределенность. Следует также отметить, что для получения результата комплексирования метод IF&PA использовал все девять доступных исходных значений постоянной Планка, в то время как метод Бёрджа был вынужден не включать значение NIST-98 в итоговое согласование.

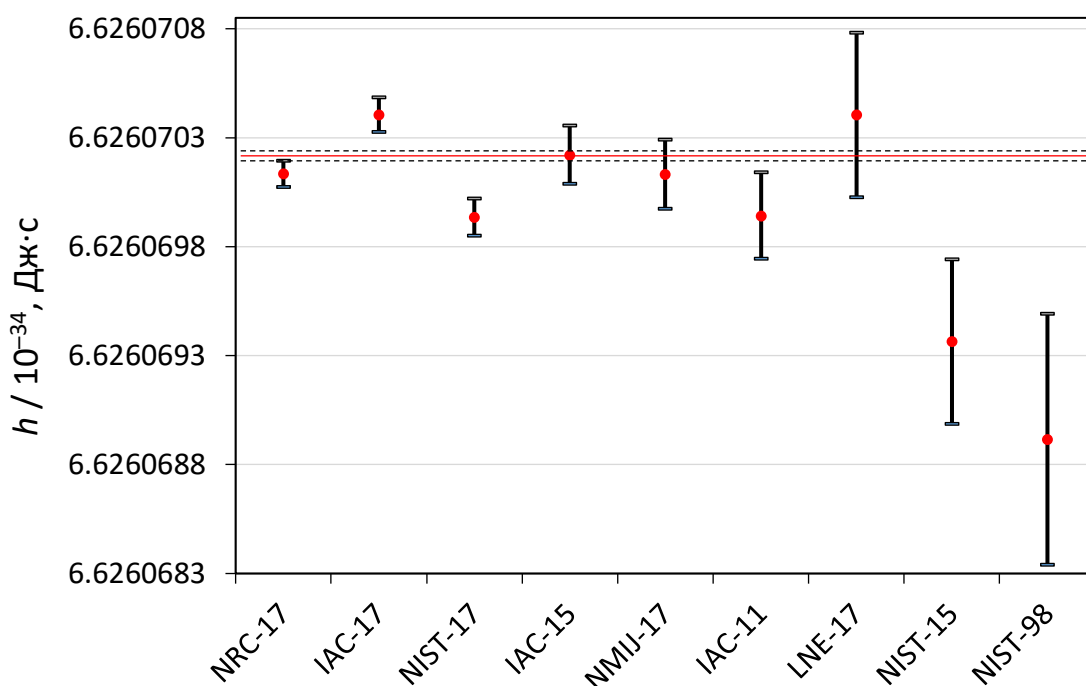


Рисунок 4.14 – Измеренные значения постоянной Планка [79]; оценка h^{**} IF&PA (красная линия) и границы неопределенности (пунктирные линии)

Таблица 4.16 – Полученные оценки постоянной Планка для данных из таблицы 4.17

Метод	Оценка h , Дж·с	Оценка u_r
Отношение Бёрджа	$h_{\text{birge}} = 6,626\,070\,150\,(69) \times 10^{-34}$	$u_{\text{birge}_r} = 1,0 \times 10^{-8}$
IF&PA	$h^{**} = 6,626\,070\,136\,(06) \times 10^{-34}$	$u_r^{**} = 1,3 \times 10^{-9}$

4.4.3 Повышение точности измерения напряжения постоянного тока

Целью экспериментальных исследований являлась проверка усовершенствованного метода IF&PA при обработке результатов измерений напряжения постоянного тока, полученных пятью цифровыми мультиметрами разных моделей: M838, DT9205A, UT61E, В7-38М и МУ-68 [65]. Точность результата измерения каждого мультиметра рассчитывалась как значение максимальной допустимой погрешности Δ_d (п. 4.1) по формуле, приведенной в паспорте СИ (см. таблицу 4.17). Максимальная допустимая погрешность Δ_d определяет границы u_k интервала, который характеризует каждый результат измерения x_k . Использование разнотипных СИ приводит к гетероскедастичности результатов измерений. Поэтому экспериментальные исследования должны

позволить оценить возможность применения IF&PA для эффективной обработки реальных гетероскедастичных данных.

Таблица 4.17 – Метрологические характеристики цифровых мультиметров при измерении напряжения постоянного тока

Мультиметр	Тип	Предел, В	LSD ¹ , мВ	Δ_d , В
M1	M838	0,2	0,1	$\pm (0,25 \% + 2 \text{ LSD})$
		2; 20; 200	1; 10; 100	$\pm (0,5 \% + 2 \text{ LSD})$
M2	DT9205A	0,2; 2; 20; 200	0,1; 1; 10; 100	$\pm (0,5 \% + 2 \text{ LSD})$
M3	UT61E	0,22	0,01	$\pm (0,1 \% + 5 \text{ LSD})$
		2,2; 22; 220	0,1; 1; 10	$\pm (0,1 \% + 2 \text{ LSD})$
M4	B7-38M	0,3; 3; 30; 300	0,01; 0,1; 1; 10	$\pm (0,03 \% + 3 \text{ LSD})$
M5	MY-68	0,4; 4; 40; 400	0,1; 1; 10; 100	$\pm (0,7 \% + 2 \text{ LSD})$

Примечание: ¹LSD – единица младшего разряда.

В ходе экспериментов измерялись номинальные значения постоянного напряжения $x_{\text{ном}} = 1; 5; 10; 25; 50$ В, формируемые прецизионным калибратором Fluke 5520A. Погрешности номинальных значений были намного ниже, чем погрешности результатов, получаемых с помощью мультиметров. Например, погрешности составляли 0,00008 В и 0,00105 В при $x_{\text{ном}}$, равном 10 и 50 В соответственно. Измерения производились однократно каждым из пяти цифровых мультиметров. Результаты измерений x_k и их неопределенности u_k для всех номинальных значений представлены в таблице 4.18.

Таблица 4.18 – Результаты измерений x_k и их неопределенности u_k

Мультиметр	$x_{\text{ном}}, \text{ В}$									
	1		5		10		25		50	
	$x_k, \text{ В}$	$u_k, \text{ В}$	$x_k, \text{ В}$	$u_k, \text{ В}$	$x_k, \text{ В}$	$u_k, \text{ В}$	$x_k, \text{ В}$	$u_k, \text{ В}$	$x_k, \text{ В}$	$u_k, \text{ В}$
M1	1,003	0,008	5,00	0,05	10,01	0,08	25,0	0,4	50,1	0,5
M2	0,998	0,007	4,98	0,05	9,98	0,07	24,8	0,4	49,7	0,5
M3	0,9993	0,0013	4,996	0,007	9,993	0,012	24,97	0,05	49,95	0,07
M4	0,9997	0,0006	5,0002	0,0046	10,002	0,007	25,004	0,011	50,008	0,046
M5	1,008	0,01	5,03	0,06	10,07	0,1	25,17	0,2	50,3	0,6

Данные из таблицы 4.18 были использованы для получения методом IF&PA оценок опорных значений x^{**} и их неопределенностей u^{**} для номинального значения. Для сравнения те же данные были обработаны методом ВС, т.е. оценки опорного значения $x_{\text{вс}}$ и соответствующей неопределенности $u_{\text{вс}}$ были определены по формулам (4.8) и (4.9) соответственно.

Абсолютные отклонения ξ^{**} и $\xi_{\text{вс}}$ полученных оценок x^{**} и $x_{\text{вс}}$ от

номинального значения $x_{\text{НОМ}}$, полученные методами IF&PA и ВС соответственно, рассчитывались по формулам

$$\xi^{**} = |x_{\text{НОМ}} - x^{**}|, \quad (4.15)$$

$$\xi_{\text{ВС}} = |x_{\text{НОМ}} - x_{\text{ВС}}|. \quad (4.16)$$

Результаты расчетов, полученные методами IF&PA и ВС, приведены в таблице 4.19.

