7. Hikata A., Elbaum C. Ultrasonic attenuation in normal and superconducting lead; electronic damping of dislocations // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 18. – P. 750–752.
8. Лейбфрид, Г. Точечные дефекты в материалах. – М.: Мир, 1981. – 439 с.
9. Киттель, Ч. Квантовая теория твердых тел. – М.: Наука, 1967. – 492 с.
10. Бодряков В.Ю., Повзнер А.А., Сафонов И.В. Термодинамический подход к описанию металлических твердых тел // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 76. – Вып. 2. – С. 69–78.

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА С РЕГУЛЯРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ПО КВАДРАТУ ЕДИНИЧНОЙ ПЛОЩАДИ

С.Е. Голосов, студент, И.В. Корытов, к.ф.-м.н., доцент
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634050, г. Томск пр. Ленина, 30, тел. (3822)-56-35-93
E-mail: korytov@tpu.ru

Введение

Среди разнообразных задач, связанных с численным интегрированием, рассмотрим практическое построение кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем по квадрату единичной площади. Формулы с регулярным пограничным слоем введены С. Л. Соболевым как компромисс между оптимальными формулами и формулами на равномерной сетке узлов [1]. Первые обладают минимумом нормы в пространстве функционалов, а вторые обеспечивают относительную простоту вычислений. Формулы с регулярным пограничным слоем близки к оптимальным на некоторых классах функций [1], [2], [3], [4], [5]. Такая близость в терминах теории называется асимптотической оптимальностью. Несмотря на простоту области интегрирования формулы по параллелепипедам конечной меры в виде, применимом для вычислений, не были построены. Известны построения формул по областям другой конфигурации [6], [7], [8], [9]. В нашей работе за отправную точку возьмем описание кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем для n-мерного куба, приведенное в [4].

1. Кубатурная формула с регулярным пограничным слоем по кубу единичной меры

Обозначим через Q n-мерный куб единичной меры: $Q = \{x \in R_n\colon 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \dots, n\}$. Узлы предполагаются расположенными в вершинах элементарных кубов с ребром длины h, переменный целочисленный вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ определяет положение каждого узла. Коэффициенты, соответствующие узлам пограничного слоя обозначим через D_β. Кубатурная формула с регулярным пограничным слоем для n-мерного куба единичной меры имеет вид

$$\int_Q f(x)dx \approx \sum_{h\beta\in Q} h^n D_\beta f(h\beta). \tag{1}$$

В формуле (1) коэффициенты D_β зависят от расположения узлов $h\beta$, для которых они вычисляются. Множество узлов, расположенных вблизи вершин куба, обозначим A_1. Множество узлов, расположенных вдоль ребер куба, обозначим A_2. Оставшиеся узлы образуют множество A_3. Множества узлов A_1 и A_2 образуют пограничный слой формулы. Множество всех узлов, лежащих внутри куба, обозначим A: $A = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \subset Q$. Коэффициенты D_β распределены по узлам указанных множеств следующим образом:

$$D_\beta = \prod_{i=1}^{n} D_{\beta_i}, \quad h\beta \in A_1;$$
$$D_\beta = \prod_{i=1}^{r} D_{\beta_i}, \quad h\beta \in A_2, \quad r = 1,2,\dots,n-1; \tag{2}$$
$$D_\beta = 1, \quad h\beta \in A_3.$$

Коэффициенты, соответствующие i-ой координате равны

$$D_{\beta_i} = \sum_{\gamma_i=0}^{\beta_i} C_{\gamma_i}, \tag{3}$$

Где слагаемые $C_{\gamma i}$ находятся из системы

$$\sum_{\gamma_1=0}^{t} C_{\gamma_1}\gamma_1^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \alpha \le m, m < t. \tag{4}$$

Решением системы (4) являются фактически значения коэффициентов элементарной квадратурной формулы по единичному отрезку i-ой координатной оси. Такая формула не имеет внутренних узлов. Все узлы, кроме двух граничных, внешние.

