# Естественные науки

УДК 514.76

## О ЦЕНТРИРОВАНИИ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam7@front.ru

*Проводится аналитическое и геометрическое построение двух полей точек (центров) в соответствующих m-плоскостях p-мерного многообразия этих плоскостей в n-мерном евклидовом пространстве (1<p<(m+1)(n−m)).*

### 1. Аналитический аппарат

Все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими, а рассмотрения носят локальный характер.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–7].

**1.1.** Рассматривается $p$-мерное дифференцируемое многообразие $M_p$ класса $C^\infty$ (или $C^\omega$) с базовыми формами $\theta^a$ $(a,b,c=\overline{1,p})$, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$D\theta^a=\theta^b\wedge\theta^a_b,\ D\theta^b_a=\theta^c_a\wedge\theta^b_c+\theta^c\wedge\theta^b_{ca},\ldots \tag{1.1}$$

Как известно [3] (см. теорему 3.2), с каждой точкой $(u^a)$ многообразия $M_p$, где $u^a$ – первые интегралы вполне интегрируемой системы форм $\theta^a$, ассоциируется последовательность центроаффинных дифференциально-геометрических групп $D_s$ $(s=1,2,...)$ порядка $s$. Обозначим $L_p$ пространство представлений группы $D_1$ и внесём в него центроаффинную структуру, т.е. будем его считать центроаффинным пространством, отнесённым к локальному центроаффинному реперу $\tilde{R}=\{\overline{B},\overline{\varepsilon_a}\}$, где

$$\delta\overline{B}=0,\ \delta\overline{\varepsilon}_a=\tilde{\theta}^b_a\overline{\varepsilon}_b,\ \tilde{\theta}^b_a=\theta^b_a\Big|_{\theta^c=0}.$$

**1.2.** Рассматривается $n$-мерное евклидово пространство $E_n$, отнесённое к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e_i}\}$, $(i,j,k=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\overline{A}=\omega^i\overline{e}_i,\ d\overline{e}_i=\omega^j_i\overline{e}_j,$$
$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega^i_k,\ D\omega^k_i=\omega^j_i\wedge\omega^k_j. \tag{1.2}$$

Здесь 1-формы $\omega^j_i$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega^j_i+\omega^i_j=0, \tag{1.3}$$

вытекающим из условий ортонормальности репера $R$:

$$\langle\overline{e}_i;\overline{e}_j\rangle=\begin{cases}1,\ i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь символом $\langle\overline{x};\overline{y}\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ пространства $E_n$.

**1.3.** Обозначим $Q_N$, где

$$N=(m+1)(n-m), \tag{1.5}$$

$N$-мерное грассманово дифференцируемое многообразие всех $m$-мерных плоскостей ($m$-плоскостей) $l_m$ пространства $E_n$. К каждой $m$-плоскости $l_m\in Q_N$ присоединим ортонормальный репер $R$ так, чтобы

$$l_m=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_m). \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем символом $l_q=(\overline{X},\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_q)$ обозначается $q$ – плоскость пространства $E_n$, проходящая через точку $X$ с радиус-вектором $\overline{X}$ и параллельная линейно независимым векторам $\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_q$ пространства $E_n$. Из (1.6) в силу (1.2) получаем, что 1-формы $\omega^{\hat\alpha}$, $\omega^{\hat\alpha}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma,\sigma=\overline{1,m};\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n})$ являются базовыми на многообразии $Q_N$, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$D\omega^{\hat\alpha}=\omega^\alpha\wedge\omega^{\hat\alpha}_\alpha+\omega^{\hat\beta}\wedge\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta},$$
$$D\omega^{\hat\alpha}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\wedge\omega^{\hat\alpha}_\beta+\omega^{\hat\beta}_\alpha\wedge\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta}. \tag{1.7}$$

**1.4.** Обозначим $R_{p,N}=(M_p,Q_N)$ расслоенное пространство с базой $M_p$ и слоем $Q_N$, соответствующим каждой точке $B(u^a)\in M_p$. Заметим, что 1-формы $\theta^a$, $\omega^{\hat\alpha}$ и $\omega^{\hat\alpha}_\alpha$ являются базовыми формами $(p+N)$-мерного дифференцируемого многообразия $R_{p,N}=M_p\times Q_N$, которые удовлетворяют структурным уравнениям (1.1) и (1.7). В расслоении $R_{p,N}$ зададим гладкое сечение: каждой точке $B(u^a)\in M_p$ поставим в соответствие вполне определённую $m$-плоскость $l_m\in Q_N$. Тогда в силу (1.1) и (1.7) дифференциальные уравнения этого сечения запишутся в виде:

$$\omega^{\hat\alpha}=A^{\hat\alpha}_{a}\theta^{a},\ \omega^{\hat\alpha}_{\alpha}=A^{\hat\alpha}_{\alpha a}\theta^{a}=-\omega^{\alpha}_{\hat\alpha}=-A^{\alpha}_{\hat\alpha a}\theta^{a}. \quad (1.8)$$

