Для сравнения, математик Харди утверждал, что самое большое число, которое когда-либо служило какой-либо цели в математике, равно $10^{10^{10^{34}}}$ [3].

Аналогично, в химии нет и бесконечно малых величин. Каждая физическая величина – время, энергия, масса, расстояние – имеет конечное наименьшее значение, которому присущ химический смысл. Например, время в химии ограничено снизу значением 10^{-14} с, которое характеризует самую быструю реакцию среди всех возможных: $H + H = H_2$. Нижняя граница для расстояний – это 10^{-10} м, то есть характерный размер атомов. Меньшие значения с точки зрения химии уже не имеют смысла.

Раз нет бесконечно малых величин, то, строго говоря, теряет смысл понятие «производной в точке», которое равно отношению бесконечно малых приращений функции и аргумента. Тем не менее, в химии производная играет очень большую роль: производные по температуре, давлению и объему составляют основу математического аппарата химической термодинамики, а производные по времени – химической кинетики. Это связано с тем, что при той точности измерений, которая принята в химии, точное значение производной практически равно отношению конечных приращений:

$$f'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Мы рассмотрели всего несколько примеров, показывающих, как математика используется в химии. Они дают определенное, хотя, конечно, неполное представление о задачах, решаемых химиками с помощью математики, и ограничениях, которые химия накладывает на применяемую в ней математику. Взаимодействие химиков и математиков не ограничивается решением только химических задач. Иногда и в химии возникают абстрактные задачи, которые приводят даже к появлению новых областей математики. Так, математики до сих пор работают над доказательством второго закона термодинамики – одного из основных законов химии, справедливость которого для самих химиков очевидно вытекает из всех известных до сих пор экспериментальных данных о химических веществах и химических реакциях.

История науки говорит о том, что на границах различных областей знания могут происходить очень интересные события. И хотя химики и математики мыслят совсем по-разному, те случаи, когда им удается взаимодействовать, приводят к появлению красивых и нетривиальных результатов и способствуют обогащению обеих наук.

Литература.

1. М.Г.Воронков, А.Ю.Рулев. О химии с улыбкой, или основы пегниохимии. – СПб: Наука, 1999.
2. Химия и жизнь-XXI век. 1997, № 2, с. 5.
3. С.Сингх. Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000.
4. М.М.Левицкий. О химии серьезно и с улыбкой. – М.: Академкнига, 2005.

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ИНТЕРВАЛЫ

А.П. Степанов, ст. преподаватель, Ю.В. Сотокина, инж. А.Г. Филимоненко, студент
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: apsuti@rambler.ru

Рассмотрим четвёрку точек, расположенных на одной прямой особым образом. Пусть точка C принадлежит отрезку AB. Она делит его в отношении AC/CB. Найдём на прямой AB точку D такую, что она делит этот отрезок в таком же отношении, но снаружи (рис. 1), то есть

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}. \tag{1}$$

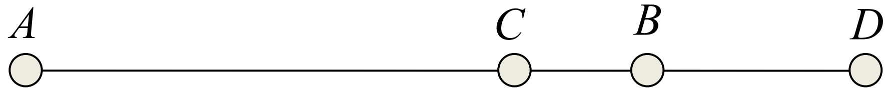

Рис. 1. Гармоническая четверка точек

Такая четвёрка точек называется **гармонической**, а точки *C* и *D* – **гармонически сопряжёнными** относительно отрезка *AB*.

Если при определении отношения учитывать направление отрезков (отношение положительно, если отрезки сонаправлены, и отрицательно, если противоположно направлены), то,

$$\frac{AD}{DB} = -\frac{AC}{CB}, \text{ или } \frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC} = -1. \tag{2}$$

Двойное отношение (1) определено для любых четырёх точек на прямой, включая и бесконечно удалённую. Если, например, *C* – бесконечно удалённая точка, то $AC/DB = -1$, а

$$\frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

В частности, середине отрезка гармонически сопряжена именно бесконечно удалённая точка.

Двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой (например, ***A, B, C, D***), представляет собой число, которое обозначается символом **(*ABCD*)**. В символе (***ABCD***) каждая точка имеет особую роль:

A – начало отрезка, *B* – конец отрезка (**базисная** или **основная пара**), *C* –первая делящая точка, *D* вторая делящая точка (**делящая пара**).

Число ***(ABCD)*** будет отрицательным в случае расположения одной из точек делящей пары внутри отрезка ***AC***, а второй точки делящей пары — вне отрезка ***AC***. При значении ***(ABCD) = −1*** двойное отношение называют **гармоническим**. При расположении делящей пары точек внутри или вне отрезка ***AC*** число ***(ABCD)*** будет положительным, а двойное отношение называют **ангармоническим** [1].