2. Квадратурная формула с минимальным регулярным пограничным слоем по отрезку единичной длины

Элементарная квадратурная формула по единичному отрезку с узлами в целочисленных точках

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma f(\gamma), \tag{5}$$

коэффициенты которой вычисляются решением системы (4) при $t = m$. Формула (5) точна на многочленах степени m. При таких параметрах матрица системы (4) является вандермондовой, следовательно, совместной и определенной. Значения коэффициентов из её решения определяются однозначно.

Если разбить отрезок [0,1] на N равных частей длины $h = 1/N$, и к каждой из них применить формулу (5), то получится составная формула, в каждом узле которой коэффициенты будут просуммированы так, как показано в формуле (3). В $m - 1$ узлах вблизи концов отрезка интегрирования коэффициенты (3) будут отличны от единицы, а в остальных внутренних узлах будут равны единице. Это последнее обстоятельство обеспечивается первым уравнением системы (4). Такое построение приводит к тому, что справа от отрезка интегрирования $m - 1$ узел будет внешним. Если же применить элементарную формулу (5) с симметричным расположением узлов и соответствующим распределением коэффициентов, то аналогичная картина возникнет справа от отрезка интегрирования. Существует множество функций, на основе которых применяется приём разбиения единицы. Этот приём даёт возможность сохранить все узлы составной формулы внутренними. Во всех этих случаях множество узлов, расположенных вблизи концов отрезка интегрирования, которым соответствуют коэффициенты, отличные от единицы, называются пограничным слоем квадратурной формулы. Таким образом, квадратурная формула с регулярным пограничным слоем для единичного отрезка имеет вид

$$\int_0^1 f(x)dx \approx h\left(\sum_{\beta=0}^{m-1} D_\beta f(h\beta) + \sum_{\beta=m}^{N-m} f(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{m-1} D_\beta f(h(N-\beta))\right). \tag{6}$$

3. Квадратурная формула с удлиненным регулярным пограничным слоем по отрезку единичной длины

В этом пункте приводится один из путей решения проблемы положительности коэффициентов квадратурной формулы. В формулах с регулярным пограничным слоем отрицательные коэффициенты появляются, начиная с $m = 9$. Система (4) линейных алгебраических уравнений с приведенными параметрами является совместной и неопределенной с $t - m$ свободными неизвестными. В качестве одного из путей исследования поведения коэффициентов (3) предлагается присваивание нулевых значений свободным неизвестным. Такое обнуление аналогично исключению из системы $t - m$ узлов интегрирования, что равносильно удлинению пограничного слоя на исключенное количество узлов по сравнению с пограничным слоем формулы (6). Приведем примеры удлинения пограничного слоя для случаев $t = 1$ и $t = 2$.

Обозначим через γ' исключаемую точку. Тогда при исключении одного узла линейные системы вида (4) принимают вид

$$\sum_{\substack{\gamma=0 \\ \gamma\neq\gamma'}}^{m+1} C_\gamma \gamma^\alpha = \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha = 0,\ldots,m,\ \gamma' = 0,\ldots,m, \tag{7}$$

В результате решения каждой из систем (7) коэффициенты квадратурной формулы в исключаемых точках будут обладать следующими свойствами

$$C_{\gamma'} = 0,\ \gamma' = 0,\ldots,m\,;$$

$$D_{\gamma'} = \begin{cases} 0, & \gamma' = 0, \\ D_{\gamma'-1}, & \gamma' = 1,\ldots,m. \end{cases} \tag{8}$$

При исключении двух рядом стоящих узлов линейные системы (4) имеют вид

$$\sum_{\substack{\gamma=0\\ \gamma\neq\gamma'\\ \gamma\neq\gamma'+1}}^{m+2} C_\gamma \gamma^\alpha = \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha = 0,\ldots,m,\ \gamma' = 0,\ldots,m-1 \cdot \tag{9}$$

