Итак, гиперконус $Q_{n-1}^{s}(3 < s \le r)$ геометрически определен.

Теорема 1. С парой двойственных распределений в A_n $\left(\Delta_{n,m}^{1} : A \to L_m^1 u \Delta_{n,n-m}^{2} : A \to L_{n-m}^{2}\right)$ инвариантным образом ассоциируются распределения соответствующих инвариантных гиперконусов:

$1^0 . V_{n-1,n} : A \to \widetilde{Q}_{n-1}^{n}$

$2^0 . V_{n-1,t} : A \to Q_{n-1}^{t} \quad (t = 2,3,\cdots,r; t - фиксированю)$.

Замечание 2.. Из теоремы 1. следует, что с каждой парой распределений $\Delta_{n,m}^{1}$ и $\Delta_{n,n-m}^{2}$ в A_n инвариантным образом ассоциируется распределения гиперконусов соответствующего порядка. С другой стороны из результатов теоремы: (С распределением $V_{n,r}$ в A_n инвариантным образом определяется конечное число, равное числу основных прямых l_1^i относительно K_{n-1}^{r},распределений $V_{n,2}$ квадратичных гиперконусов $Q_{n-1,2}^{i}$ с вершиной в точке A.) замечаем, что с каждым распределением $V_{n,r}$ в A_n гиперконусов порядка r инвариантным образом можно определить двойственны распределения $\Delta_{n,m}^{1} : A \to L_m^1$ и $\Delta_{n,n-m}^{2} : A \to L_{n-m}^{2}$, где L_m^1 проходит через m основных прямых $e_1^{\alpha}(\alpha = \overline{1,m})$, а L_{n-m}^{2} проходит через основные n-m основные прямые $e_1^{\alpha}(\alpha = m+1,\cdots n)$. Таким образом, распределения $V_{n,r}$ и распределения $\Delta_{n,m}^{1}$, $\Delta_{n,n-m}^{2}$ взаимно инвариантно определяют друг друга.

Литература.

1. Малаховский В. С. Индуцировано оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР,т. 5, 1973, с. 319-334.
2. Малаховский В. С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3(труды Томского университета,192), 1963,с. 28-42.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. «Наука», физматгиз, М., 1976, с.432.
4. Ивлев Е. Т. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой науч. конф. по матем. и мех. за 1970год, 1. Изд-во Томского ун-та, 1970, с. 121-123.
5. Ивлев Е. Т. О многообразии E(o,n-m,m) в n-мерном проективном пространстве $P_n(m > 2, n |< m(m+1))$. Сиб. Матем. Журнал, 1967, т.8, №5, 1143-1156.
6. Ивлев Е. Т., Березина Е. В. and Hai Gon Je.Об инвариантных аффинных связностях распределения квадратичных гиперконусов в многомерном аффинном пространстве… Математический сборник, вып. 1. Изд-во Томского ун-та, Томск, 1974, с. 68-91.
7. Остиану Н. М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. wath. pures et appl, (RNR), 1962, № 2, 231-240.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ В *D*-АНАЛИЗЕ

В.А. Чуриков
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822) 563-593,
E-mail: vachurikov@list.ru

Разные представления логарифмов комплексных порядков

В *d*-анализе имеются свои элементарные функции, которые обобщают элементарные функции классического анализа, а так же появляются новые элементарные функции, которые в классическом анализе или теряют смысл, или в частном случае переходят в константы и нули [1, 2].

Важными функциями в *d*-анализе являются логарифмы $\ln_s(x)$ постоянных дробных вещественных и комплексных порядков *s*, которые можно заменять на пропорциональные функции $\mathrm{lon}_s(x)$, которые связанны равенствами

$$\ln_s(x)=\begin{cases}\ln_\alpha(x)=\Gamma(-s+1)\operatorname{lon}_\alpha(x); & \alpha\neq 1,2,3,...\\ \ln_m(x)=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\operatorname{lon}_m(x); & s=m=1,2,3,...\end{cases}$$

Или

$$\operatorname{lon}_s(x)=\begin{cases}\operatorname{lon}_\alpha(x)=\dfrac{1}{\Gamma(-s+1)}\ln_\alpha(x); & \alpha\neq 1,2,3,...\\ \operatorname{lon}_m(x)=(-1)^{m-1}(m-1)!\ln_m(x); s=m=1,2,3,...\end{cases}$$

Здесь s – постоянный комплексный порядок интегрирования; $\Gamma(\ldots)$ - гамма-функция.