Здесь величины $A^{\hat\alpha}_{a}$ и $A^{\hat\alpha}_{\alpha a}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA^{\hat\alpha}_{a}-A^{\hat\alpha}_{b}\theta^{b}_{a}-A^{\hat\alpha}_{\alpha a}\omega^{\alpha}+A^{\hat\beta}_{a}\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta}=\tilde A^{\hat\alpha}_{ab}\theta^{b},\ \tilde A_{[ab]}=0,$$
$$dA^{\hat\alpha}_{\alpha a}-A^{\hat\alpha}_{\alpha b}\theta^{b}_{a}-A^{\hat\alpha}_{\beta a}\omega^{\beta}_{\alpha}+A^{\hat\beta}_{\alpha a}\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta}=A^{\hat\alpha}_{\alpha ab}\theta^{b},\ A^{\hat\alpha}_{\alpha[ab]}=0. \quad (1.9)$$

**Замечание 1.1.** Из (1.4), (1.6) и (1.8) следует, что с каждой $m$-плоскостью $l_m\in Q_N$, отвечающей точке $B(u^a)\in M_p$ и являющейся векторным линейным евклидовым подпространством пространства $E_n$, натянутым на $m$ линейно независимые векторы $\bar e_1,\bar e_2,\ldots,\bar e_m$, ассоциируется ортонормальное $(n-m)$-мерное евклидово подпространство

$$F_{n-m}=\{\bar e_{m+1},\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_n\}, \quad (1.10)$$

натянутое на линейно независимые векторы $\bar e_{m+1},\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_n$ (как ортогональное дополнение векторного подпространства $l_m$).

**Замечание 1.2.** В данной статье будут рассматриваться поля геометрических образов многообразия $S^m_p$ в $E_n$ – секущей $p$-мерной поверхности расслоения $R_{p,N}$, которое является $p$-мерным семейством $m$-плоскостей $l_m$ в $E_n$. Здесь и в дальнейшем с учётом (1.5) предполагается, что число $p$ удовлетворяет неравенству

$$1<p<N. \quad (1.11)$$

**Замечание 1.3.** Заметим, что величины $A^{\hat\alpha}_{a}$ и $A^{\hat\alpha}_{\alpha a}$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1.9), образуют локальный внутренний фундаментальный геометрический объект

$$\Gamma_1=\{A^{\hat\alpha}_{a},A^{\hat\alpha}_{\alpha a}\} \quad (1.12)$$

первого порядка многообразия $S^m_p$ в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

## 2. Поля некоторых геометрических подобъектов объекта $\Gamma_1$

С помощью компонент геометрического объекта (1.12) на базе $M_p$ расслоения $R_{p,N}$ рассмотрим следующие величины, которые с учётом (1.11) и (1.9) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$A^{\beta}_{\alpha ab}=\frac{1}{2}A^{\hat\alpha}_{\alpha(a}A^{\beta}_{|\hat\alpha|b)}=A^{\alpha}_{\beta ab},\quad A_{ba}=A_{ab}=A^{\alpha}_{\alpha ab},$$
$$A_{ab}A^{ac}=\delta^{c}_{b},\quad \det[A_{ab}]\neq 0, \quad (2.1)$$

$$A^{\alpha}_{ab}=\frac{1}{2}A^{\hat\alpha}_{(a}A^{\alpha}_{\hat\alpha b)},\ A^{\alpha}=A^{\alpha}_{ab}A^{ab}, \quad (2.2)$$

$$dA^{\beta}_{\alpha ab}+A^{\gamma}_{\alpha ab}\omega^{\beta}_{\gamma}-A^{\beta}_{\gamma ab}\omega^{\gamma}_{\alpha}-A^{\beta}_{\alpha cb}\theta^{c}_{a}-A^{\beta}_{\alpha ac}\theta^{c}_{b}=A^{\beta}_{\alpha abc}\theta^{c},$$
$$dA_{ab}-A_{ac}\theta^{c}_{b}-A_{cb}\theta^{c}_{a}=A_{abc}\theta^{c},$$
$$dA^{ab}+A^{cb}\theta^{a}_{c}+A^{ac}\theta^{b}_{c}=A^{ab}_{c}\theta^{c}, \quad (2.3)$$