Можно рассматривать сложное отношение и в координатах. Предположим, что *A, B, C, D* четыре точки на прямой. Примем в качестве начальной какую-нибудь точку *O* и предположим, что точки *A, B, C, D* расположены соответственно на расстояниях *a, b, c, d* справа от точки *O* (рис. 2).

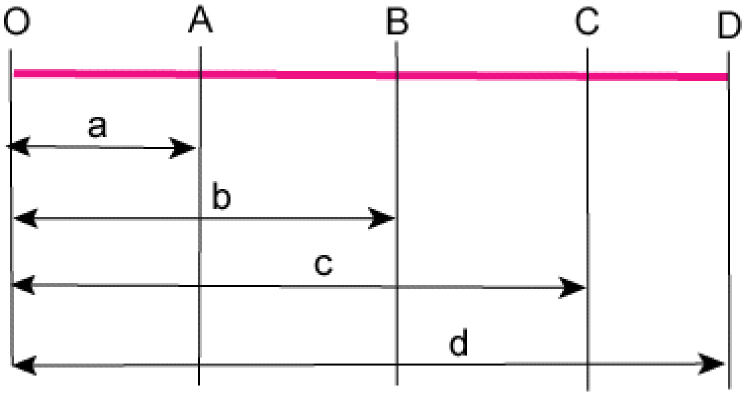

Рис. 2. Представление точек прямой с помощью чисел координатной прямой

Двойное отношение (или **сложное отношение** или устаревшее **ангармоническое отношение**) четверки чисел *a, b, c, d* определяется как

$$(a,b,c,d) = (ab,cd) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}. \tag{3}$$

Двойное отношение широко применяется математике и часто встречается в разных областях естествознания.

Рассмотрим отрезки *AD*, *AB* и *AC* рисунка 1, как струны, дающие мажорное трезвучие чистого строя. Так будет, если между длинами этих отрезков имеются соотношения: AC=2/3AD; AB = 3/4 AD (что мы и будем предполагать). Из этих предположений следует, что точка *B* делит отрезок *CD* ***внутренним*** образом, а точка *A* делит этот же самый отрезок *CD* ***внешним*** образом в одном и том же (по абсолютной величине) отношении.

Рассмотрим в координатном представлении (рис. 3).

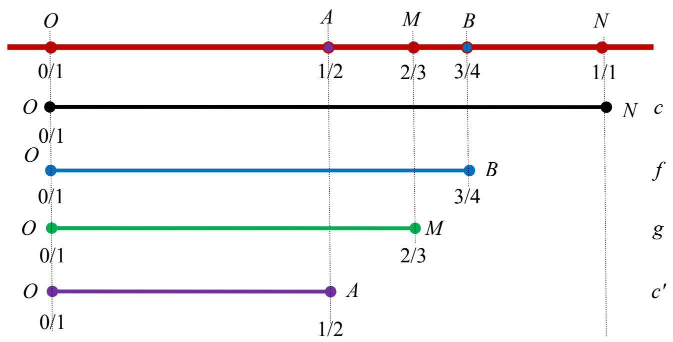

Рис. 3. Гармонические интервалы на прямой ON

В этом случае: *OM* = 2/3 *ON* (*ON* = *do*), *OB* = 3/4 *ON* (*OB* = *mi*), *OM* = *sol*. Отрезки *ON*, *OB* и *OA* могут рассматриваться как интервалы пифагорейского кватернера. Другими словами, точки *N, A, M, B* на прямой образуют гармоническую четверку точек. Саму эту прямую мы можем рассматривать как некоторую прямую, с выбранной на ней системой координат. Таким образом числа, приписанные точкам *N, A, M, B,* являются их координатами в этой выбранной системе координат и естественным образом порождают четверку отрезков, которые, будучи интерпретированы как струны соответствующей длины, и образуют "звукоряд Орфея" или Пифагорейский кватернер.