Тогда формула интегрирования в логарифмических случаях будет для комплексных порядков

$$d^s x : x^{-s} \equiv \int x^{-s} d^s x = \ln_s(x) + C_s(x) =$$

$$=\begin{cases}\Gamma(-\alpha+1)\operatorname{lon}_\alpha(x)+C_\alpha(x); & \alpha\neq 0,1,2,3,...\\ \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\operatorname{lon}_m(x)+C_m(x); & s=m=1,2,3,...\end{cases}$$

В частном случае классического анализа, когда s=-1, получим: $\ln(x)\equiv\ln_1(x)=\operatorname{lon}_1(x)$.

Функцию $\operatorname{lon}_s(x)$ назовём *приведённым логарифмом постоянного комплексного порядка s*.

Логарифмы постоянных вещественных порядков

Для экспонент вещественных порядков легко расширить понятие логарифмов на случай главных, дополнительных и комплексных экспонент.

Для целочисленных порядков p, соотношения между ними то будет

$$\mathbf{exp}_k^{(p|\mu)}(x)=(\mathbf{ln}_k^{(p|\mu)})^{-1}(x);\;\; \mathbf{ln}_k^{(p|\mu)}(x)=(\mathbf{exp}_k^{(p|\mu)})^{-1}(x);$$

$$\mathbf{ln}_k^{(p|\mu)}(\mathbf{exp}_k^{(p|\mu)}(x))=\mathbf{exp}_k^{(p|\mu)}(\mathbf{ln}_k^{(p|\mu)}(x))=x;\quad p,\mu=1,2,3,...,k.$$

Здесь $\mathbf{exp}_k^{(p|\mu)}(x)$ - матрица экспонент $\mathbf{ln}_k^{(p|\mu)}(x)$ - матрица логарифма. Обе матрицы квадратные $k\times k$.

Для рациональных порядков $s=r/p\,(r>1)$, где у натуральных чисел r и p нет общих делителей, тогда у экспонент нет сдвигового вырождения, и есть r корней инвариантности. Степень вырождения экспонент тогда будет r, а соотношения будут

$$\mathbf{exp}_{r/p}^{\{1|l\}}(x)=(\mathbf{ln}_{r/p}^{\{1|l\}})^{-1}(x);\;\; \mathbf{ln}_{r/p}^{\{1|l\}}(x)=(\mathbf{exp}_{r/p}^{\{1|l\}})^{-1}(x);$$

$$\mathbf{ln}_{r/p}^{\{1|l\}}(\mathbf{exp}_{r/p}^{\{1|l\}}(x))=\mathbf{exp}_{r/p}^{\{1|l\}}(\mathbf{ln}_{r/p}^{\{1|l\}}(x))=x;\quad l=1,2,3,...,r.$$

Здесь $\mathbf{exp}_{r/p}^{\{1|l\}}(x)$ - вектор экспонент $\mathbf{ln}_{r/p}^{\{1|l\}}(x)$ - вектор логарифма. Оба вектора имеют по r компонент.

В случае иррациональных порядков λ будет

$$\mathbf{exp}_\lambda^{\{q|l\}}(x)=(\mathbf{ln}_\lambda^{\{q|l\}})^{-1}(x);\;\; \mathbf{ln}_\lambda^{\{q|l\}}(x)=(\mathbf{exp}_\lambda^{\{q|l\}})^{-1}(x);$$

$$\mathbf{ln}_\lambda^{\{q|l\}}(\mathbf{exp}_\lambda^{\{q|l\}}(x))=\mathbf{exp}_\lambda^{\{q|l\}}(\mathbf{ln}_\lambda^{\{q|l\}}(x))=x;\quad q,l\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\mathbf{exp}_\lambda^{\{q|l\}}(x)$ и $\mathbf{ln}_\lambda^{\{q|l\}}(x)$ - матрица экспонент и логарифмов с бесконечным числом строк и столбцов.