$$dA^{\beta}_{\alpha}+A^{\gamma}_{\alpha}\omega^{\beta}_{\gamma}-A^{\beta}_{\gamma}\omega^{\gamma}_{\alpha}=A^{\beta}_{\alpha c}\theta^{c}, \quad (2.4)$$

$$dA^{\alpha}_{ab}+A^{\beta}_{ab}\omega^{\alpha}_{\beta}-A^{\alpha}_{cb}\theta^{c}_{a}-A^{\alpha}_{ac}\theta^{c}_{b}-A^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{\beta}=A^{\alpha}_{abc}\theta^{c},$$
$$dA^{\alpha}-A^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}-A^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}=\tilde A^{\alpha}_{c}\theta^{c}, \quad (2.5)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m};\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n};\ a,b,c=\overline{1,p}).$$

Здесь явный вид величин, стоящих при $\theta^c$, для нас несущественный.

Из (2.2–2.5) следует, что каждая из величин (2.1) образует соответствующие геометрические подобъекты в смысле [2] фундаментального геометрического объекта (1.12):

1. смешанный тензор
$$\{A^{\beta}_{\alpha ab}\}, \quad (2.6)$$
2. дважды ковариантный симметрический тензор
$$\{A_{ab}\}, \quad (2.7)$$
3. смешанный тензор второй валентности
$$\{A^{\beta}_{\alpha}\}, \quad (2.8)$$
4. основной геометрический подобъект
$$\{A^{\alpha},A^{\alpha}_{\beta}\}. \quad (2.9)$$

**Замечание 2.1.** в следующем пункте будут рассматриваться геометрические образы, отвечающие точке $B(u^a)\in M_p$, которые определяются каждым из геометрических подобъектов (2.6–2.9).

## 3. Геометрические образы, ассоциированные с подобъектами геометрического объекта

### 3.1. Инвариантный гиперконус $K_{p-1}\subset L_p$

Кривую $k(t)$ на базе $M_p$, проходящую через точку $B(u^a)\in M_p$, будем задавать следующей параметрической системой дифференциальных уравнений:

$$\theta^{a}=t^{a}\theta,\quad D\theta=\theta\wedge\theta_1. \quad (3.1)$$

Здесь величины $t^a$ с учётом (1.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dt^{a}+t^{b}\theta^{a}_{b}=t^{a}_{b}\theta^{b},\quad (a,b=\overline{1,p}).$$

Геометрически величины $t^a$ определяют в центроаффинном пространстве $L_p$ в точке $B(u^a)\in M_p$ направление

$$\bar t=(\bar B,\bar\varepsilon_a)t^{a}, \quad (3.2)$$

касательное к кривой $k(t)$ в точке $B(u^a)$.

Рассмотрим в $l_m\in S^m_p$ вектор

$$\bar x=x^{\alpha}\bar e_{\alpha}, \quad (3.3)$$

отвечающий точке $B(u^a)\in M_p$.

Из $d\bar x=(dx^{\beta}+x^{\alpha}\omega^{\beta}_{\alpha})\bar e_{\beta}+x^{\alpha}\omega^{\hat\alpha}_{\alpha}\bar e_{\hat\alpha}$ в силу (1.8), (1.10) и (3.1) следует, что вектор

$$\bar y=y^{\hat\alpha}\bar e_{\hat\alpha},\ y^{\hat\alpha}=x^{\alpha}A^{\hat\alpha}_{\alpha a}t^{a} \quad (3.4)$$

параллелен ортогональной проекции линейного векторного подпространства $T(\bar r)_{k(t)}\cup l_m$ на векторное подпространство $(F_{n-m})_{\bar r}$. Здесь $T(\bar r)_{k(t)}$ означает касательную к индикатрисе вектора $\bar r=\lambda\bar x$ вдоль кривой $k(t)$. Из (1.2), (1.4), (1.8), (3.1), (2.1) и (3.4) следует, что вектор

$$\bar z=z^{\beta}\bar e_{\beta},\ z^{\beta}=x^{\alpha}A^{\beta}_{\alpha ab}t^{a}t^{b} \quad (3.5)$$

параллелен пересечению линейного векторного подпространства, натянутого на касательную к индикатрисе вектора $\overline{R}=\mu\overline{y}$ и векторное подпространство $(F_{n-m})_{\overline{R}}$, с подпространством $l_m$.