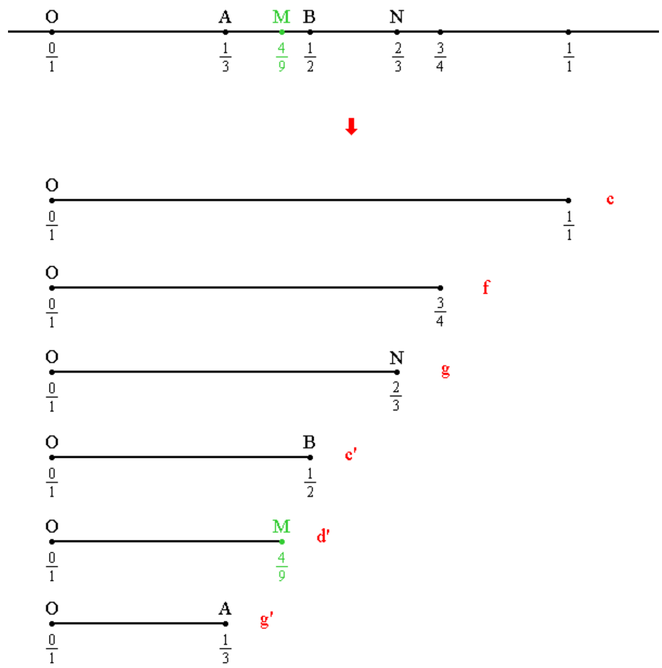

Рис. 4. Построение гармонических интервалов на прямой

С другой стороны, если в качестве "исходных" заданы струны *c, f* и *c′*, то недостающая до звукоряда Пифагора струна *g* снова может быть получена как четвертая гармоническая к трем уже заданным. Это является следствием того факта, что на нашей "числовой прямой" точка *M* = 2/3 делит внутренним образом отрезок с концами *A* = 1/2 и *B* = 3/4 в том же самом отношении, в каком точка *N* = 1/1 делит тот же самый отрезок внешним образом. Значит, согласно определению точки *M* и *N* делят гармонически отрезок *AB*, или, что тоже самое, точка *M* является четвертой гармонической к тройке точек *A, B,* N.

Отсюда следует, что и дальнейшие интервалы пифагорейского звукоряда могут быть построены путем систематического применения одной и той же операции: построения четвертой гармонической к некоторой уже построенной ранее тройке интервалов. Например, интервал, отвечающий звуку *d′*, может быть построен как четвертый гармонический интервал к уже построенной ранее тройке интервалов, ассоциированных со звуками *g′*, c' и g (рис. 4).

В математике существует способ построения множества всех неотрицательных дробей m/n, где m и n не имеют одинаковых простых сомножителей, т.е. являются взаимно простыми числами. Этот способ называется *деревом Штерна – Броко*, поскольку он был открыт независимо друг от друга немецким математиком Морицем Штерном и французским часовщиком Ахиллом Броко [2].

Суть этого способа состоит в том, чтобы начать с двух дробей $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$, а затем повторить необходимое количество раз следующую операцию: вставить $\frac{m+m'}{n+n'}$ между двумя соседними дробями

$\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{m'}{n'}$. Новая дробь $(m + m')/(n + n')$ называется медиантой дробей m/n и m'/n'. Например, первый шаг дает одну новую вставку между $\dfrac{0}{1}$ и $\dfrac{1}{0}$:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{0};$$

следующий шаг добавляет две:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{0}.$$

Последующий шаг добавляет четыре:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{1}{0};$$

Затем добавляется 8, 16 и т.д. новых вставок. Всю совокупность вставок можно представить в виде бесконечного бинарного дерева, верхние уровни которого выглядят так:

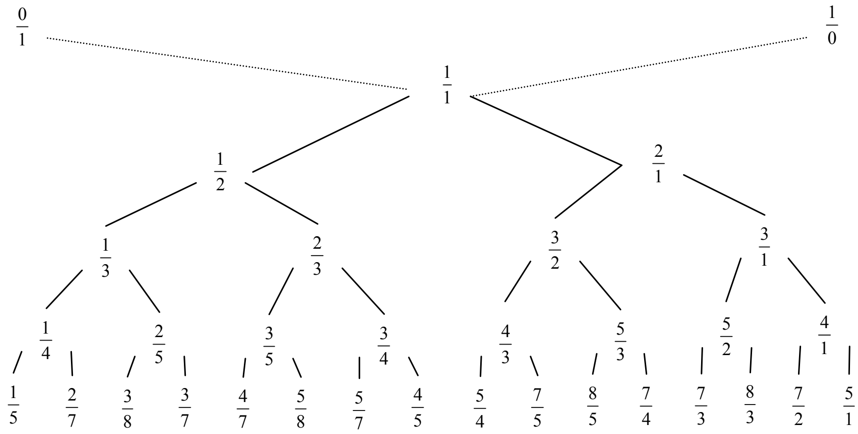

Рис. 5. Дерево Штерна-Броко

Каждая дробь имеет вид $\dfrac{m+m'}{n+n'}$, где $\dfrac{m}{n}$ - ближайший предок сверху слева, а дробь $\dfrac{m'}{n'}$ - сверху справа («предком» является дробь, которая достижима, если следовать по ветвям вверх).