В дальнейшем важно получение дробностепенных рядов логарифмов всех порядков, для чего необходимо обращение рядов экспонент соответствующих порядков.

Логарифмы переменных вещественных порядков

Обратные для главных экспонент $\exp_{s(t)}(x)$ переменного вещественного порядка $s(t)$ [3] функции будет логарифмы переменных вещественных порядков

$$\ln_{s(t)}(x)=(\exp_{s(t)})^{-1}(x);\quad \exp_{s(t)}(x)=(\ln_{s(t)})^{-1}(x).$$

Для них будут справедливы соотношения

$$\ln_{s(t)}(\exp_{s(t)}(x))=\exp_{s(t)}(\ln_{s(t)}(x))=x.$$

Аналогично можно вводить и другие функции, которые тоже относятся к элементарным функциям с переменным вещественным порядком.

Литература.

1. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, - 2011. – 72 с.
2. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.
3. Чуриков В.А. Дробные производные и дробные интегралы с переменным порядком // Труды VIII Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 26 – 29 апреля 2011 г. (VII International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 26 – 29, 2011). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2011, – С. 513–515.

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКОВ В *d*-АНАЛИЗЕ

В.А. Чуриков, к.ф-м.н.
Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822) 563-593
E-mail: vachurikov@list.ru

Многие элементарные функции [1, 2] постоянных вещественных порядков легко обобщаются на случай переменных вещественных порядков $s(t)$. В этом случае дробностепенные ряды с постоянным шагом заменяются на дробностепенные ряды с переменным шагом.

Главная экспонента постоянного вещественного порядка обобщается на случай переменных вещественных порядков $s(t)$, когда постоянный порядок экспоненты заменить функцией порядка $s(t)$

$$\exp_{s(t)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns(t)-1}}{\Gamma(ns(t))}=\frac{x^{s(t)-1}}{\Gamma(s(t))}+\frac{x^{2s(t)-1}}{\Gamma(2s(t))}+\frac{x^{3s(t)-1}}{\Gamma(3s(t))}+\dots$$

Здесь $\exp_{s(t)}(x)$ - *экспонента переменных вещественных порядков* $s(t)$; $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция Эйлера.

Гиперболические синусы и *косинусы переменных вещественных порядков* $s(t)$ будут:

$$\mathrm{sh}_{s(t)}(x)=\frac{1}{2}(\exp_{s(t)}(x)-\exp_{s(t)}(-x))=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s(t)-1}-(-x)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))};$$

$$\mathrm{ch}_{s(t)}(x)=\frac{1}{2}(\exp_{s(t)}(x)+\exp_{s(t)}(-x))=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s(t)-1}+(-x)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))}.$$

Связь между экспонентами переменных порядков и гиперболическими синусами и косинусами даётся равенством

$$\exp_{s(t)}(\pm x)=\mathrm{ch}_{s(t)}(x)\ \pm\ \mathrm{sh}_{s(t)}(x).$$

Тригонометрические синусы и *косинусы переменных вещественных порядков* $s(t)$ будут:

$$\sin_{s(t)}(x)=\frac{1}{2i}(\exp_{s(t)}(ix)-\exp_{s(t)}(-ix))=\frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ix)^{(m+1)s(t)-1}-(-ix)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))};$$

$$\cos_{s(t)}(x)=\frac{1}{2}(\exp_{s(t)}(ix)+\exp_{s(t)}(-ix))=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ix)^{(m+1)s(t)-1}+(-ix)^{(m+1)s(t)-1}}{\Gamma((m+1)s(t))}.$$

Обобщением *формулы Эйлера для переменных вещественных порядков* $s(t)$, которая связывает косинусы, синусы и экспоненты переменных порядков, будет