Таким образом, каждому направлению (3.2) в $L_p$ отвечает симметрический линейный оператор векторного подпространства $l_m$ на себя:

$$\Pi(t)=\{A^{\beta}_{\alpha ab}t^a t^b\}:l_m\to l_m. \qquad (3.6)$$

Из (3.6) в силу (2.1) заключаем, что гиперконус $K_{p-1}\subset L_p$ второго порядка с вершиной $B(u^a)\in M_p$:

$$K_{p-1}:A_{ab}t^a t^b=0 \qquad (3.7)$$

представляет собой совокупность всех направлений (3.2), которым отвечают линейные операторы $\Pi(t):l_m\to l_m$ с нулевыми следами. Можно показать, что в общем случае гиперконус $K_{p-1}$ не вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку $B(u^a)\in M_p$, т.е. $\det[A_{ab}]\neq 0$ на базе $M_p$.

**Замечание 3.1.** Всюду в пункте 3 из рассмотрения исключаются фокальные кривые $k(t)$ на базе $M_p$, проходящие через точку $B(u^a)\in M_p$, для которых соответствующие точки в $l_m$ являются фокусами в смысле [4].

### 3.2. Линейный оператор $\Pi:l_m\to l_m$

Из (3.2) и (3.6) с учётом (3.3) следует, что векторам $\overline{x}\in l_m$ и $\overline{v}=v^\alpha\overline{e}_\alpha\in l_m$, отвечающим точке $B(u^a)\in M_p$, соответствует в $l_m$ гиперконус второго порядка с вершиной $B(u^a)$:

$$K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})=\{t\in L_p:\Pi(t)\overline{x}\perp\overline{v}\}\Leftrightarrow\sum_{\beta=1}^{m}x^\alpha v^\beta A^{\beta}_{\alpha ab}\,t^a t^b=0. \qquad (3.8)$$

Из (3.8) в силу (2.1) и (3.7) находим, что совокупность всех векторов $\overline{v}\in l_m$ таких, что гиперконусы $K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})\subset L_p$ и $K_{p-1}\subset L_p$ аполярны в смысле [6] (т.е. каждое центроаффинное преобразование пространства, порождаемое этими гиперконусами, имеет нулевой след) образует в $l_m$ линейное $(m-1)$-мерное подпространство

$$\Gamma_{m-1}(\overline{x})\Leftrightarrow\sum_{\beta=1}^{m}x^\alpha v^\beta A^{\beta}_{\alpha}=0,$$

отвечающее вектору $\overline{x}\in l_m$. Это подпространство ортогонально вектору $\overline{z}=x^\alpha A^{\beta}_{\alpha}\overline{e}_\beta\in l_m$. Таким образом, каждой точке $B(u^a)\in M_p$ отвечает симметрический линейный оператор

$$\Pi(t)=\{A^{\beta}_{\alpha}\}:l_m\to l_m, \qquad (3.9)$$

переводящий вектор $\overline{x}\in l_m$ в вектор $\overline{z}\in l_m$. Можно показать, что в общем случае этот линейный оператор является невырожденным на базе $M_q$:

$$\det[A^{\beta}_{\alpha}]\neq 0. \qquad (3.10)$$

### 3.3. Первое центрирование $m$-плоскости $l_m$

Рассмотрим в $m$-плоскости $l_m\in S^m_p$ точку $X$ с радиус-вектором

$$\overline{X}=\overline{A}+x^\alpha\overline{e}_\alpha, \qquad (3.11)$$

отвечающую точке $B(u^a)$ базы $M_p$ расслоения $R_{p,N}$.

Как и в п. 3.1 (см. (3.1–3.5)) с учётом (2.1) и (1.8) находим, что точке $X\in l_m$ с радиус-вектором (3.11) будет отвечать вектор

$$\overline{u}=u^{\hat{\alpha}}\overline{e}_{\hat{\alpha}},\ u^{\hat{\alpha}}=(A^{\hat{\alpha}}_{a}+x^\alpha A^{\hat{\alpha}}_{\alpha a})t^a, \qquad (3.12)$$

который параллелен вектору

$$\{T(X)_{k(t)}\cup l_m\}\cap(F_{n-m})_X. \qquad (3.13)$$

Здесь $T(X)_{k(t)}$ означает касательную к линии, описываемой точкой $X$ вдоль кривой $k(t)$ на базе $M_p$.