Рассмотрим теперь наши интервалы с двойным отношением (рис. 3) и дерево Штерна-Броко (рис. 5), например, на втором уровне. На нем находится число 2/3, которое расположено между числами 1/2 и 1/1. Эти числа соответствую струнам c, c' и g.

На следующем уровне число между числом 2/3 и 1/1 появится новое число – 3/4 (рис. 6).

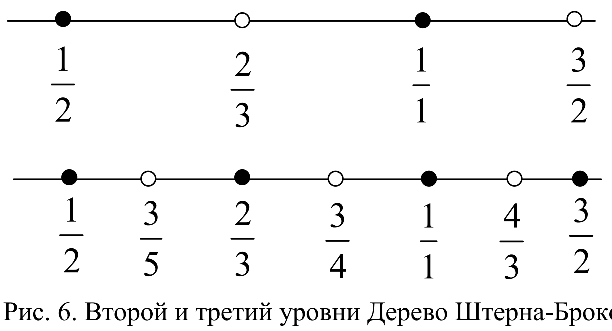

Рис. 6. Второй и третий уровни Дерево Штерна-Броко

Числа 1/2, 2/3, 4/4 и 1/1 образуют гармоническую четверку чисел. Аналогично можно показать, что на любом уровне дерево Штерна-Броко растет *гармонично*.

Таким образом, каждый уровень дерева Штерна-Броко растет гармонично и, следовательно, имеет связь с двойным отношением. Это позволяет нам с помощью этого числового треугольника рассчитывать гармонические интервалы любого уровня сложности.

Литература.

1. Бескин Н. М. Деление отрезка в данном отношении. М.: Наука, 1973, 64 с.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

МЕТОД ФЛЮКСИЙ НЬЮТОНА

А.П. Степанов, ст. преподаватель, Ю.М. Готовщик, студент, Е.И. Черных, студент
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: apsuti@rambler.ru

Одним из первооткрывателей дифференциального и интегрального исчисления является Исаак Ньютон, родившийся в 1642 г., который разделил честь его открытия наряду с Лейбницем. В 1660 г. И. Ньютон поступил в Кембриджский университет и преуспел. За несколько лет он создал метод решения проблемы касательной: теперь он мог вычислить касательную к любой плавной кривой в любой точке. Этот процесс представляет собой первую часть математического анализа, теперь известную как дифференциальное исчисление. Однако способ дифференцирования Ньютона не особенно похож на тот, которым мы пользуемся в настоящее время.

В понятиях и терминологии метода флюксий с полной отчётливостью отразилась глубокая связь математических и механических исследований Ньютона. Понятие непрерывной математической величины он вводит как абстракцию от различных видов непрерывного механического движения. Линии производятся движением точек, поверхности - движением линий, тела - поверхностей, углы - вращением сторон и т.д.

Переменные величины Ньютон назвал **флюентами** (текущими величинами, от *лат.* fluo - теку). Общим аргументом текущих величин - флюент - является у Ньютона "*абсолютное время*", к которому отнесены прочие, зависимые переменные. Скорости изменения флюент Ньютон назвал **флюксиями**, а необходимые для вычисления флюксий бесконечно малые изменения флюент - "*моментами*" (у Лейбница они назывались **дифференциалами**). Момент флюэнты *u*, например, он обозначает так: $o\dot{u}$, где *u* – флюксия. Таким образом, Ньютон положил в основу понятия флюксий (**производной**) и флюенты (первообразной, или неопределённого **интеграла**).

Наиболее полное изложение дифференциального и интегрального исчислений содержится в "**Методе флюксий**..." (1670-1671 гг., опубликовано в 1736 г.). Здесь Ньютон формулирует две основные взаимно-обратные задачи анализа: 1) определение скорости движения в данный момент времени по известному пути, или определение соотношения между флюксиями по данному соотношению между флюентами (**задача дифференцирования**), и 2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения, или определение соотношения между флюентами по данному соотношению между флюксиями (**задача интегрирования** дифференциального уравнения и, в частности, отыскания первообразных).

Метод флюксий применяется здесь к большому числу геометрических вопросов (задачи на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др.); здесь же выражается в элементарных функциях ряд интегралов от функций, содержащих квадратный корень из квадратичного трёхчлена.

Большое внимание уделено в "Методе флюксий" интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, причём основную роль играет представление решения в виде бесконечного степенного ряда.

Стиль дифференцирования Ньютона основывался на флюксиях (производных) – потоках – математических выражений, которые он называл флюэнтами (переменными).

Как пример метода флюксий Ньютона рассмотрим функцию [3]

$$y = x^2 + x + 1. \qquad (1)$$