$\exp_{s(t)}(\pm ix) = \cos_{s(t)}(x) \pm i\sin_{s(t)}(x).$

Тригонометрические тангенсы и *котангенсы*, *секансы* и *косекансы переменных порядков s*(*t*)

$$\mathrm{tg}_{s(t)}(x) = \frac{\sin_{s(t)}(x)}{\cos_{s(t)}(x)};\ \mathrm{ctg}_{s(t)}(x) = \frac{\cos_{s(t)}(x)}{\sin_{s(t)}(x)};$$

$$\sec_{s(t)}(x) = \frac{1}{\cos_{s(t)}(x)};\ \mathrm{cosec}_{s(t)}(x) = \frac{1}{\sin_{s(t)}(x)}.$$

Функции вида

$$P_{s(t)|n}(x) = \sum_{i=0}^{n<\infty} a_i x^{s(t)(i+1)-1} =$$

$$= a_0 x^{s(t)-1} + a_1 x^{2s(t)-1} + ... + a_{n-1} x^{s(t)n-1} + a_n x^{s(t)(n+1)-1};\quad t, a_i \in \mathbb{R};\ a_i = \mathrm{const};\ i = 0, 1, 2, ..., n < \infty,$$

будем называть алгебраические полиномами переменных вещественных порядков s(t) степени n, или полиномами переменных дробных порядков.

Литература.

1. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, - 2011. – 72 с.
2. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.

D-ОПЕРАТОР ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКОВ

В.А. Чуриков, к.ф-м.н.
Томский политехнический университет, г. Томск
634050, г. Томск, пр. Ленина 30, тел. (3822) 563-593
E-mail: vachurikov@list.ru

d-оператор целочисленных порядков в свёрнутом виде

В основе *d*-анализа, в котором производные и интегралы обобщаются на любые вещественные и комплексные порядки, лежит *d*-оператор [1, 2], важным частным случаем которого является *d*-оператор целочисленных вещественных порядков *m*, который действует в пространстве степенных функций x^q и определяется равенствами

$$\begin{cases} d^{-m}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)}x^{q-m};\quad q \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{N};\quad \neg[(q = -1, -2, -3, ...) \wedge (q - m \neq -1, -2, -3, ...)]; \\ d^{m}x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)}x^{q+m} + C_m(x);\quad \begin{cases} \neg[(q = -1, -2, -3, ...) \wedge (q + m \neq -1, -2, -3, ...)]; \\ m \neq -q; \end{cases} \\ d^{m}x : x^{-m} = \ln_m(x) + C_m(x). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь полиномы дифференцирования $C_{-m}(x) = 0$ и полиномы нулевого порядка $C_0(x) = 0$; $C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$ - полином интегрирования целочисленных порядков 1-*m*, для которых справедливо равенство: $d^{-m}x : C_m(x) = 0$; Коэффициенты b_k являются произвольными конечными вещественными *константами интегрирования*; $\ln_m(x)$ - логарифмы целочисленных порядков.

Важным частным случаем данного оператора являются операторы интегродифференцирования порядка *m*=1, что соответствует операциям интегродифференцирования степенных функций в классическом анализе. В этом случае $\ln_1(x) = \ln(x)$, т. е. логарифм порядка 1 совпадает с натуральным логарифмом классического анализа. Это важное свойство данного оператора, подтверждающее принцип соответствия.

d-оператор целочисленных порядков в развёрнутом виде

Для *d*-оператора целочисленных порядков имеются особые частные случаи, связанные с одновременным появлением полюсов у гамма-функций в числителях и знаменателях коэффициентов *d*-оператора, а при интегрировании степенных функций могут возникать логарифмические случаи. Все эти особые случаи возникают при действии оператора на степенные функции с отрицательными целочисленными порядками.

Рассмотрим *d*-оператор целочисленных порядков более подробно.

Так *первое* равенство (1), отвечающее за дифференцирование целочисленных порядков распадается на два случая.

Первый случай соответствует ситуациям, когда в коэффициентах и числитель и знаменатель будут конечны.

Во втором случае в числителе и в знаменателе коэффициентов гамма-функции одновременно обращаются в бесконечность. Для целочисленных порядков дифференцирования бесконечность в числителе и в знаменателе коэффициента возникает всегда одновременно.

