

УДК 621.3.001.24

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ОБМОТОК ТРАНСФОРМАТОРА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СКИН-ЭФФЕКТА

Исаев Юсуп Ниязбекович,

д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры электрических сетей
и электротехники Энергетического института Томского политехнического
университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
E-mail: isaev_yusup@mail.ru

Старцева Елена Вячеславовна,

ст. преподаватель кафедры электроэнергетических систем Энергетического
института Томского политехнического университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. E-mail: s.e.v.75@mail.ru

Актуальность работы. При добыче, транспортировке и переработке георесурсов используется различное электротехническое оборудование, основными распределительными устройствами электроэнергии которого служат трансформаторы. В ряде случаев возникает необходимость проводить локальные электрические сети для электроэнергетической подпитки устройств переработки георесурсов, основными узлами которых также служат трансформаторы. Энергоэффективность электрических сетей зависит от состояния распределительных устройств – трансформаторов, от состояния обмоток трансформаторов. Поэтому исследование и моделирование состояний обмоток трансформатора являются важными задачами. При представлении обмоток трансформатора в виде распределенной системы необходимо знать величины элементов схемы замещения. При наличии высокочастотных токов в цепи на величину элементов схемы замещения начинает влиять скин-эффект – зависимость тока от частоты. Актуальность работы обусловлена тем, что в качестве зондирующего импульса трансформатора используют импульс наносекундной длительности, спектр которого наполнен высокими частотами. Высокие частоты зондирующего импульса провоцируют скин-эффект, который, в свою очередь, вносит в величину параметров схемы замещения зависимость от частоты.

Цель работы: представить зондирующий наносекундный импульс в виде суперпозиции гармоник с различными частотами; для каждой гармоники с фиксированной частотой, входящей в формирование импульса, подсчитать индуктивность и сопротивление для схемы замещения обмотки трансформатора; для определения величин индуктивности и емкости использовать расчет электромагнитного поля с учетом скин-эффекта. Энергия рассчитанного электромагнитного поля позволяет извлечь значения индуктивности и сопротивления исследуемой системы при фиксированной частоте. Используя принцип суперпозиции, получить результирующую схему замещения, состоящую и совокупности схем, полученных для каждой частоты в отдельности. В сформированной схеме замещения обмотки трансформатора получить токи и напряжения и сравнить с экспериментальными данными.

Методы исследования. Метод исследования основан на использовании принципа суперпозиции, т. е. на разложении функции в ряд Фурье по гармоническим функциям. В работе также используется численное решение уравнения в частных производных – уравнения Гельмгольца с использованием метода конечных элементов. Для реализации метода конечных элементов используется математический пакет COMSOL Multiphysics.

Результаты. Произведено частотное разложение наносекундного импульса с последующим его использованием в качестве зондирующего сигнала для диагностики трансформатора. На основе решения уравнений Максвелла построена картина пространственного распределения векторного магнитного потенциала. Векторный магнитный потенциал используется для извлечения информации об индуктивности и сопротивлении схемы замещения трансформаторной обмотки. Получены графические зависимости индуктивности и сопротивления схемы замещения обмотки трансформатора от частоты. Графические зависимости приведены для различных поперечных сечений обмоток трансформатора: круглой и прямоугольной. На основе полученных зависимостей построены схемы замещения обмоток трансформатора с учетом возможного влияния скин-эффекта. Приведены расчеты напряжений и тока обмоток трансформатора с использованием схемы замещения, а также результаты сравнения теоретических расчетов с экспериментальными.

Ключевые слова:

Обмотки трансформатора, зондирующий импульс, частотный спектр, распределенные параметры, уравнение Гельмгольца, скин эффект, уравнение состояния.

Введение

В ряде случаев необходимо проводить локальные электрические сети для электроэнергетической подпитки устройств переработки георесурсов. В локальных электроэнергетических системах основным элементом, преобразующим и распределяющим электрическую энергию, является трансформатор. От качественной работы этого важного устройства зависит энергоэффективность электрических сетей. Одним из эффективных методов исследования причин возникновения дефектов в обмотках является диагностика трансформатора

коротким импульсом напряжения, а менее затратным является метод математического моделирования. При моделировании трансформатора для диагностики импульсом короткой длительности, порядка сотен наносекунд, необходимо учитывать два обстоятельства. Первое – обмотке трансформатора следует сопоставлять электротехническую схему замещения с распределенными параметрами [1–4]. Второе – из-за короткой длительности зондирующего импульса, импульс имеет высокочастотное наполнение и, следовательно, необходимо учитывать скин-эффект [5] – зависимость пара-