Коэффициенты в исключаемых узлах обладают следующими свойствами

$$C_{\gamma'} = C_{\gamma'+1} = 0,\ \gamma' = 0,\ldots,m-1\,;$$

$$D_{\gamma'} = \begin{cases} 0, & \gamma' = 0, \\ D_{\gamma'-1}, & \gamma' = 1,\ldots,m-1; \end{cases} \tag{10}$$

$$D_{\gamma'+1} = D_{\gamma'},\ \gamma' = 0,\ldots,m-1\,.$$

При исключении двух узлов, отделенных друг от друга одним неисключаемым узлом, линейные системы (4) имеют вид

$$\sum_{\substack{\gamma=0\\ \gamma\neq\gamma'\\ \gamma\neq\gamma'+2}}^{m+2} C_\gamma \gamma^\alpha = \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha = 0,\ldots,m,\ \gamma' = 0,\ldots,m-2 \cdot \tag{11}$$

Вычисленные коэффициенты в исключаемых узлах обладают свойствами

$$C_{\gamma'} = C_{\gamma'+2} = 0,\ \gamma' = 0,\ldots,m-2\,;$$

$$D_{\gamma'} = \begin{cases} 0, & \gamma' = 0, \\ D_{\gamma'-1}, & \gamma' = 1,\ldots,m-2; \end{cases} \tag{12}$$

$$D_{\gamma'+2} = D_{\gamma'+1},\ \gamma' = 0,\ldots,m-2\,.$$

Из примеров видно, что коэффициенты в исключаемых узлах равны коэффициентам в соседних узлах, но каким именно зависит от характера исключения.

4. Кубатурная формула с регулярным пограничным слоем по квадрату единичной меры

В данном пункте приведем пример построения кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем на основе элементарной формулы (5) для интегрирования по единичному квадрату. Тогда $Q = \{x \in R_2\colon 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2\}$. Множества узлов конкретизируются следующим образом:

$$B_{11} = \{h\beta : h\beta_i,\ 0 \le \beta_i \le m-1, i = 1{,}2\},$$

$$B_{22} = \{h\beta : 1-h\beta_i,\ 0 \le \beta_i \le m-1, i = 1{,}2\},$$

$$B_{12} = \{h\beta : h\beta_1,\ 0 \le \beta_1 \le m-1; 1-h\beta_2,\ 0 \le \beta_2 \le m-1\},$$

$$B_{21} = \{h\beta : 1-h\beta_1,\ 0 \le \beta_1 \le m-1; h\beta_2,\ 0 \le \beta_2 \le m-1\},$$

$$A_1 = \bigcup_{i,j} B_{ij}\,,$$

$$C_{11} = \{h\beta : h\beta_1,\ 0 \le \beta_1 \le m-1; h\beta_2,\ m \le \beta_2 \le N-m\}, \tag{13}$$

$$C_{12} = \{h\beta : 1-h\beta_1,\ 0 \le \beta_1 \le m-1; h\beta_2,\ m \le \beta_2 \le N-m\},$$

$$C_{21} = \{h\beta : h\beta_1,\ m \le \beta_1 \le N-m; h\beta_2,\ 0 \le \beta_2 \le m-1\},$$

$$C_{22} = \{h\beta : h\beta_1, m \le \beta_1 \le N-m; 1-h\beta_2,\ 0 \le \beta_2 \le m-1\},$$

$$A_2 = \bigcup_{i,j} C_{ij}\,,$$

$$A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2).$$

Соответственно произведения (2) примут вид

$$D_\beta = D_{\beta_1} D_{\beta_2}, \quad h\beta \in A_1\,;$$

$$D_\beta = D_{\beta_r}, \quad h\beta \in C_{rj} \subset A_2, \quad r = 1{,}2,\ j = 1{,}2\,; \tag{14}$$