Таблица 4.19 – Результаты, полученные методами IF&PA и ВС

$x_{\text{НОМ}}$, В	IF&PA			ВС		
	x^{**} , В	u^{**} , В	ξ^{**} , В	$x_{\text{ВС}}$, В	$u_{\text{ВС}}$, В	$\xi_{\text{ВС}}$, В
1	0,9993	0,0001	0,0007	0,9997	0,0005	0,0003
5	4,9998	0,0007	0,0002	4,9990	0,0038	0,0010
10	9,9998	0,0012	0,0002	9,9999	0,0060	0,0001
25	25,0045	0,0045	0,0044	25,0028	0,0107	0,0028
50	49,9959	0,0077	0,0041	49,9907	0,0381	0,0093

На рисунке 4.15 показаны исходные интервалы, а также оценки опорных значений и их неопределенностей, полученные методами IF&PA и ВС. На рисунке 4.15 сплошная красная линия показывает номинальное значение $x_{\text{НОМ}}$, сплошная зеленая линия – x^{**} , сплошная синяя линия – $x_{\text{ВС}}$. Зеленые и синие пунктирные линии показывают границы $x^{**} \pm u^{**}$ и $x_{\text{ВС}} \pm u_{\text{ВС}}$ соответственно.

Из данных таблицы 4.19 и рисунка 4.15 видно, что номинальное значение $x_{\text{НОМ}}$ близко к обоим значениям оценки x^{**} и $x_{\text{ВС}}$, а значения неопределенности u^{**} всегда значительно меньше $u_{\text{ВС}}$. Это означает, что метод IF&PA дает лучшие результаты, чем ВС.

На рисунке 4.16 показаны отклонения опорных значений от $x_{\text{НОМ}}$, полученные методами IF&PA и ВС, и соответствующие неопределенности в зависимости от количества n подынтервалов (см. этап 1 в разделе 3.1.4) и номинальных значений. Как видно из рисунка 4.16а, величина отклонения варьируется для разных значений n . Очевидно, что при $n = 11$ IF&PA демонстрирует преимущество в определении опорного значения. Из данных рисунка 4.16а и таблицы 4.19 видно, что в большинстве случаев опорные значения, полученные IF&PA и ВС, различаются незначительно, что позволяет

считать оценку IF&PA достоверной. В свою очередь, рисунок 4.16б показывает большую разницу в неопределенности опорных значений для двух исследуемых методов. Значения неопределенности, полученные процедурой IF&PA, в среднем в десять раз ниже, чем значения, полученные методом ВС. Из рисунка 4.16б следует явное преимущество метода IF&PA с точки зрения неопределенности опорного значения.

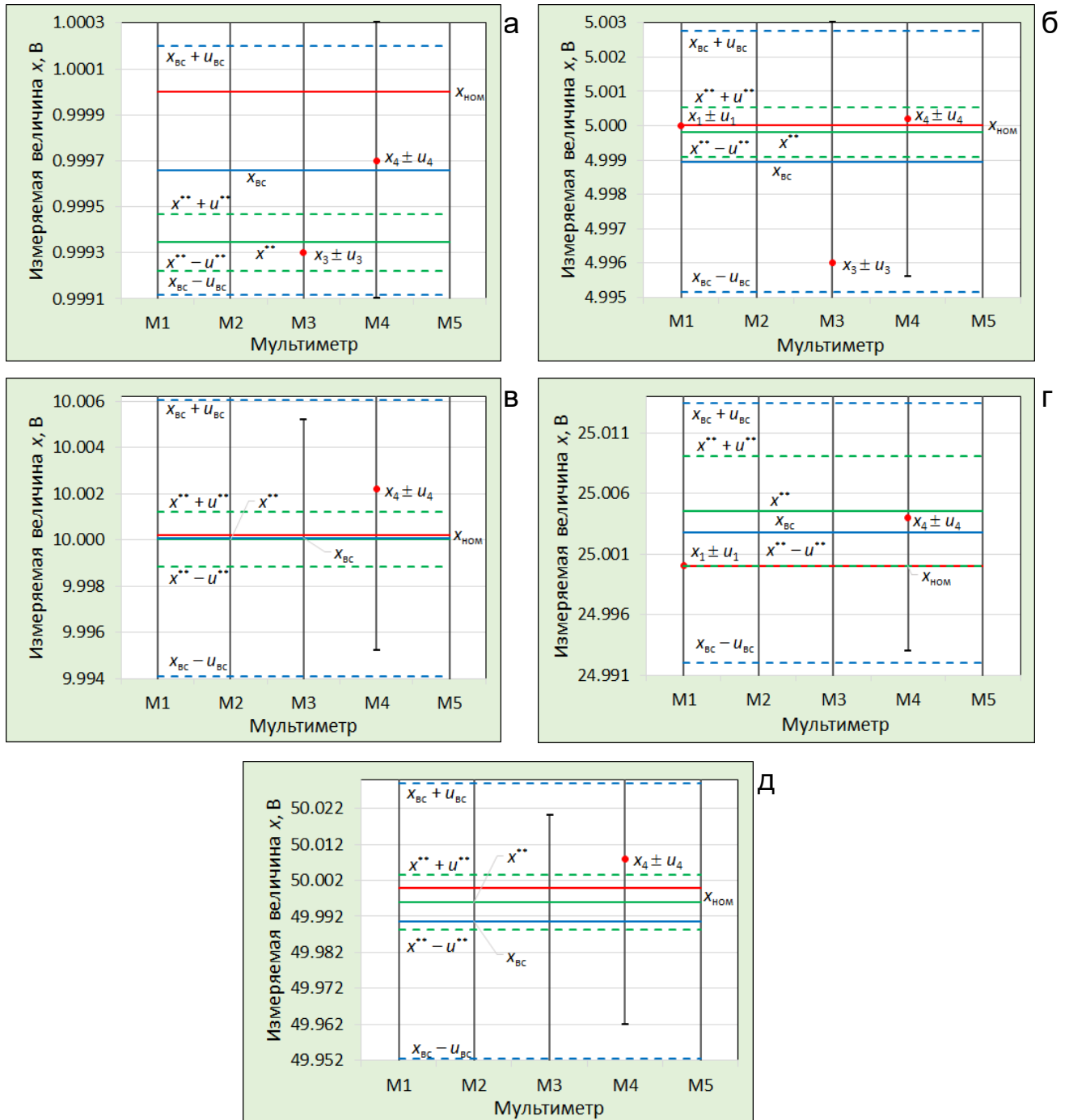


Рисунок 4.15 – Оценка x^{**} и ее неопределенность u^{**} , полученные IF&PA, и оценка $x_{ВС}$ и ее неопределенность $u_{ВС}$, полученные с помощью ВС при номинальных значениях: а) 1 В; б) 5 В; в) 10 В; г) 25 В и д) 50 В

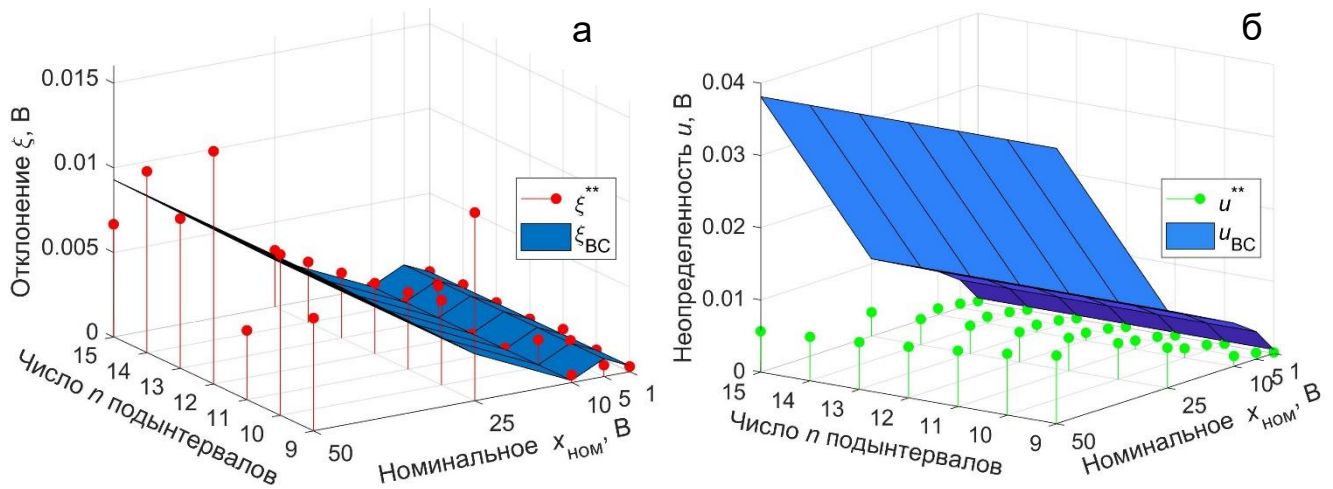


Рисунок 4.16 – Отклонения оценок опорных значений от $x_{ном}$ (а) и соответствующие неопределенности (б), полученные методами IF&PA и BC