метров схемы замещения от частоты. При рассмотрении двухобмоточного трансформатора схему замещения нужно представлять для каждой обмотки в отдельности. Приведем этапы формирования моделей обмоток двухобмоточного трансформатора (фрагмент трансформатора приведен на рис. 1). На рис. 1 приведены формы внутренней (низковольтной, с прямоугольным сечением провода) и внешней (высоковольтной, с круглым сечением провода) обмоток трансформатора. Внешняя обмотка намотана медным проводом диаметром $d=2$ мм с шагом $h=4$ мм, количество витков $n=120$, внутренний диаметр $d_{\text{вн}}=140$ мм, внешний диаметр $D_{\text{внеш}}=160$ мм, длина медного кабеля $l=370$ мм, основа – полихлорвиниловый цилиндр. Внутренняя обмотка намотана медной шиной с размерами $a=4$ мм, $b=7$ мм, количество витков $n=20$, внутренний диаметр $d_{\text{вн}}=86$ мм, внешний диаметр $D_{\text{внеш}}=102$ мм, длина медного кабеля $l=370$ мм, основа – винипластовый цилиндр.

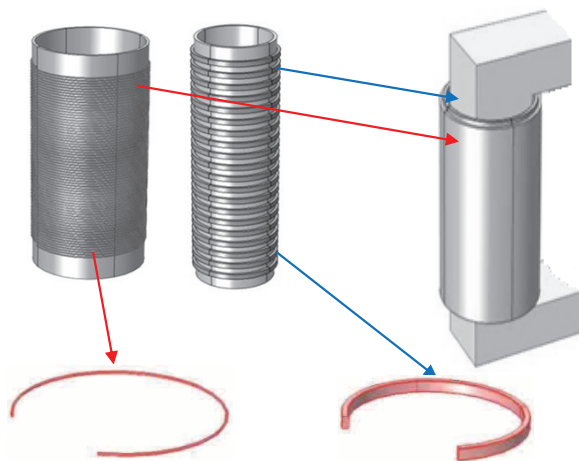


Рис. 1. Фрагмент трансформатора с обмотками и формы витков

Fig. 1. Fragment of the transformer with windings and coils form

Электротехническая схема замещения одного витка обмотки

Виток обмотки заменяется электротехническим звеном, состоящим из элементов, приведенных на рисунке. Здесь C_1 – межвитковая емкость; C_2 – емкость между витком и заземленными частями трансформатора; L – индуктивность рассеяния обмотки с учетом взаимной индуктивности между соседними элементами обмотки; R – активное сопротивление витка соответственно.

Все приведенные величины являются погонными, т. е. значения величин отнесены к единице длины [1–3]. Таким образом, обмотку трансформатора можно заменить последовательно соединенными звеньями [6, 7], рис. 3.

Относительный вклад высокочастотных компонент в формирование спектра зондирующего импульса короткой длительности достаточно высок. При дальнейшем укорачивании импульса относительный вклад высокочастотных компонент усиливается. Как следствие этого явления, при очень коротких длительностях зондирующего импульса начинает проявляться *скин-эффект*. То есть при высокочастотном токе в поперечном сечении проводника ток выталкивается из внутренней области к периферии проводника. При этом начинает проявляться зависимость индуктивности и сопротивления проводника от частоты.

Для определения величин электротехнических элементов, входящих в схему замещения, определим частотный спектр и частотный диапазон зондирующего импульса, а затем приведем расчет индуктивности и сопротивления витков обмотки трансформатора круглого и прямоугольного сечения.

Частотное разложение зондирующего импульса

В качестве модельного зондирующего импульса выберем функцию в виде

$$U(t) = \exp(-(t - 1,5 \cdot 10^{-6})^{14} \alpha), \quad \alpha = 10^{93},$$

с длительностью $T=0,5$ мкс. (рис. 4).