Из (3.11–3.13) в силу (2.1), (1.2) и (1.8) получаем вектор

$$\overline{z}=z^\beta\overline{e}_\beta\in l_m,\ z^\beta=(A^{\beta}_{ab}+x^\alpha A^{\beta}_{\alpha ab})t^a t^b, \qquad (3.14)$$

который параллелен пересечению векторного подпространства $l_m$ с векторным подпространством, натянутым на касательную к индикатрисе $\overline{r}=\lambda\overline{u}$ вдоль кривой $k(t)$ на базе $M_p$ и на векторное подпространство $(F_{n-m})_X$. Из (3.14) заключаем, что каждой точке $X\in l_m$ с радиус-вектором (3.11) и вектору $\overline{v}=v^\alpha\overline{e}_\alpha$ в $l_m$ отвечает в центроаффинном пространстве $L_p$ гиперконус второго порядка с вершиной в точке $B(u^a)\in M_p$:

$$q_{p-1}(X,\overline{v})=\{t\in L_p:\overline{z}\perp\overline{v}\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_\alpha(A^{\alpha}_{ab}+x^\beta A^{\alpha}_{\beta ab})t^a t^b=0\ (v_\alpha=v^\alpha). \qquad (3.15)$$

Из (3.15) заключаем с учётом (2.1) и (3.7), что координаты $x^\alpha$ точки $X\in l_m$ такой, что гиперконусы $q_{p-1}(X,\overline{v})$ и $K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})$ в $L_p$ аполярны при любых $\overline{v}\in l_m$, удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$x^\beta A^{\alpha}_{\beta}+A^\alpha=0,\ x^{\hat{\beta}}=0. \qquad (3.16)$$

Из (3.10) заключаем, что система линейных уравнений (3.16) в общем случае имеет единственное решение относительно $x^\beta$, которое можно найти методом Крамера или Гаусса. Таким образом, справедлива теорема:

**Теорема 3.1.** Каждой точке $B(u^a)\in M_p$ в соответствующей $m$-плоскости $l_m\in S^m_p$ в случае, когда линейный оператор $\Pi(t):l_m\to l_m$ не вырождается, отвечает единственная точка $G_1\in l_m$ (первый центр) такая, что гиперконусы $q_{p-1}(X,\overline{v})$ и $K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})$ аполярны при любых $\overline{v}\in l_m$.

## 4. Второе центрирование $m$-плоскостей $l_m\in S^m_p$

В этом пункте будет дано другое центрирование $m$-плоскостей $l_m\in S^m_p$, отличное от первого, проведённого в конце предыдущего пункта.

### 4.1. Распределение $\Delta_{2,p}$ на базе $M_p(2<p<N)$

Из (3.6) и (3.9) следует, что каждой точке $B(u^a)\in M_p$ в соответствующем центроаффинном пространстве $L_p$ можно сопоставить гиперконус $K^*_{p-1}$ второго порядка с вершиной $B(u^a)$ как совокупность всех таких направлений (3.2), которым отвечают линейные операторы $\overline{\Pi}(t)=\Pi\cdot\Pi(t):l_m\to l_m$ с нулевыми следами. Этот гиперконус $K^*_{p-1}$ определяется уравнением

$$K^*_{p-1} : B_{ab} t^a t^b = 0, \tag{4.1}$$

где симметрический тензор $B_{ab}$ определяется по формулам:

$$B_{ab} = A^\beta_\alpha A^\alpha_{\beta ab}. \tag{4.2}$$

Гиперконусы (4.1) и (3.7) порождают в точке $B(u^a) \in M_p$ центроаффинное преобразование центроаффинного пространства $L_p$:

$$C = \{B^b_a\}, \tag{4.3}$$

где смешанный тензор $B^b_a$ с учётом (4.2) и (2.1) определяется по формулам:

$$B^b_a = B_{ac} A^{cb} \tag{4.4}$$

и его компоненты в силу (2.2–2.5) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dB^b_a + B^c_a \theta^b_c - B^b_c \theta^c_a = B^b_{ac} \theta^c.$$

Здесь явный вид величин $B^b_{ac}$ для нас несущественный.

Каждой точке $B(u^a) \in M_p$ сопоставим двумерную плоскость в $L_p$:

$$L_2 : t^{a_2} = h^{a_2}_{a_1} t^{a_1}, \ (a_1, b_1 = 1, 2; a_2, b_2 = \overline{3, p}). \tag{4.5}$$

Здесь с учётом (1.2) и в соответствии с [2] величины $h^{a_2}_{a_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dh^{a_2}_{a_1} + h^{b_2}_{a_1} \theta^{a_2}_{b_2} - h^{a_2}_{b_1} \theta^{b_1}_{a_1} + \theta^{a_2}_{a_1} = h^{a_2}_{a_1 c} \theta^c. \tag{4.6}$$

Заметим, что с заданием поля плоскостей (4.5) на базе $M_p$ ассоциируется распределение $\Delta_{2,p}: B(u^a) \to L_2$, которое определяется дифференциальными уравнениями (1.8) и (4.6).