4.4.4 Повышение точности измерения угловых скоростей

Современные системы ориентации и навигации построены на основе многокомпонентных микроэлектромеханических систем (МЭМС), содержащих трехкомпонентные гироскопы, акселерометры и магнитометры. Эти датчики предоставляют данные для определения направления, углового и пространственного положения объекта, движущегося в пространстве [101]. Для повышения точности измерения параметров в навигационной системе известно используется несколько однотипных МЭМС-датчиков с дальнейшей обработкой данных определенным образом. Результат можно улучшить, увеличив количество датчиков и (или) их качество; однако это приводит к удорожанию оборудования.

Целью экспериментальных исследований являлась оценка возможности обработки данных датчиков МЭМС методом IF&PA, которая могла бы позволить значительно снизить неопределенность результатов измерений без увеличения стоимости [63].

Для проведения исследований была собрана экспериментальная установка, показанная на рисунке 4.17 [64]. Макетная плата с пятью трехкоординатными МЭМС гироскопами L3G4200D, установленными в различных точках, была установлена на специальный поворотный стол с программным управлением [72]. Для получения информации об угловой скорости поворотного стола с гироскопов использовалась плата сбора данных NI MyRIO 1900 [91]. Поворотный стол был

предварительно откалиброван для обеспечения возможности поддержания угловой скорости с максимальной допускаемой приведенной погрешностью 0,05 %. Следовательно, при измерениях были известны пределы изменения номинальной (калиброванной) скорости, а реальная скорость стола была неизвестна и ее необходимо было определять экспериментально.

Все гироскопы были запрограммированы на измерение угловой скорости в диапазонах измерений ± 500 °/с и ± 250 °/с. На поворотном столе устанавливались номинальные значения скорости w_c , равные 480; 270; 200; 150; 100 и 50 °/с. Таким образом, измерения проводились для быстрого и медленного вращения в точках, близких к минимуму, середине и максимуму диапазона измерения.

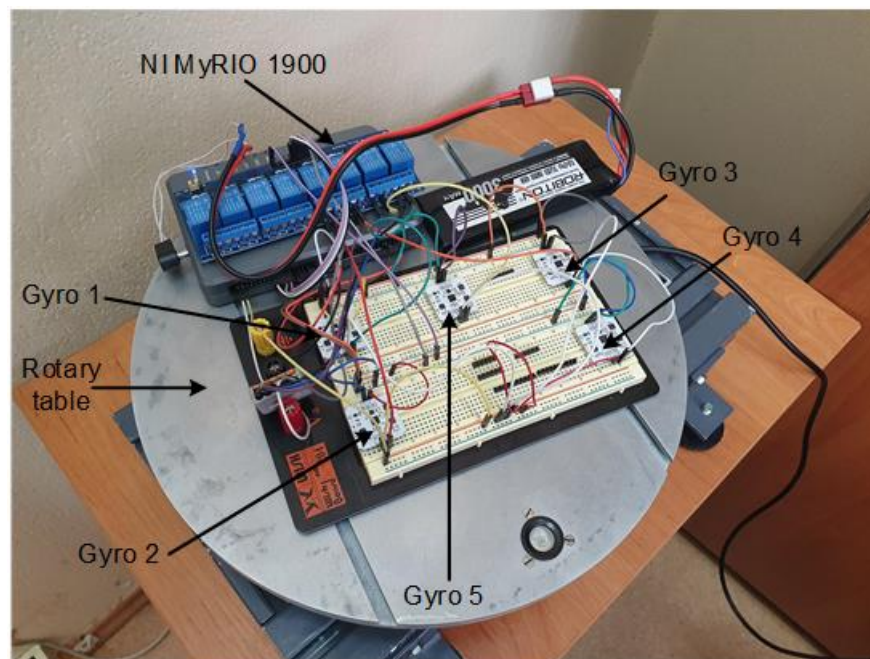


Рисунок 4.17 – Внешний вид экспериментальной измерительной установки

Поскольку в реальных условиях фактическая погрешность каждого датчика L3G4200D неизвестна, было принято, что его максимальная допускаемая погрешность составляет $\gamma_d = 0,2$ % от диапазона измерения. Все измерения проводились вдоль одной оси координат, поскольку поворотный стол задает вращение только по одной оси. В этом случае сигнал по двум другим осям близок к нулю, независимо от заданной угловой скорости стола. Результаты однократных измерений мгновенных значений угловых скоростей приведены в таблице 4.20.

Таблица 4.20 – Результаты измерений w при разных номинальных скоростях w_c

$w_c, \text{ }^\circ/\text{с}$	Измеренная угловая скорость $w, \text{ }^\circ/\text{с}$				
	Гироскоп 1	Гироскоп 2	Гироскоп 3	Гироскоп 4	Гироскоп 5
480	480,3925	480,7775	479,6925	480,6900	479,3600
270	270,1825	269,8675	269,6575	270,2175	269,5175
200	200,2963	199,7800	199,9725	200,1650	199,8413
150	149,9663	149,7475	150,1150	150,2463	150,0538
100	99,8463	99,8988	100,0913	100,1613	100,0213
50	49,9450	49,7963	50,1200	50,0150	50,1638

Измеренные значения из таблицы 4.20 были обработаны методом IF&PA для определения итоговой оценки w^{**} угловой скорости и ее неопределенности u^{**} . Как и ранее, для сравнения, те же данные были обработаны методом ВС, где итоговая оценка $w_{\text{ВС}}$ и ее неопределенность $u_{\text{ВС}}$ вычислялись по формулам (4.8) и (4.9) соответственно.

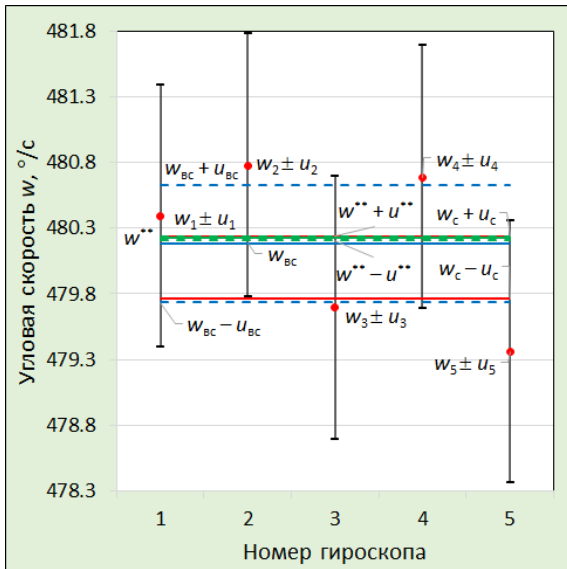
Результаты обработки данных двумя методами сведены в таблицу 4.21.