$$D_\beta = 1, \quad h\beta \in A_3\,.$$

Для каждого из подмножеств множества A_1 кубатурная сумма правой части (1) имеет вид

$$B_{11} : h^2 \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_1} D_{\beta_2} f(h\beta_1, h\beta_2);$$

$$B_{22} : h^2 \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_1} D_{\beta_2} f(1-h\beta_1, 1-h\beta_2);$$

$$B_{12} \cup B_{21} : h^2 \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_1} D_{\beta_2} f(h\beta_1, 1-h\beta_2) + h^2 \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_1} D_{\beta_2} f(1-h\beta_1, h\beta_2); \tag{15}$$

$$C_{11} \cup C_{22} : h^2 \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=m}^{N-m} D_{\beta_1} f(h\beta_1, h\beta_2) + h^2 \sum_{\beta_1=m}^{N-m} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_2} f(h\beta_1, 1-h\beta_2);$$

$$C_{12} \cup C_{21} : h^2 \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=m}^{N-m} D_{\beta_1} f(1-h\beta_1, h\beta_2) + h^2 \sum_{\beta_1=m}^{N-m} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_2} f(h\beta_1, h\beta_2);$$

$$A_3 : h^2 \sum_{\beta_1=m}^{N-m} \sum_{\beta_2=m}^{N-m} f(h\beta_1, h\beta_2).$$

Таким образом, расчетная кубатурная формула с регулярным пограничным слоем для интегрирования по единичному квадрату имеет вид:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy \approx h^2 \Bigg\{ \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_1} D_{\beta_2} \left[f(h\beta_1, h\beta_2) + f(h\beta_1, 1-h\beta_2) + f(1-h\beta_1, h\beta_2) + \right.$$

$$\left. + f(1-h\beta_1, 1-h\beta_2) \right] + \sum_{\beta_1=0}^{m-1} \sum_{\beta_2=m}^{N-m} D_{\beta_1} \left[f(h\beta_1, h\beta_2) + f(1-h\beta_1, h\beta_2) \right] + \tag{16}$$

$$+ \sum_{\beta_1=m}^{N-m} \sum_{\beta_2=0}^{m-1} D_{\beta_2} \left[f(h\beta_1, h\beta_2) + f(h\beta_1, 1-h\beta_2) \right] + \sum_{\beta_1=m}^{N-m} \sum_{\beta_2=m}^{N-m} f(h\beta_1, h\beta_2) \Bigg\}.$$

Большинству узлов такой формулы соответствуют единичные коэффициенты, и лишь в узкой полосе вдоль границы коэффициенты принимают другие значения. При больших значениях m для сохранения положительности коэффициентов при их вычислении можно использовать системы (7), (9), (11) и их модификации.

Заключение

При построении кубатурной формулы по квадрату использовались два процесса: декартово произведение одномерных формул и разбиение единицы. Первый из них обеспечил возможность вычисления коэффициентов составной квадратурной, а затем и кубатурной формул, на основе элементарной одномерной формулы с помощью линейной системы с вандермондовой матрицей. Второй дал возможность сделать все узлы итоговой расчетной формулы внутренними по отношению к отрезку интегрирования. Другой путь построения может быть основан на элементарной кубатурной формуле с внешними узлами, однако он приведет к более сложной системе линейных уравнений. Полученную формулу можно применять для интегрирования по прямоугольнику, предварительно сделав линейную замену переменных.

Литература.

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
2. Рамазанов М.Д. Асимптотическая оптимальность решетчатых кубатурных формул на гильбертовых пространствах // Докл. АН СССР. – 1974. – Т.216, № 1. – С. 44–45.
3. Половинкин В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m // Сиб. мат. журн. – 1975. – Т.16, № 2. – С. 328–335.
4. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: Дис…. докт. физ.-мат. наук – Улан-Удэ, 1977 – 235~с.
5. Корытов И.В. Оценка функционалов погрешности кубатурных формул в функциональных пространствах Соболева. : Дис…. канд. физ.-мат. наук – Улан-Удэ, 1997 – 97~с.