Из (4.4) и (4.5) следует, что плоскость $L_2$ в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ будет неподвижной при центроаффинном преобразовании (4.3), т.е. $CL_2 \| L_2$, тогда и только тогда, когда величины $h^{a_2}_{a_1}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} \psi^{a_2}_{a_1} \equiv B^{b_1}_{b_2} h^{b_2}_{a_1} h^{a_2}_{b_1} + B^{a_2 b_1}_{a_1 b_2} h^{b_2}_{b_1} - B^{a_2}_{a_1} = 0, \\ B^{a_2 b_1}_{a_1 b_2} = B^{b_1}_{a_1} \delta^{a_2}_{b_2} - B^{a_2}_{a_2} \delta^{b_1}_{a_1}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Можно показать, что в общем случае на базе $M_p$ определитель $L \equiv \det[B^{a_2 b_1}_{a_1 b_2}]$ не равен нулю. Здесь пара $\binom{b_1}{b_2}$ указывает на номер строки, а пара $\binom{a_1}{a_2}$ – на номер столбца. Неравенство нулю определителя $L$ на $M_p$ обеспечивает алгебраическую независимость уравнений (4.7) (относительно $h^{a_2}_{a_1}$), что и приводит к конечному числу решений относительно $h^{a_2}_{a_1}$. Заметим, что плоскость $L_2$, отвечающая точке $B(u^a) \in M_p$, типа (4.7), которую мы будем называть главной, натянута на линейно независимую пару соответствующих (главных) направлений в $L_p$, неподвижных при преобразовании (4.3). Таким образом, на базе $M_p$ инвариантным образом с помощью главной двумерной площадки $L_2$ определено (главное) распределение $\Delta_{2,p}: B(u^a) \to L_2$, интегральные кривые которого на базе $M_p$ в силу (4.5) определяются дифференциальными уравнениями:

$$\theta^{a_2} = h^{a_2}_{a_1} \theta^{a_1}. \tag{4.8}$$

### 4.2. Аффинные преобразования $m$-плоскости $l_m \in S^m_p$, соответствующие её точкам

Из (3.11) с учётом (1.2) находим

$$d\overline{X} = \tilde{\omega}^\alpha \overline{e}_\alpha + \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} \overline{e}_{\hat{\alpha}}, \tag{4.9}$$

где $\tilde{\omega}^\alpha = dx^\alpha + x^\beta \omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha$, $\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = \omega^{\hat{\alpha}} + x^\alpha \omega^{\hat{\alpha}}_\alpha$. (4.10)

Заметим с учётом (1.2) и (4.10), что 1-формы $\tilde{\omega}^\alpha$ и $\omega^\alpha_\beta$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\tilde{\omega}^\alpha - \tilde{\omega}^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta = \Omega^\alpha, \ D\omega^\alpha_\beta - \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma = \Omega^\alpha_\beta, \tag{4.11}$$

где $\Omega^\alpha = \omega^{\hat{\beta}} \wedge \omega^\alpha_{\hat{\beta}} + x^\beta \Omega^\alpha_\beta, \Omega^\alpha_\beta = \omega^{\hat{\alpha}}_\beta \wedge \omega^\alpha_{\hat{\alpha}}$. (4.12)

В соответствии с [5] и с учётом (1.10) и (4.1–4.12) заключаем, что каждой точке $X \in l_m$, соответствующей точке $B(u^a) \in M_p$, отвечает аффинная связность $\Phi(X)$ как отображение соседней $m$-плоскости $l'_m$ (бесконечно близкой первого порядка к $l_m$) на исходную $l_m$ в направлении $(F_{n-m})_X$. При этом 1-формы $\tilde{\omega}^\alpha$ и $\omega^\alpha_\beta$ являются формами этой связности, а 2-формы $\Omega^\alpha$ и $\Omega^\alpha_\beta$ являются формами кручения и кривизны. Обозначим $\hat{\Phi}(X)$ – ограничение связности $\Phi(X)$ на главное распределение $\Delta_{2,p}$. Тогда из (4.12) с учётом (1.8), (1.3) и (4.8) получаем, что компоненты тензора кручения $\overset{*}{R}{}^\beta$ и кривизны $R^\beta_\alpha = -R^\alpha_\beta$ связности $\hat{\Phi}(X)$ определяются по формулам