Таблица 4.21 – Итоговые оценки угловой скорости и их неопределенности, полученные методами IF&PA и ВС

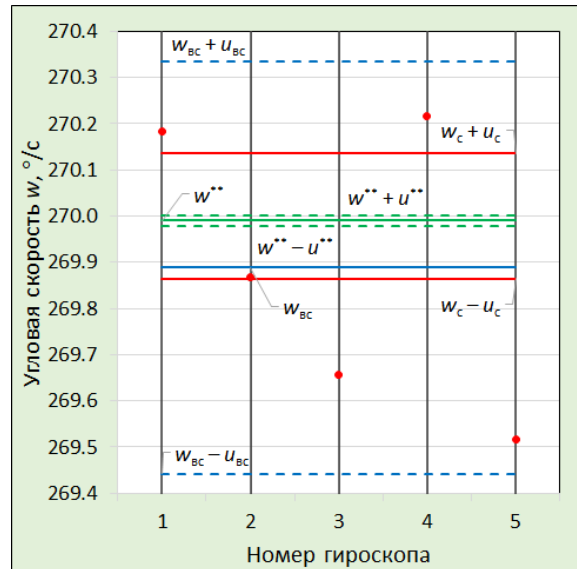
$w_c, \text{ }^\circ/\text{с}$	$u_c, \text{ }^\circ/\text{с}$	IF&PA		ВС	
		$w^{**}, \text{ }^\circ/\text{с}$	$u^{**}, \text{ }^\circ/\text{с}$	$w_{\text{ВС}}, \text{ }^\circ/\text{с}$	$u_{\text{ВС}}, \text{ }^\circ/\text{с}$
480	0,2500	480,2241	0,0155	480,1825	0,4472
270	0,2500	269,9902	0,0123	269,8885	0,4472
200	0,1250	200,1525	0,0114	200,0110	0,4472
150	0,1250	150,1105	0,0114	150,0258	0,4472
100	0,1250	100,1090	0,0105	100,0038	0,4472
50	0,1250	50,0876	0,0108	50,0080	0,4472

На рисунке 4.18 показан пример исходных интервалов для номинальной скорости $w_c = 270 \text{ }^\circ/\text{с}$ и результаты их обработки двумя способами. Пределы номинального значения скорости (рассчитанного как $w_c \pm u_c$) показаны сплошной красной линией, а результаты, полученные методами IF&PA и ВС, обозначены зеленым и синим цветами соответственно.

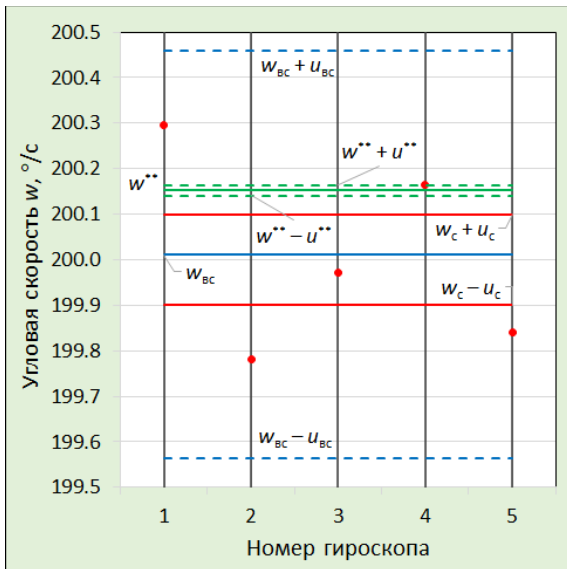
Как видно из данных таблицы 4.21 и рисунка 4.18, полученные оценки w^{**} угловой скорости для всех номинальных значений w_c , кроме $200 \text{ }^\circ/\text{с}$, лежат в пределах $w_c \pm u_c$. Результаты позволяют считать полученный результат достоверным и сделать вывод о фактическом значении угловой скорости стола.



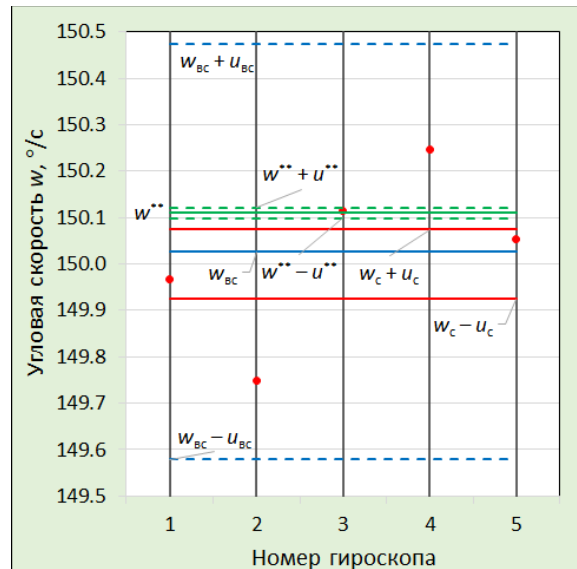
а



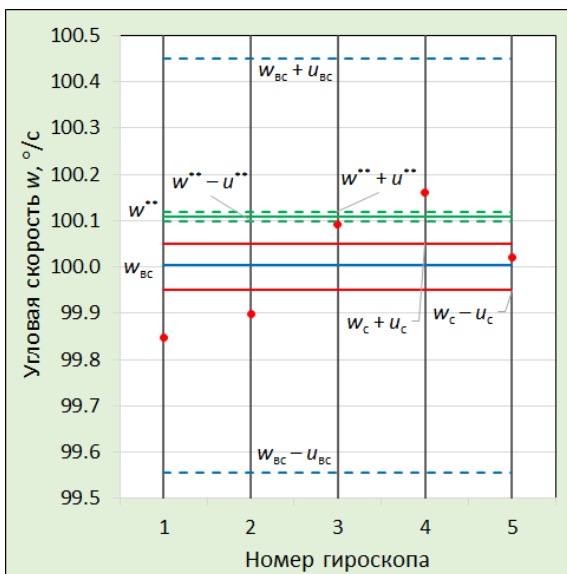
б



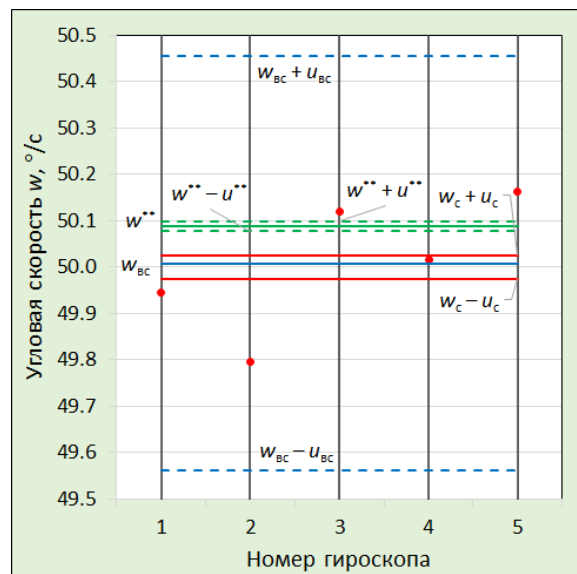
в



г



д



е

Рисунок 4.18 – Итоговая оценка и ее неопределенность, полученные методами IF&PA (зеленые линии) и ВС (синие линии) при номинальных значениях w_c : а) 480 °/с, б) 270 °/с, в) 200 °/с, г) 150 °/с, д) 100 °/с и е) 50 °/с

На рисунке 4.19 показаны значения неопределенностей, полученные с помощью IF&PA (зеленая кривая), ВС (синяя кривая), и заявленных неопределенностей датчиков (серая кривая) в зависимости от номинальных значений w_c и количества n подынтервалов (см. этап 4 процедуры IF&PA в разделе 3.1.5). Из рисунка 4.19 видно, что IF&PA не только улучшает точность исходных данных измерений, полученных датчиками, но также обеспечивает гораздо меньшую (примерно в десять раз) неопределенности итоговых оценок по сравнению с методом ВС.