Бесконечности, возникающее одновременно в числителе и в знаменателе полюсы у коэффициентов сокращаются, а результат получается конечным, что легко показать.

Производные целочисленных порядков степенных функций с целым отрицательным показателем легко записать

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m};\ n = 0, 1, 2, 3, ...;\ m \in \mathbb{N}.$$

Эту формулу легко упростить, используя свойство гамма-функции

$$\Gamma(\alpha - m) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-m)} = \frac{(-1)^m\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(m-\alpha)}.$$

Заменив α на $-n+1$, получим

$$\Gamma(-n+1-m) = \frac{\Gamma(-n+1)}{(-n)(-n-1)\dots(-n+1-m)} = \frac{(-1)^m\Gamma(-n+1)}{n(n+1)\dots(n-1+m)}.$$

Подставив это выражение в рассматриваемую формулу дифференцирования, получим, если $n = 0, 1, 2, 3, ...;\ m \in \mathbb{N}$

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m} = \frac{(-1)^m n(n+1)\dots(n-1+m)\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+1)} x^{-n-m} =$$
$$= (-1)^m n(n+1)\dots(n-1+m) x^{-n-m}.$$

Данную формулу можно представить иначе, если переписать гамма-функции через факториалы

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m} = \frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-m-n}. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае, если полюсы одновременно образуются в числителе и в знаменателе коэффициента *d*-оператора, данную формулу можно записать другим способом, заменив бесконечности в полюсах соответствующими вычетами

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m} = \frac{\operatorname{Res}\limits_{1-n} \Gamma(-n+1)}{\operatorname{Res}\limits_{1-n-m} \Gamma(1-m-n)} x^{-n-m} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n+m-1)!}{(n-1)!(-1)^{n+m-1}} x^{m-n} = \frac{(-1)^m(n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-n-m};\quad n = 0, 1, 2, 3, ...;\ m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) совпадают, что является аргументом в пользу замены полюсов соответствующими вычетами, которое было принято при формулировании *d*-оператора.

Второе равенство (1), отвечающее за интегрирование целочисленных тоже порядков аналогично распадается на три случая.

Первый случай, когда в числителе и в знаменателе нет бесконечностей.

Второй случай, когда в числителе образуется бесконечность, а знаменатель конечен.

$$d^{m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x);\quad n = 1, 2, 3, ...;\ n < m+1;\ m \neq n.$$

Заменив гамма-функцию в числителе на соответствующие вычеты $\operatorname*{Res}_{1-n}\Gamma(-n+1)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, получим для данных случаев

$$d^m x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x) =$$

$$= \frac{\operatorname*{Res}_{1-n}\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+m} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} x^{-n+m} + C_m(x); \quad n = 1, 2, 3, ...; n < m+1; m \neq n.$$

В третьем случае, когда бесконечности появляются в числителе и в знаменателе одновременно, что соответствует интегрированию целочисленных порядков степенных функций с целочисленной отрицательной степенью.

В случае, когда интегралы целочисленных порядков m берутся от степенных функций с целочисленным отрицательным показателем $-n$, но $m<n$, тогда задача полностью решается также при интегрировании в рамках классического анализа в силу разложимости оператора интегрирования целочисленного порядка m на m операторов первого порядка (6). Тогда получим формулу

$$\begin{aligned} d^m x : x^{-n} &= \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{(-1)^m}{(n-1)(n-2)\dots(n-m)} x^{m-n} + C_m(x) = \\ &= \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Данную формулу можно получить, как и в случае дифференцирования, если у гамма-функции снова заменить соответствующими вычетами бесконечности в полюсах, когда $m, n \in \mathbb{N}; n > m$

$$\begin{aligned} d^m x : x^{-n} &= \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{\operatorname*{Res}_{1-n}\Gamma(-n+1)}{\operatorname*{Res}_{1-n+m}\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-m-1)!}{(n-1)!(-1)^{n-m-1}} x^{m-n} + C_m(x) = \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Полученные формулы (4) и (5) совпали с формулами классического анализа, что подтверждает выбранные способы устранения бесконечностей.

