

не росту рынка. Итак, в нашем случае оценка для коэффициента альфа лежит в интервале $(-0,04;0,03)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарп У. Инвестиции: Пер. с англ.-М.: ИНФА-М, 2003.-Х11,1028 с.
2. Мастерова Е.В. IX Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», Томск, Россия, 2012. р. 598-597.
3. Буренин А. Н. Управление портфелем ценных бумаг. – М.: Научно-техническое общество имени академика С. И. Вавилова, 2008. – 440 с.
4. Бельснер О.А., Крицкий О.Л. Оптимизация портфеля финансовых инструментов// Финансы и кредит, 2013, №36, с. 35-41.

ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ФИШЕРА–КОЛМОГОРОВА С АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Прозоров А.А.
prozorov_a_a@mail.ru

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор, Трифонов А.Ю., НИ ТПУ, зав.кафедрой ВММФ

Введение

Эволюция популяций микроорганизмов одного вида с эффектами дальнего действия моделируется нелокальными обобщениями классического уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (ФКПП) **Ошибка! Источник ссылки не найден., Ошибка! Источник ссылки не найден.**, которое для плотности распределения популяции $u(x, t)$ в одномерном случае имеет вид

$$u_t(x, t) = D\Delta u(x, t) + au(x, t) - bu^2(x, t). \quad (1)$$

Здесь D - постоянный коэффициент диффузии, процесс производства популяции происходит с постоянным темпом роста a и квадратичными по плотности конкурентными потерями с коэффициентом b .

В обобщенном уравнении ФКПП локальные квадратичные потери $bu^2(x, t)$ заменяются интегральным выражением

$$u(x, t) \int b_\gamma(x, y) u(y, t) dy, \quad (2)$$

учитывающим нелокальные взаимодействия в популяции посредством функции влияния $b_\gamma(x, y)$. Параметр γ характеризует эффективную область взаимодействия между особями популяции так, что при $\gamma \rightarrow 0$ справедливо $b_\gamma(x, y) \rightarrow b\delta(x - y)$, а нелокальные потери (2) переходят в локальные $bu^2(x, t)$. Будем рассматривать распределение $u(x, t)$ на отрезке $x \in [-l, l]$. Тогда одномерное уравнение ФКПП с учетом квадратичных нелокальных потерь (2) на отрезке $[-l, l]$ запишем в виде

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + au(x, t) - \lambda u(x, t) \int_{-l}^l b_\gamma(x, y) u(y, t) dy. \quad (3)$$

Пространственно-временные структуры (паттерны) не образуются в ходе эволюции, описываемой классическим уравнением ФКПП (1). Нелокальное уравнение ФКПП позволяет при соответствующем выборе параметров уравнения описать процесс образования структур, возникающих за счет нелокальных конкурентных потерь и диффузии

Одномерное нелокальное уравнение ФКПП на отрезке

Рассмотрим уравнение (3) с разностным ядром $b_\gamma(x, y) = b_\gamma(x - y)$:

$$u_t(x, t) = Du_\alpha(x, t) + au(x, t) - \chi u(x, t) \int_{-l}^l b_\gamma(x-y)u(y, t)dy, \quad (4)$$

где α – порядок дробной производной. $b_\gamma(x)$ предполагается четной: $b_\gamma(x) = b_\gamma(-x)$.

Разложим функцию $b_\gamma(x)$ в ряд Фурье

$$b_\gamma(x-y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{i\pi m(x-y)/l}, \quad b_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l b(\tau) e^{-i\pi m\tau/l} d\tau.$$

Аналогично для функции $u(x, t)$ запишем

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(t) e^{i\pi kx/l}, \quad \beta_k(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u(z, t) e^{-i\pi kz/l} dz. \quad (5)$$

Тогда для формулы (5) $u_\alpha(x, t)$, в соответствии с правилом дифференцирования экспоненты будет определяться как

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{ik\pi}{l} \right)^\alpha \beta_k(t) e^{i\pi kx/l} \quad (6)$$

и $i^\alpha = e^{i\pi\alpha/2}$.

Теперь продифференцируем по времени соотношение (5), выразив $u_t(x, t)$ с учетом уравнения (4), получим

$$\dot{\beta}_k = \beta_k \left(D \left(\frac{ik\pi}{l} \right)^\alpha + a \right) - \chi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_{k-j} b_{k-j} \beta_j, \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \quad (7)$$

Будем искать коэффициенты β_j в виде

$$\beta_j(t) = \beta_0(t) \delta_{j0}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7), получим

$$\dot{\beta}_0(t) = \beta_0(t) a - \chi \beta_0^2(t) b_0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) будем искать методом Бернулли. Тогда, с учетом начальных условий

$$\beta_j|_{t=0} = \beta_{00} \delta_{j0},$$

найдем

$$\beta_0(t) = \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\chi b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)}. \quad (10)$$

Теперь решения уравнения (9) β_j ищем в виде

$$\beta_j = \beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots,$$

где $\beta_j^{(0)}$ определяется (10). Рассмотрим

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \phi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

В результате система примет вид

$$\left[\phi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left(\beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots \right) = \bar{a}_j \left(\beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots \right) - \chi \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \left(\beta_{j-p}^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_{j-p}^{(1)} + \dots \right) \left(\beta_p^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_p^{(1)} + \dots \right), \quad (11)$$