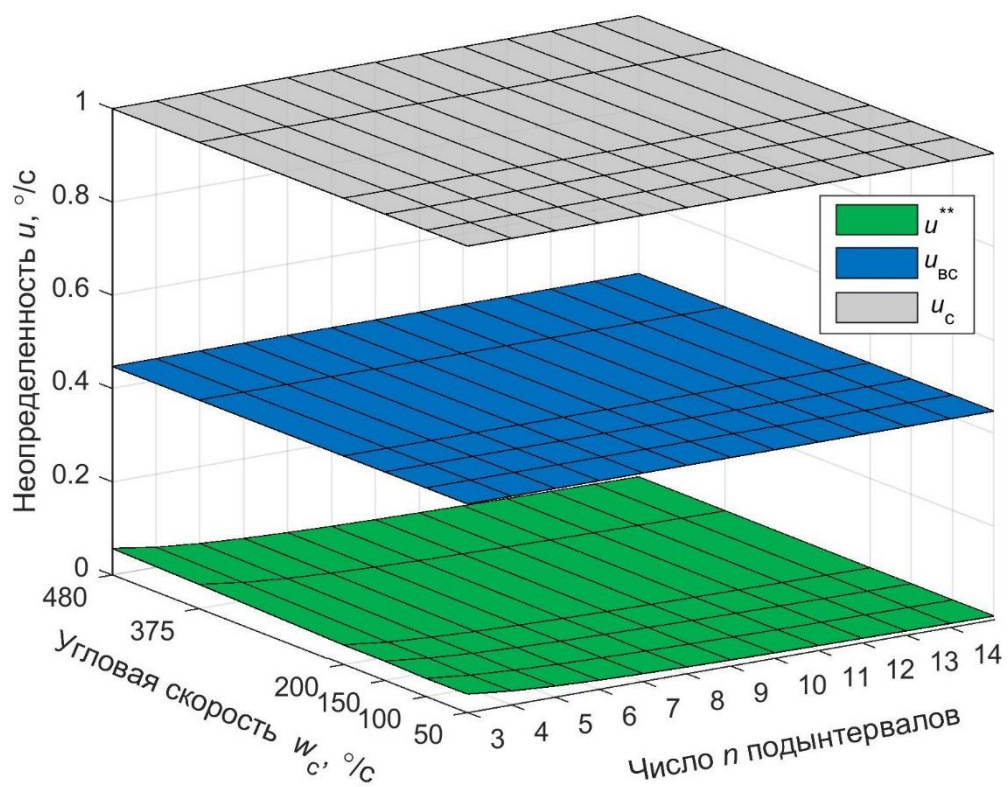


Рисунок 4.19 – Значения неопределенностей, полученные методами IF&PA и ВС в зависимости от мощности n и номинальных значений угловых скоростей

Выводы к главе 4

1. Проведена экспериментальная апробация методов АСИ и МСИ в задаче снижения неопределенности типа В окончательных результатов, вызванной максимальной допустимой погрешностью СИ при измерении сопротивления. Полученные результаты сравнивались с результатами применения метода НО, а также известного метода S&G. Измерения проводились двумя типами мультиметров, один из которых был примерно в 20 раз менее точным, чем

другой. Экспериментальные результаты показали, что:

- отклонения оценок искомых сопротивлений от номинальных значений, полученные методами АСИ, НО и S&G приблизительно одинаковы при использовании обоих типов мультиметров;
 - наименьшие неопределенности оценок искомых сопротивлений получены методом АСИ; для наибольших номинальных сопротивлений выигрыш в неопределенности АСИ по сравнению с методом НО составил примерно 2 раза (для мультиметра повышенной точности) и 3 раза (для мультиметра пониженной точности).
 - Неопределенности оценок искомых сопротивлений, полученные методом МСИ, в 16-17 раз меньше по сравнению с методом НО.
2. Метод IF&PA был апробирован при решении задачи согласования значений фундаментальных констант. Исходные данные представляли собой как *синтезированные (смоделированные)* случайные значения, так и *реальные* значения постоянной Планка, взятые из наборов данных, использованных при согласованиях КОДАТА в 2006 и 2017 годах. С помощью процедуры IF&PA были определены результирующие оценки и соответствующие относительные неопределенности. Полученные результаты процедуры IF&PA сравнивали с соответствующими результатами процедур, основанных на отношении Бёрджа, модифицированном отношении Бёрджа, модели случайных эффектов и модели фиксированных эффектов.
- Результаты обработки данных численного моделирования показали, что отклонения оценки постоянной Планка от ее номинального значения, полученные методом IF&PA, меньше отклонений, полученных методом Бёрджа, как для нормального, так и для равномерного распределения. Полученные результаты указывают на более высокую точность IF&PA по сравнению с процедурой Бёрджа при отсутствии необходимости каких-либо статистических предположений. Неопределенности, полученные с помощью IF&PA, существенно ниже, чем неопределенности процедуры Бёрджа.

- Результаты обработки реальных данных согласования КОДАТА 2006 г. показали, что оценка постоянной Планка, полученная IF&PA, существенно отличается от оценок, полученных другими методами: отношением Бёрджа, модифицированным отношением Бёрджа, моделью случайных эффектов и моделью фиксированных эффектов.
 - Результаты обработки реальных данных специального согласования КОДАТА 2017 г. показали, что оценка постоянной Планка, полученная методом IF&PA довольно близка к рекомендованной и имеет гораздо меньшую неопределенность.
3. Проведена апробация усовершенствованного метода IF&PA для обработки реальных интервальных данных при измерениях напряжения постоянного тока и угловой скорости. Результаты сравнивали с результатами обработки тех же исходных данных методом взвешенного среднего ВС. Экспериментальные результаты показали, что в большинстве случаев опорные значения измеряемых величин, полученные IF&PA и ВС, различаются незначительно, что позволяет считать оценку IF&PA достоверной. Значения неопределенности, полученные процедурой IF&PA, в среднем в десять раз ниже, чем значения, полученные методом ВС.

Заключение

1. Предложены, теоретически и экспериментально исследованы метод аддитивных совокупных измерений и метод мультипликативных совокупных измерений для линейных и мультипликативных комбинаций искомых измеряемых величин соответственно. Методы обеспечивают получение оценок измеряемой величины с неопределенностью в 2-3 раза меньшей по сравнению с методом непосредственной оценки.
2. Предложен и исследован усовершенствованный метод комплексирования интервалов IF&PA, где первым результатом комплексирования является наилучшее дискретное значение в ранжировании консенсуса, найденном для набора наведенных интервалами ранжирований дискретных значений; а второй результат комплексирования формируется повторным применением IF&PA к окрестности первого результата в границах, равных половине расстояния между соседними дискретными значениями. Метод позволяет гарантированно повысить точность второго результата комплексирования и существенно снизить его неопределенность по сравнению с первым результатом комплексирования.
3. Исследованы свойства разбиения диапазона актуальных значений (ДАЗ), полученного объединением исходных интервалов в методе IF&PA. Нелинейный характер влияния нормы разбиения ДАЗ на точность результата комплексирования приводит к возможности появления одинаковых результатов при разных мощностях разбиения и служит основой для усовершенствования метода IF&PA.
4. Экспериментальные результаты подтвердили возможность применения разработанных методов АСИ, МСИ и усовершенствованного IF&PA в таких задачах, как получение надежных оценок значений физических величин и согласование значений фундаментальных физических констант в условиях гетероскедастичности.
5. Результаты диссертационной работы были использованы в Государственном

региональном центре стандартизации, метрологии и испытаний в Томской области и в отделении автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники ТПУ, а также при выполнении НИР по гранту РФФ 18-19-00203.

Список сокращений и обозначений

АИМ	– аддитивный итерационный метод
АМИМ	– аддитивно-мультипликативный итерационный метод
АСИ	– метод аддитивных совокупных измерений
АЦП	– аналого-цифровой преобразователь
БАТ	– блок аддитивных тестов
БМТ	– блок мультипликативных тестов
ВМНК	– взвешенный метод наименьших квадратов
ВС	– метод взвешенного среднего
ВУ	– вычислительное устройство
ГХ	– градуировочная характеристика
ДАЗ	– диапазон актуальных значений
ИП	– измерительный преобразователь
ИС	– измерительная система
ИУ	– измерительное устройство
К	– ключ
КОДАТА	– комитет по данным Международного союза науки ICSU
МДП	– максимальная допустимая погрешность
МИМ	– мультипликативный итерационный метод
МНК	– метод наименьших квадратов
НО	– метод непосредственной оценки
МОМ	– метод образцовых мер
МСИ	– метод мультипликативных совокупных измерений
МЭМС	– микроэлектромеханические системы
ОП	– обратный преобразователь
ПМУ	– параметрический метод уравнивания
СИ	– средство измерения
ТКС	– температурный коэффициент сопротивления
ТМ	– тестовый метод

- ФФК – фундаментальная физическая константа
- ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь
- IF&PA – interval data fusion with preference aggregation (метод комплексирования интервальных измерительных данных агрегированием предпочтений)
- LSA – least squares adjustment
- LSD – least significant digit (единица младшего разряда)