Используя разложение на два равенства *первого*, *второго* равенств (1), и полученные частные случаи для целочисленных порядков интегродифференцирования и степенных функций с целыми отрицательными степенями, получим *d-оператор целочисленных порядков в развёрнутом виде*

$$\begin{cases} d^{-m} x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)} x^{q-m}; \quad m = 0, 1, 2, ...; q \neq -1, -2, -3, ...; \\ d^m x : x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)} x^{q+m} + C_m(x); \quad m = 0, 1, 2, ...; q \neq -1, -2, -3, ...; \\ d^{-m} x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^m (n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-m-n}; \quad n \in \mathbb{N}; m = 0, 1, 2, ...; \\ d^m x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} x^{-n+m} + C_m(x); \quad n = 1, 2, 3, ...; n < m+1; m \neq n; \\ d^m x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x); \quad n \in \mathbb{N}; m = 0, 1, 2, ...; n \geq 1+m; m \neq n; \\ d^m x : x^{-m} = \ln_m(x) + C_m(x); \quad m = 1, 2, 3, ... \end{cases} \tag{6}$$

Здесь *первое* и *третье* равенства является следствием *первого* равенства (1).

Второе, *четвёртое* и *пятое* равенства являются частными случаями *второго* равенства (1). Четвёртое равенство соответствует *гиперболическим случаям*, когда порядок степенной функции после интегрирования будет отрицательным. Пятое равенство соответствует *параболическим случаям*, когда порядок степенной функции после интегрирования будет положительным.

Шестое равенство является частным случаем пятого равенства (1) для *целочисленных логарифмических случаев*. В этих случаях при интегрировании целочисленных порядков m степенных функций с целочисленным отрицательным показателем степени $-m$.

Данный оператор целочисленных порядков (6) эквивалентен первоначальному выражению (1), и является более громоздким, но для реальных вычислений может оказаться более удобным.

Литература.

1. Чуриков В.А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 312, – № 2. – С. 16–20.
2. Чуриков В.А. Локальный *d*-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной // Современное состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологический институт, 17 – 18 апреля 2014. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, – 2014, – с. 283 – 289.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ИСТОЛКОВАНИЯ ЗАКОНОВ ПРИРОДЫ

Г.Н. Аманолла, студент
Карагандинский государственный технический университет
100027, Казахстан, г. Караганда, Бульвар Мира, 56, тел. (7212)-56-75-93
E-mail: gulzat95@mail.ru

Математика является наукой, располагающейся на границах естествознания. Поэтому естествознание все чаще прибегает к математическим методам для истолкования законов природы. Толкование, какого бы то ни было явления является настоящим, только в том случае, если удалось создать математический аппарат передающий логичность данного процесса.

Естествознание использует математику в следующих направлениях;

- во-первых, с помощью математики производится количественный анализ и формулировка установленных фактов;
- во-вторых, строятся математические модели, рождается математическая экология, физика и т.д.;
- формулируется язык научных теорий.

Области применения математики практически не ограничены. Математика и естествознание тесно связаны. Даже простейшие математические операции служат отправной точкой естествознания. Наука использует её для развития различных концепций и представлений в естествознании. Ценность математических методов заключается в том, что она способна легко переходить из одной области знания в другую. Но следует учитывать то, что математика исследует не саму природу, а лишь математические модели и прообразы окружающей нас действительности.

Для того чтобы выделить наиболее универсальные, важные признаки, характерные различным научным системам, применяется математическое моделирование. Модели математики применяются в том случае, когда экспериментальное изучение требует значительных расходов или же совсем немыслимо.

С помощью математического моделирования мы получаем ответы на многие интересующие нас вопросы. Процесс создания математических моделей можно представить в виде следующих ступеней:

- во-первых необходимо выразить основные вопросы, ответы на которые мы ищем;
- затем происходит поиск информации об изучаемом объекте;
- следующим шагом намечаются цели моделирования;
- на следующем этапе отмечаются наиболее важные признаки моделируемого объекта, формализуются главные характеристики;
- после вырабатываются принципы работы с ними.

Так и зарождается математическая модель. Далее происходит её исследование с применением аналитических и вычислительных методов, сопровождающихся, в конечном счете, нахождением ответов на поставленные вопросы. Если модель безупречна, то полученные данные о модели бывают, подобны данным об исследуемой системе.

Особенностью моделирования в естествознании является возможность объединения качественных и количественных методов анализа. Математическая модель способна не только пояснять