6. Блинов Н.И. О численном интегрировании функций с особенностями // Пятое советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики: Материалы совещ. – Новосибирск, 1978. – С. 8–11.
7. Блинов Н.И., Войтишек Л.В. О построении кубатурных формул с регулярным пограничным слоем для рациональных многогранников // Тр. семинара акад. С.Л.Соболева. – 1979. – № 1. – С. 5–15.
8. Войтишек Л.В. Об одном частном случае построения кубатурных формул с пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – Т.9, № 2. – С. 417–419.
9. Войтишек Л.В. О выборе решеток для интегрирования по формулам С.Л.Соболева // Сиб. мат. журн. – 1976. – Т.17, № 4. – С. 774–781.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ХРАНЕНИЯ И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ

Е.Н. Ирискина, ассистент, В.И. Субботина, магистрант
Томский государственный университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
E-mail: valsubbotina@mail.ru, sw.iriskina.en@mail.ru

Пусть $Q(t)$ – количество продукции, имеющейся в наличии на складе-магазине в момент времени *t.* Будем считать, что продукция от предприятия поступает непрерывно с некоторой скоростью v_0. На склад приходят оптовые покупатели, поток покупателей является пуассоновским с интенсивностью λ, объемы покупок ξ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения вероятностей $F_\xi(\cdot)$ и начальными моментами $E\{\xi\} = a_1$ и $E\{\xi^2\} = a_2$. Объем продукции, хранящейся на складе, ограничен величиной $Q_{\max}$. Склад может самостоятельно развозить продукцию по розничным торговым точкам. В этом случае будем считать, что продукция отпускается непрерывно во времени, причем скорость выхода продукции со склада $v^*(Q)$ зависит от количества продукции Q, имеющейся в наличии в данный момент времени. Развоз продукции производится при угрозе переполнения склада или, например, в случае наличия скоропортящейся продукции (продукции с ограниченным сроком годности). Оптимизация работы склада состоит в стабилизации его работы в смысле минимизации разброса процесса $Q(t)$ и в стремлении, с одной стороны, поддерживать количество имеющейся продукции на некотором уровне, достаточном для обслуживания приходящих клиентов, а с другой стороны, избегать переполнения склада. В том и другом случае производитель будет нести потери.

Величину $v_0 - v^*(Q)$ будем обозначать через $v(Q)$. Таким образом, $v(Q)$ есть скорость изменения количества продукции на складе за счет детерминированных поставок. Обратим внимание, что она зависит от количества продукции Q – величины, являющейся основной характеристикой состояния склада.

Заметим, что процесс $Q(t)$ является марковским. Обозначим

$$P(Q,t) = \frac{\Pr\{Q \le Q(t) \le Q + dQ\}}{dQ}.$$

Тогда при условии дифференцируемости функций $P(Q,t)$, $v(Q)$ и существования интеграла в правой части формулы (1) функция плотности распределения вероятностей $P(Q,t)$ будет удовлетворять прямому уравнению Колмогорова [1]

$$\frac{\partial P(Q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\{v(Q)P(Q,t)\}}{\partial Q} - \lambda P(Q,t) + \lambda\int_0^\infty P(Q+u,t)\,dF_\xi(u). \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) можно найти, воспользовавшись методом «асимптотического анализа марковизируемых систем» [2]. В [2] показано, что при условии дважды дифференцируемости функции $v(Q)$, процесс $Q(t)$ можно аппроксимировать решением стохастического дифференциального уравнения (диффузионное приближение)

$$dQ(t) = \left(Q(t) - a_1\lambda\right)dt + \sqrt{a_2\lambda}\,dw(t), \qquad (2)$$