$$\begin{gathered} \overset{*}{R}{}^\alpha = R^\alpha + x^\beta R^\alpha_\beta, \\ R^\alpha = R^\alpha_{12} + R^\alpha_{1b_2} h^{b_2}_2 + R^\alpha_{2b_2} h^{b_2}_1 + R^\alpha_{a_2 b_2} h^{a_2}_1 h^{b_2}_2, \\ R^\alpha_\beta = R^\alpha_{\beta 12} + R^\alpha_{\beta 1 b_2} h^{b_2}_2 + R^\alpha_{\beta 2 b_2} h^{b_2}_1 + R^\alpha_{\beta a_2 b_2} h^{a_2}_1 h^{b_2}_2 = -R^\beta_\alpha, \end{gathered} \tag{4.13}$$

где

$$\begin{gathered} \overset{*}{R}{}^\alpha_{ab} = R^\alpha_{ab} + x^\beta R^\alpha_{\beta ab}, \\ R^\alpha_{\beta ab} = \frac{1}{2} A^\alpha_{\hat{\beta}[a} A^{\hat{\beta}}_{|\beta|b]} = -R^\beta_{\alpha ab}, \ R^\alpha_{ab} = \frac{1}{2} A^{\hat{\alpha}}_{[a} A^\alpha_{|\hat{\alpha}|b]}, \\ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n}; \\ a_1, b_1 = 1, 2; a_2, b_2 = \overline{3, p}). \end{gathered} \tag{4.14}$$

В соответствии с [7] замечаем, что величины (4.13) каждой точке $B(u^a) \in M_p$ сопоставляют аффинное преобразование $m$-плоскости $l_m \in S^m_p$ в себя:

$$\hat{\Phi}^*(X) = \{\overset{*}{R}{}^\alpha; R^\alpha_\beta\}. \tag{4.15}$$

### 4.3. Второй центр $m$-плоскости $l_m$

#### 4.3.1. $m$ – *чётное*

Имеет место следующая теорема

**Теорема 4.1.** В $m$-плоскости $l_m \in S^m_p$, отвечающей точке $B(u^a)$ базы $M_p$, в общем случае при чётном $m$ существует единственная точка $G_2$ (второй центр), которой соответствует аффинная связность $\hat{\Phi}(G_2)$ с нулевым кручением.

*Доказательство.* Из (4.13) с учётом (4.14) и (4.15) следует, что точке $G_2 \in l_m$ будет соответствовать связность $\hat{\Phi}(G_2)$ с нулевым кручением $\overset{*}{R}{}^\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда её координаты $x^\alpha$ удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$R^{\alpha} + x^{\beta} R^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{4.16}$$

Здесь в силу (4.13) величины $R^{\alpha}_{\beta}$ кососимметричны по $\alpha$ и $\beta$. Можно показать с учётом (4.13) и (4.14), что при чётном $m$ определитель порядка $m$

$$\det[R^{\beta}_{\alpha}] \tag{4.17}$$

в общем случае на базе $M_p$ не равен тождественно нулю. Поэтому систему линейных уравнений (4.16) можно однозначно разрешить относительно $x^{\beta}$ по формулам Крамера или методом Гаусса. Теорема 4.2 доказана.

**Замечание 4.1.** Из теоремы 4.1 и (4.15) следует, что аффинное отображение $\hat{\Phi}^{*}(G_2)$ $m$-плоскости $l_m$ на себя является центроаффинным преобразованием с центром в точке $G_2$.

### 4.3.2. *m – нечётное*

**Теорема 4.2.** В $m$-плоскости $l_m \in S^m_p$, отвечающей точке $B(u^a)$ базы $M_p$, в общем случае при нечётном $m$ существует единственная (главная) прямая $f$, каждой точке $F$ которой соответствует аффинная связность $\hat{\Phi}(F)$ с одним и тем же кручением.

*Доказательство.* Из (4.13) следует, что кручение связности $\hat{\Phi}(X)$ не будет зависеть от точки $X \in l_m$ тогда и только тогда, когда

$$\overset{*}{R}{}^{\alpha} = R^{\alpha} \Leftrightarrow x^{\beta} R^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{4.18}$$

Так как $m$ – нечётное и $R^{\beta}_{\alpha} = -R^{\alpha}_{\beta}$, то определитель (4.17) тождественно равен нулю. Поэтому $\operatorname{rang}[R^{\beta}_{\alpha}]$ в общем случае равен $m-1$ на базе $M_p$. Следовательно, однородная система линейных уравнений (4.18) определяет в $l_m$ некоторую (главную) прямую $f$, о которой идёт речь в данной теореме. Теорема 4.2 доказана.