Список используемой литературы

1. Айвазян, С.А. Прикладная статистика Основы эконометрики: В 2-х т. – Т. 1: Теория вероятностей и прикладная статистика / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
2. Айвазян, С.А. Прикладная статистика Основы эконометрики: В 2-х т. – Т. 2: Основы эконометрики / С.А. Айвазян. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 432 с.
3. Алиев, Т.М. Автоматическая коррекция погрешностей цифровых измерительных приборов / Т.М. Алиев, Л.Р. Сейдель. – М.: Энергия, 1975. – 216 с.
4. Алиев, Т.М. Измерительная техника / Т.М. Алиев, А.А. Тер-Хачатуров. – М.: Высшая школа, 1991. – 384 с.
5. Алиев, Т.М. Итерационные методы повышения точности измерений / Т.М. Алиев, А.А. Тер-Хачатуров, А.М. Шекиханов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 168 с.
6. Андрианова, Л.П. Идентификация, контроль и диагностика систем автоматического управления газотурбинными двигателями при полунатурных и стендовых испытаниях: дис. ... докт. тех. наук: 05.13.07 / Андрианова Людмила Прокопьевна. – Уфа, 1998. – 629 с.
7. Большаков, В.Д. Справочник геодезиста: В 2-х книгах. Кн. 1. / В.Д. Большаков, Г.П. Левчук. – М.: Недра, 1985. – 445 с.
8. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
9. Бондарь, М.С. Количественная оценка результатов коррекции погрешностей аналого-цифровых преобразователей по разработанному методу / М.С. Бондарь // Двойные технологии. – 2009. – Том 49, – № 4. – С. 20-24.
10. Бромберг, Э.М. Тестовые методы повышения точности измерений / Э.М. Бромберг, К.Л. Куликовский. – М.: Энергия, 1978. – 176 с.
11. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
12. Гитис, Э.И. Преобразователи информации для электронных цифровых

вычислительных устройств / Э.И. Гитис. – М.: Энергия, 1970. – 339 с.

13. ГОСТ 34100.3.1-2017/ISO/IEC Guide 98-3/Suppl 1:2008 Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. Дополнение 1. Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло. – М.: Стандартиформ, 2017. – 84 с.

14. ГОСТ 34100.3-2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008 Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. – М.: Стандартиформ, 2017. – 112 с.

15. Грановский, В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 287 с.

16. Демиденко, Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

17. Долинский, Е.Ф. Обработка результатов измерений / Е.Ф. Долинский. – М.: Изд-во стандартов, 1973. – 191 с.

18. Земельман, М.А. Автоматическая коррекция погрешностей измерительных устройств / М.А. Земельман. – М.: Изд-во стандартов, 1972. – 199 с.

19. Каршенбойм, С.Г. Фундаментальные физические константы: роль в физике и метрологии и рекомендованные значения / С.Г. Каршенбойм / Успехи физических наук. – 2005. Т. 175. – С. 271-298.

20. Кемени, Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения: пер. с англ. / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – Москва: Советское радио, 1972. – 192 с.

21. Кондратов, В.Т. Новая стратегия измерений / В.Т. Кондратов // Законодательная и прикладная метрология. – 2008. – № 3. – С. 52-59.

22. Кондратов, В.Т. Теория избыточных измерений – теория мирового значения / В.Т. Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2007. – № 1. – С. 152-160.

23. Кондратов, В.Т. Теория избыточных измерений / В.Т. Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2005. – № 1.

– С. 7-24.

24. Кремер, Н.Ш. Эконометрика / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 311 с.

25. Лиманова, Н.И. Датчики механических величин, инвариантные к дестабилизирующим факторам: дис. ... докт. тех. наук: 05.13.05 / Лиманова Наталия Игоревна. – Самара, 2006. – 285 с.

26. Лузин, Н.Н. Дифференциальное исчисление / Н.Н. Лузин. – М.: Высшая школа, 1961. – 477 с.

27. Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2007. – 504 с.

28. Маринушкина, И.А. Обработка данных сличений электрических величин методом агрегирования предпочтений: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: спец. 05.11.01 / И.А. Маринушкина. – Томск: 2015. – 147 с.

29. Мудров, В.И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Радио и связь, 1983. – 304 с.

30. Новицкий, П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 301 с.

31. Новицкий, П.В. Цифровые приборы с частотными датчиками / П.В. Новицкий, В.Г. Кнорринг, В.С. Гутников. – Л.: Энергия, 1970. – 423 с.

32. Осмоловский, П.Ф. Итерационные многоканальные системы автоматического управления / П.Ф. Осмоловский. – М.: Сов. радио, 1969. – 256 с.

33. Панфилов, В.А. Электрические измерения / В.А. Панфилов. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 288 с.

34. Петров, Б.Н. Принцип инвариантности в измерительной технике / Б.Н. Петров. – М.: Наука, 1976. – 243 с.

35. Пиотровский, Я. Теория измерений для инженеров / Я. Пиотровский. – М.: Мир, 1989. – 335 с.

36. Рабинович, С.Г. Погрешности измерений / С.Г. Рабинович. – Л.: Энергия, 1978. – 258 с.

37. Редько, В.В. Волоконно-оптические датчики давления с амплитудной модуляцией оптического сигнала: основные определения и классификация / В.В. Редько, В.Т. Кондратов // Датчики и системы. – 2009. – № 8. – С. 78-84.

38. Редько, В.В. Математические модели избыточных измерений при квадратичной и кубической функциях преобразования измерительного канала / В.В. Редько // Датчики и системы. – 2009. – № 7. – С. 29-33.

39. РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. – М.: Стандартиформ, 2014. – 60 с.

40. РМГ 64-2003 ГСИ. Обеспечение эффективности измерений при управлении технологическими процессами. Методы и способы повышения точности измерений. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. – 20 с.

41. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020664470 (RU); заявка № 2020663640 от 06.11.2020, дата рег. 13.11.2020 // Муравьев С.В., Хо М.Д., Худоногова Л.И. Программный комплекс для комплексирования интервалов агрегированием предпочтений.

42. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020664471 (RU); заявка № 2020663641 от 06.11.2020, дата рег. 13.11.2020 // Муравьев С.В., Хо М.Д. Программное обеспечение для обработки аддитивных совокупных измерений.

43. Семенов, Л.А. Методы построения градуировочных характеристик средств измерений / Л.А. Семенов, Т.Н. Сирая. – Москва: Изд-во стандартов, 1986. – 128 с.

44. Сергеев, А.Г. Метрология и метрологическое обеспечение / А.Г. Сергеев. – М.: Высшее образование, 2008. – 575 с.

45. Туз, Ю.М. Структурные методы повышения точности измерительных устройств / Ю.М. Туз. – Киев: Вища шк., 1976. – 255 с.

46. Хо, М.Д. Повышение точности оценки измеряемой величины на основе аддитивных совокупных измерений / М.Д. Хо, С.В. Муравьев // Материалы докладов XV Международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск, 2019. – Ч. 2. – С. 69-73.

47. Хо, М.Д. Повышение точности оценки измеряемой величины на основе мультипликативных совокупных измерений / М.Д. Хо, С.В. Муравьев // Материалы докладов XVI Международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – Томск, 2020.
48. Хо, М.Д. Уменьшение погрешности при индивидуальной градуировке терморезисторов / М.Д. Хо, С.В. Муравьев // Труды XIV международной научно-технической конференции актуальные проблемы электронного приборостроения. – Новосибирск, 2018. – Т. 3. – С. 161-165.
49. Хо, М.Д. Устранение влияния параметров тестов на скорректированный результат измерения / М.Д. Хо, С.В. Муравьев // Сборник избранных статей научной сессии ТУСУР. По материалам международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск: В-Спектр, 2018. – Ч. 2. – С. 49-51.
50. Худоногова, Л.И. Комплексование интервальных измерительных данных методом агрегирования предпочтений: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: спец. 05.11.13 / Л.И. Худоногова. – Томск: 2017. – 142 с.
51. Шкуратник, В.Л. Измерения в физическом эксперименте / В.Л. Шкуратник. – М.: Изд-во Академии горных наук, 2000. – 256 с.
52. Эльясберг, П.Е. Измерительная информация: сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
53. Asteriou, D. Applied Econometrics / D. Asteriou, S.G. Hall. – New York: Palgrave MacMillan, 2011. – 512 p.
54. Axler, S. Linear Algebra Done Right (Second Edition) / S. Axler. – New York: Springer, 1997. – 251 p.
55. Badi, H.B. Econometrics (Fourth Edition) / H.B. Badi. – Berlin: Springer, 2008. – 408 p.
56. Bich, W. Variances, Covariances and Restraints in Mass Metrology / W. Bich // Metrologia. – 1990. – Vol. 27. – № 3. – P. 111-116.
57. Birge, R.T. Probable Values of the General Physical Constants / R.T. Birge

// Rev. Mod. Phys. – 1929. – Vol. 1. – № 1. – P. 1-73.