где

$$\bar{a}_j = \left(D \left(\frac{ij\pi}{l} \right)^\alpha + a \right).$$

Приравняв слагаемые при одинаковых степенях $1/T$, получим,

$$\phi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_0^{(0)} = a \beta_0^{(0)} - \varkappa \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \beta_{-p}^{(0)} \beta_p^{(0)}, \quad (12)$$

$$\phi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(0)} = \bar{a}_j \beta_j^{(0)} - \varkappa \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \beta_{j-p}^{(0)} \beta_p^{(0)}, \quad (13)$$

$$\phi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(1)} = \bar{a}_j \beta_j^{(1)} - \varkappa \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p (\beta_{j-p}^{(1)} \beta_p^{(0)} + \beta_{j-p}^{(0)} \beta_p^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial \tau} \beta_j^{(0)}, \dots \quad (14)$$

Положим, $\phi(\tau) = a\tau$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \beta_0^{(1)} = \beta_0^{(1)} - \frac{2\varkappa b_0}{a} \beta_0^{(0)} \beta_0^{(1)}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(1)} = \frac{\bar{a}_j}{a} \beta_j^{(1)} - \frac{\varkappa}{a} \beta_0^{(0)} (b_0 \beta_j^{(1)} + b_j \beta_j^{(1)}). \quad (15)$$

Тогда соотношение примет вид

$$\beta_0^{(0)}(\theta, \tau) = \frac{\beta_{00} e^\theta}{1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^\theta - 1)}. \quad (16)$$

Получим

$$u^{(0)}(x, t) = \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $\frac{\partial}{\partial \tau} \beta_j^{(0)} = 0$ и

$$\beta_0^{(1)} = \frac{\beta_{10} e^\theta}{\left(1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^\theta - 1)\right)^2} = \frac{\beta_{10} e^{at}}{\left(1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)\right)^2},$$

$$\beta_j^{(1)} = \frac{\beta_{1j} e^{\bar{a}_j \theta / a}}{\left(1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^\theta - 1)\right)^{(b_j + b_0)/b_0}} = \frac{\beta_{1j} e^{\bar{a}_j t}}{\left(1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)\right)^{(b_j + b_0)/b_0}}. \quad (18)$$

Тогда для случая симметричного начального распределения с точностью до $O(1/T^2)$ найдем

$$u(x, t) = u^{(0)}(x, t) + \frac{1}{T} u^{(1)}(x, t), \quad (19)$$

где

$$u^{(1)}(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_{1j} e^{\bar{a}_j t} e^{ij\pi x/l}}{\left(1 + \frac{\varkappa b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)\right)^{(b_j + b_0)/b_0}}. \quad (20)$$

Запишем комплекснозначную функцию $u^{(1)}(x, t)$ в алгебраической форме.

$$\exp\left(\bar{a}_j t + \frac{ij\pi x}{l}\right) = \exp\left\{\left[D \left|\frac{j\pi}{l}\right|^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) + a\right] t\right\} \times$$

$$\times \left\{ \cos\left[D \left|\frac{j\pi}{l}\right|^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha \operatorname{sgn} j\right) t + \frac{j\pi x}{l}\right] + i \sin\left[D \left|\frac{j\pi}{l}\right|^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha \operatorname{sgn} j\right) t + \frac{j\pi x}{l}\right] \right\}. \quad (21)$$

Можно заметить, что $\operatorname{Im}(u^{(1)}(x, t)) = 0$. В качестве b_γ выберем

$$b_\gamma = b_0 \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{\gamma^2}\right).$$

Теперь рассмотрим, как меняется плотность популяции в зависимости от степени диффузии, то есть от порядка производной по координате.



Рис. 1: График функции $u(x,t)$ в моменты времени $t = 50$ при $\alpha = 1.5$ (a), 2 (d).

На рис. 1 изображена эволюция плотности $u(x,t)$ при $a = 1$, $b_0 = 1$, $\gamma = 1$, $\chi = 0.2$, $D = 0.01$, $l = 5$, $T = 10$

Как видно из графиков, порядок производной влияет на смещение центра возмущений пространственно-временных структур. Чем ниже порядок дробной производной, тем больше смещение график и сильнее отклонение от стационарного состояния.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н., Петровский Н. Г., Пискунов Н. С. // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. Т. 1, № 6. С. 1 (1937).
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.
3. Fisher R. A. // Annual Eugenics. V. 7. P. 255 (1937)

ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ КРИПТОГРАФИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕГРЕЛИШВИЛИ И ДЖИНДЖИХАДЗЕ

Вьонг Х.Б.
vuonghuubao@live.com

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент, Зюбин С.А., Кафедра высшей математики

В работе приводится оценка вычислительной сложности криптографического анализа протокола разделения ключа Мегрелишвили и Джинджихадзе.

Введение

Для оценки вычислительной сложности криптографического анализа системы Мегрелишвили и Джинджихадзе, рассмотрим следующий протокол разделения ключа.

Протокол разделения ключа Мегрелишвили и Джинджихадзе

Установка

Корреспонденты А и Б договариваются о выборе векторного пространства $V = F_2^n$ размерности n над полем F_2 . Далее фиксируется квадратная матрица A размера $n \times n$ и вектор $v \in V$. Эти данные открыты.

Генерация ключей.

Корреспондент А выбирает случайным образом натуральное число k , вычисляет и пересылает корреспонденту Б вектор $u = vA^k$. В свою очередь корреспондент Б выбирает число l , вычисляет и пересылает А вектор $w = vA^l$.