**Замечание 4.2.** Поскольку в общем случае $\operatorname{rang}[R^{\beta}_{\alpha}] = m-1$, то существует хотя бы один минор порядка $m-1$ этой матрицы, не равный нулю на базе $M_p$. Для определённости таким минором будем считать

$$\det[R^{\bar\beta}_{\bar\alpha}] \neq 0, (\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma = \overline{2, m}). \tag{4.19}$$

Это даёт основание ввести в рассмотрение величины

$$\overset{*}{R}{}^{\bar\beta}_{\bar\gamma} R^{\bar\gamma}_{\bar\alpha} = R^{\bar\beta}_{\bar\gamma} \overset{*}{R}{}^{\bar\gamma}_{\bar\alpha} = \delta^{\bar\beta}_{\bar\alpha} \Rightarrow \overset{*}{R}{}^{\bar\gamma}_{\bar\alpha} = -\overset{*}{R}{}^{\bar\alpha}_{\bar\gamma}. \tag{4.20}$$

Поэтому из (4.18) получаем

$$x^{\bar\beta} = f^{\bar\beta} x^1, \tag{4.21}$$

где

$$f^{\bar\alpha} = -R^{\bar\beta}_1 \overset{*}{R}{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta},\ f^{\bar\alpha} R^1_{\bar\alpha} = 0. \tag{4.22}$$

Заметим с учётом (4.18–4.22), что прямая $f \in l_m$, о которой идёт речь в теореме 4.2, в параметрической векторной форме может быть записана так:

$$f:\ \bar f = \bar A + x^1 \bar\varepsilon,\ \bar\varepsilon = \bar e_1 + f^{\bar\alpha} \bar e_{\bar\alpha}. \tag{4.23}$$

**Теорема 4.3.** На главной прямой $f \in l_m$, отвечающей точке $B(u^a) \in M_p$, в общем случае при нечётном $m$ существует точка $G_2$ (второй центр) такая, что гиперконусы $q_{p-1}(G_2, \bar\varepsilon)$ и $K_{p-1}$ в $L_p$ аполярны.

*Доказательство.* Из (4.23) и (3.15) следует, что точке $F \in f$ с радиус-вектором $\bar F = \bar A + x^1 \bar\varepsilon$ и вектору $\bar\varepsilon \| f$ отвечает в $L_p$ гиперконус

$$q_{p-1}(F, \bar\varepsilon): (C_{ab} + x^1 C_{1ab}) t^a t^b = 0, \tag{4.24}$$

где симметрические по $a$ и $b$ величины $C_{ab}$ и $C_{1ab}$ определяются по формулам

$$\begin{gathered} C_{ab} = A^1_{ab} + f_{\bar\alpha} A^{\bar\alpha}_{ab}, \\ C_{1ab} = A^1_{1ab} + f^{\bar\beta} A^1_{\bar\beta ab} + f_{\bar\alpha} A^{\bar\alpha}_{1ab} + f^{\bar\beta} f_{\bar\alpha} A^{\bar\alpha}_{\bar\beta ab}, (f_{\bar\alpha} = f^{\bar\alpha}). \end{gathered} \tag{4.25}$$

Из (4.24) и (3.7) с учётом (2.1) получаем, что гиперконусы $q_{p-1}(F, \bar\varepsilon)$ и $K_{p-1}$ аполярны тогда и только тогда, когда

$$C + x^1 C_1 = 0, \tag{4.26}$$

где

$$C = C_{ab} A^{ab},\ C_1 = C_{1ab} A^{ab}. \tag{4.27}$$

Можно показать с учётом (4.25) и (4.27), что в общем случае $C_1 \neq 0$ на базе $M_p$. Поэтому из (4.26) можно найти $x^1 = -CC_1^{-1}$ – координату второго центра $G_2$, не являющегося несобственной точкой, в случае нечётного $m$. Теорема 4.3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – С. 432.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Труды геометрического семинара. – М., 1966. – Т. 1 – С. 139–189.
4. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга $r$ // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
6. Ивлев Е.Т. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров // Матер. итоговой научн. конф. по матем. и мех. за 1970 г. – Томск, 1970. – Т. 1 – С. 121–123.
7. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградский ун-т, 1984. – Вып. 15. – С. 32–37.