58. Bodnar, O. Evaluation of uncertainty in the adjustment of fundamental constants / O. Bodnar, C. Elster, J. Fischer, A. Possolo, B. Toman // Metrologia. – 2016. – Vol. 53. – P. 46-54.

59. Clarkson, M.T. A combinatorial technique for weighbridge verification / M.T. Clarkson, T. Collins, B. Morgan // OIML Bulletin. – 2002. – Vol. 43. – № 2. – P. 5-12.

60. Clarkson, M.T. A technique for large mass and balance calibration / M.T. Clarkson, D.R. White // Proc. 5th Asia-Pacific Symposium on Measurement of Force, Mass and Torque. – 2000. – P. 61-66.

61. Gujarati, D.N. Basic Econometrics (Fifth Edition) / D.N. Gujarati, D.C. Porter. – New York: McGraw-Hill Irwin, 2009. – 944 p.

62. Ho, M.D. Accuracy enhancement of measurand estimate on the base of additive combined measurements / M.D. Ho, S.V. Muravyov // Sensor Review. – 2020. – Vol. 40, № 3. – P. 377-383.

63. Ho, M.D. Adjustment of fundamental physical constant values using the interval fusion with preference aggregation / S.V. Muravyov, L.I. Khudonogova, M.D. Ho // Measurement. – 2020. – Vol. 163. – P. 108037.

64. Ho, M.D. Inertial MEMS Sensors Accuracy Improvement by Interval Fusion with Preference Aggregation / S.V. Muravyov, P. Baranov, L.I. Khudonogova, M.D. Ho // 2020 IEEE Sensors. – 2020. – P. 1-4.

65. Ho, M.D. Precise Measurand Value Estimating by Interval Fusion with Preference Aggregation: Heteroscedasticity Case / S.V. Muravyov, L.I. Khudonogova, M.D. Ho // Proceedings of 17th IMEKO TC10 Conference «Global Trends in Testing, Diagnostics & Inspection for 2030». – 2020. – P. 208-213.

66. JCGM 102:2011 Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» – Extension to any number of output quantities. – Paris: Joint Committee for Guides in Metrology, 2011. – 80 p.

67. JCGM 200:2008 Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины: пер. с англ. и фр. / Всерос. науч.-

исслед. ин-т метрологии им. Д. И. Менделеева, Белорус. гос. ин-т метрологии. Изд. 2-е, испр. – СПб.: НПО «Профессионал», 2010. – 82 с.

68. Kacker, R.N. Assessing differences between results determined according to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement / R.N. Kacker, R. Kessel, K.D. Sommer // *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* – 2010. – Vol. 115. – № 6. – P. 453-459.

69. Karshenboim, S.G. Advances in determination of fundamental constants / S.G. Karshenboim, P.J. Mohr, D.B. Newell // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* – 2015. – Vol. 44. – № 3. – P. 031101.

70. Karshenboim, S.G. Progress in the accuracy of the fundamental physical constants: 2010 CODATA recommended values / S.G. Karshenboim // *Phys. Usp.* – 2013. – Vol. 56. – № 9. – P. 883-909.

71. Kwan, A. Vernier scales and other early devices for precise measurement / A. Kwan // *Am. J. Phys.* – 2011. – Vol. 79. – P. 368-373.

72. L3G4200D MEMS motion sensor: ultra-stable three-axis digital output gyroscope. – Switzerland: STMicroelectronics, 2010. – 42 p.

73. Maddala, G.S. Introduction to Econometrics (Fourth Edition) / G.S. Maddala, K. Lahiri. – New York: Wiley, 2009. – 654 p.

74. Mana, G. Model selection in the average of inconsistent data: an analysis of the measured Planck-constant values / G. Mana, E. Massa, M. Predescu // *Metrologia.* – 2012. – Vol. 49. – P. 492-500.

75. Mana, G. Model uncertainty and reference value of the Planck constant / G. Mana // *Measurement.* – 2016. – Vol. 94. – P. 26-30.

76. McNaught, A.D. Compendium of Chemical Terminology / A. D. McNaught, A. Wilkinson. – Cambridge: Wiley, 1997. – 464 p.

77. Mohr, P.J. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998 / P.J. Mohr, B.N. Taylor // *Rev. Mod. Phys.* – 2000. – Vol. 72. – № 2. – P. 351-495.

78. Mohr, P.J. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014 / P.J. Mohr, D.B. Newell, B.N. Taylor // *Rev. Mod. Phys.* – 2016. – Vol.

88. – № 1. – P. 035009.

79. Mohr, P.J. Data and analysis for the CODATA 2017 special fundamental constants adjustment / P.J. Mohr, D.B. Newell, B.N. Taylor, E. Tiesinga // *Metrologia*. – 2018. – Vol. 55. – P. 125-146.

80. Muravyov, S.V. A consensus ranking based proposal for combining data in adjustment of the fundamental physical constant values / S.V. Muravyov, L.I. Khudonogova // *Proc. 16th IMEKO TC10 Conf. Testing, Diagnostics & Inspection as a comprehensive value chain for Quality & Safety*. – 2019. – P. 125-130.

81. Muravyov, S.V. Dealing with chaotic results of Kemeny ranking determination / S.V. Muravyov // *Measurement*. – 2014. – Vol. 51. – P. 328-334.

82. Muravyov, S.V. How to transform all multiple solutions of the Kemeny Ranking Problem into a single solution / S.V. Muravyov, P.F. Baranov, E.Y. Emelyanova // *J. Phys.: Conf. Series*. – 2019. – Vol. 1379. – № 1. – P. 012053.

83. Muravyov, S.V. Interval data fusion with preference aggregation / S.V. Muravyov, L.I. Khudonogova, E.Y. Emelyanova // *Measurement*. – 2018. – Vol. 116. – P. 621-630.

84. Muravyov, S.V. Largest consistent subsets in interlaboratory comparisons: preference aggregation approach / S.V. Muravyov, I.A. Marinushkina // *Proc. 14th Joint Intern. IMEKO TC1+TC7+TC13 Symp*. – 2011. – P. 69-73.

85. Muravyov, S.V. Numerical experimental investigation of comparison data evaluation method using preference aggregation / S.V. Muravyov, I.A. Marinushkina, D.D. Garif // *Acta IMEKO*. – 2017. – Vol. 6. – № 1. – P. 20–26.

86. Muravyov, S.V. Ordinal measurement, preference aggregation and interlaboratory comparisons / S.V. Muravyov // *Measurement*. – 2013. – Vol. 46. – № 8. – P. 2927-2935.

87. Muravyov, S.V. Processing data from interlaboratory comparisons by the method of preference aggregation / S.V. Muravyov, I.A. Marinushkina // *Meas. Tech*. – 2016. – Vol. 58. – № 12. – P. 1285-1291.

88. Muravyov, S.V. Some structural properties of a formal model of measurement procedure / S.V. Muravyov, V. Savolainen // *Measurement*. – 1996. –

Vol. 18. – № 8. – P. 81-87.

89. Muravyov, S.V., Zlygosteva G.V., Borikov V.N. Multiplicative method for reduction of bias in indirect digital measurement result / S.V. Muravyov, G.V. Zlygosteva, V.N. Borikov // *Metrology and Measurement Systems*. – 2011. – Vol. 18. – № 3. – P. 481-490.

90. Newell, D.B. The CODATA 2017 values of h , e , k , and NA for the revision of the SI / D.B Newell, F. Cabiati, J. Fischer, K. Fujii, S.G. Karshenboim, H.S. Margolis, E. Mirandés, P.J. Mohr, F. Nez, K. Pachucki, T.J. Quinn, B.N. Taylor, M. Wang, B.M. Wood, Z. Zhang // *Metrologia*. – 2018. – Vol. 55. – P. L13-L16.

91. NI myRIO-1900 User guide and specifications. – Texas: National Instruments, 2016. – 32 p.

92. Nielsen, L. Evaluation of measurements by the method of least squares / L. Nielsen // *Algorithms for Approximation IV* ed J Levesley et al. – 2002. – P. 170-86.

93. Nielsen, L. Least-squares estimation using Lagrange multipliers / L. Nielsen // *Metrologia*. – 1998. – Vol. 35. – № 2. – P. 115-118.

94. OIML G 19:2017 (E) The role of measurement uncertainty in conformity assessment decisions in legal metrology. – Paris: International Organization of Legal Metrology, 2017. – 72 p.

95. Pavese, F. Data inter-comparisons in the context of the knowledge-gaining process: an overview / F. Pavese, A. Charki // *Acta IMEKO*. – 2018. – Vol. 7. – № 2. – P. 73-83.

96. Rabinovich, S.G. Evaluating Measurement Accuracy. A Practical Approach (Second Edition) / S.G. Rabinovich. – New York: Springer, 2013. – 332 p.

97. Roger, A.H. Matrix Analysis (Second Edition) / A.H. Roger, R.J. Charles. – New York: Cambridge University Press, 2012. – 662 p.

98. Siuda, R. Combined measurements – A way to improve the measurement accuracy of an additive quantity / R. Siuda, A. Grabowski // *Measurement*. – 2012. – Vol. 45. – № 5. – P. 1165-1169.

99. Tofallis, C. Least Squares Percentage Regression / C. Tofallis // *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. – 2008. – Vol. 7. – № 2. – P. 526-534.

100. Toman, B. Alternative analyses of measurements of the Planck constant / B. Toman, J. Fischer, C. Elster // *Metrologia*. – 2012. – Vol. 49. – P. 567-571.

101. Wang, W. Design of multi-degree-of-freedom micromachined vibratory gyroscope with double sense-modes / W. Wang, X. Lv, D. Xu // *Measurement*. – 2014. – Vol. 58. – P. 6-11.

102. White, D.R. A general technique for calibrating indicating instruments / D.R. White, M.T. Clarkson, P. Saunders, H.W. Yoon // *Metrologia*. – 2008. – Vol. 45. – № 2. – P. 199-210.

103. White, D.R. A simple resistance network for calibrating resistance bridges / D.R. White, K. Jones, J.M. Williams, I.E. Ramsey // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. – 1997. – Vol. 46. – № 5. – P. 1068-1074.

104. Wiora, J. A weighted method for reducing measurement uncertainty below that which results from maximum permissible error / J. Wiora, A. Kozyra, A. Wiora // *Measurement Science and Technology*. – 2016. – Vol. 27. – № 3. – P. 035007.

105. Wiora, J. Comments on Combined measurements – A way to improve the measurement accuracy of an additive quantity by R. Siuda and A. Grabowski / J. Wiora, A. Kozyra, A. Wiora // *Measurement*. – 2013. – Vol. 46. – № 7. – P. 2259-2261.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Акты внедрения результатов диссертационной работы

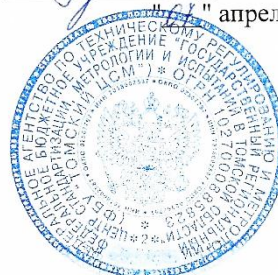


ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО
ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И
МЕТРОЛОГИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ
ЦЕНТР СТАНДАРТИЗАЦИИ,
МЕТРОЛОГИИ И ИСПЫТАНИЙ
В ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ»
(ФБУ «Томский ЦСМ»)

Косарева ул., д.17а, г.Томск, Томская область, 634012,
тел: (3822) 554486, факс: 561961,
голосовой портал: (3822) 70-02-72,
E-mail: tomsk@tcsms.tomsk.ru; <http://tomsksm.ru>
ОКПО 02567797, ОГРН 1027000885823,
ОКТМО 69701000, ИНН/КПП 7018002587/ 701701001

"УТВЕРЖДАЮ"
Директор ФБУ "Томский ЦСМ", к.т.в.
М.М. Чухланцева
"_____" апреля 2021 г.



А К Т

об использовании результатов
диссертации Хо Минь Дая на тему: "Повышение точности анализа
гетероскедастичных измерительных данных", представленной на соискание ученой степени
кандидата технических наук по специальности 05.11.01 – Приборы и методы измерения
(электрические и магнитные величины), в ФБУ "Томский ЦСМ"

Комиссия в составе: Павлова Л.Н., заместитель директора по метрологии, Спасенко С.А.,
начальник отдела электромагнитных средств измерений, Юзефович Н.В., ведущий инженер по
метрологии отдела электромагнитных средств измерений – составила настоящий акт о том, что
результаты диссертационной работы Хо Минь Дая:

- метод аддитивных совокупных измерений и метод мультипликативных совокупных измерений для линейных и мультипликативных комбинаций искомых измеряемых величин, соответственно, и
- усовершенствованный метод комплексирования интервальных измерительных данных агрегированием предпочтений (IF&PA)

используются в ФБУ "Томский ЦСМ" при обработке неравноточных результатов измерений электрических и магнитных величин.

Предложенные методы аддитивных и мультипликативных совокупных измерений обеспечивают получение оценок измеряемой величины с неопределенностью в 2-3 раза меньшей по сравнению с методом непосредственной оценки. Усовершенствованный метод IF&PA позволяет гарантированно повысить точность определяемых с его помощью оценок измеряемых величин и может использоваться для организации межлабораторных сличений.

Зам. директора по метрологии

Павлова Л.Н.

Начальник отдела электромагнитных СИ

Спасенко С.А.

Ведущий инженер по метрологии отдела электромагнитных СИ

Юзефович Н.В.



Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«National Research Tomsk Polytechnic University» (TPU)
30, Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia
Tel. +7-3822-606333, +7-3822-701779,
Fax +7-3822-606444, e-mail: tpu@tpu.ru, tpu.ru
OKPO (National Classification of Enterprises and Organizations):
02069303,
Company Number: 027000890168,
VAT/KPP (Code of Reason for Registration)
7018007264/701701001, BIC 016902004

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет» (ТПУ)
Ленина, пр., д. 30, г. Томск, 634050, Россия
тел.: +7-3822-606333, +7-3822-701779,
факс +7-3822-606444, e-mail: tpu@tpu.ru, tpu.ru
ОКПО 02069303, ОГРН 1027000890168,
ИНН/КПП 7018007264/701701001, БИК 016902004



"УТВЕРЖДАЮ"

И.о. директора ИШИТР, к.ф.-м.н,

Яворский Р.Э.

" 2021 г.

Акт

о внедрении в учебный процесс результатов
диссертации Хо М.Д. на тему: "Повышение точности анализа гетероскедастичных измерительных
данных", представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Комиссия в составе: председателя – заведующего кафедрой-руководителя отделения автоматизации и робототехники на правах кафедры, к.т.н., доцента Филипас А.А., и членов – к.т.н., доцента Литвинова Р.В. и к.т.н., доцента Кузьминской Е.В.– составила настоящий акт в том, что результаты диссертационной работы Хо М.Д.:

- методы аддитивных и мультипликативных совокупных измерений для повышения точности результатов измерений на основе параметрического уравнивания;
- усовершенствованный метод комплексирования интервалов агрегированием предпочтений IF&PA для повышения точности оценки измеряемой величины;
- программное обеспечение в системе Matlab, реализующее методы повышения точности результатов совокупных неравноточных измерений –

используются при проведении практических и лабораторных занятий по дисциплинам "Теория измерений и метрология", "Информационно-измерительные системы". Результаты обеспечивают возможность применения инновационных технологий преподавания и повышают качество учебного процесса.

Заведующий кафедрой-руководитель
отделения автоматизации и робототехники
на правах кафедры

Филипас А.А.

Доцент ОАР

Литвинов Р.В.

Доцент ОАР

Кузьминская Е.В.