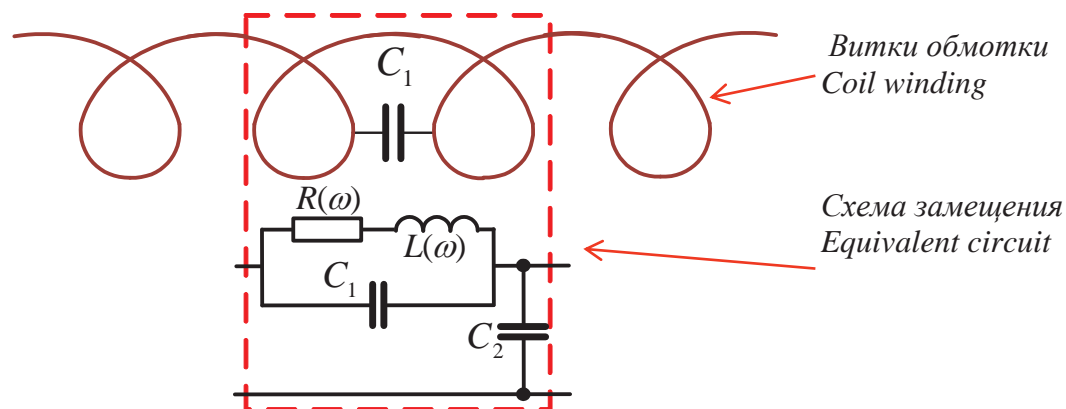


Рис. 2. Схема замещения витка обмотки

Fig. 2. Equivalent circuit of coil winding

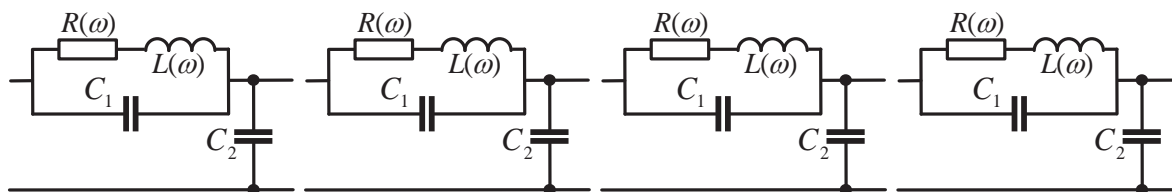


Рис. 3. Схема замещения обмотки для заданной частоты

Fig. 3. Equivalent circuit of the coil for the given frequency

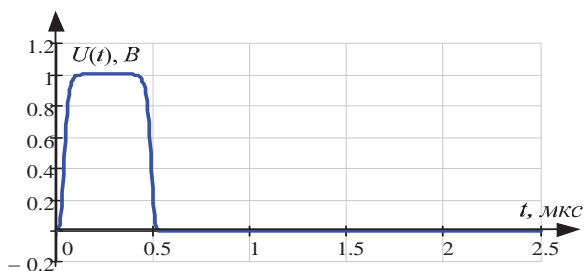


Рис. 4. Зондирующий импульс

Fig. 4. Probe pulse

Виток обмотки заменяется электротехническим звеном, состоящим из элементов, приведенных на рис. 2. Здесь C_1 – межвитковая емкость; C_2 – емкость между витком и заземленными частями трансформатора.

Определим частотный спектр импульса. Для этого разложим импульс в ряд Фурье, определив коэффициенты разложения $A_k, k=0, \dots, N$. Для определения коэффициентов использовалась стандартная программа быстрого преобразования Фурье (FFT) [8, 9] программно-интегрированной среды MathCAD. Далее функция представлялась в виде ряда

$$U(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N |A_k| \sin\left(\omega kt + \arg(A_k) + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2,53 \cdot 10^6 \text{ рад / с},$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos(\omega kt) dt,$$

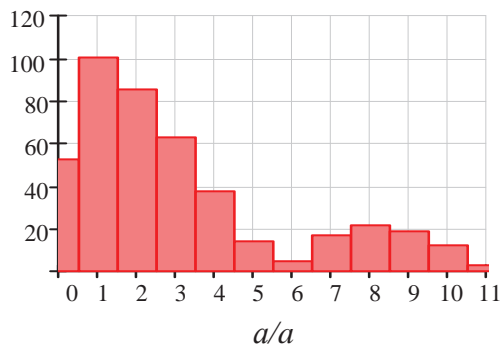


Рис. 5. а) амплитудно-частотный спектр. Зависимость процентов от номера гармоники; б) фазо-частотный спектр. Зависимость градусов от номера гармоники

Fig. 5. a) amplitude-frequency spectrum. Dependence of the percent on harmonic number; b) phase-frequency spectrum. Dependence of the degrees on harmonic number

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin(\omega kt) dt, \quad A_k = a_k + jb_k.$$

Спектр функции и результат ее восстановления по коэффициентам разложения представлены ниже. Число коэффициентов разложения бралось $N=30$. Результат расчета показал, что относительный вклад гармоник выше десятой не превышал десяти процентов от наибольшего вклада и поэтому эти гармоники можно не принимать во внимание (рис. 5).

Рис. 6 демонстрирует хорошее восстановление функции.

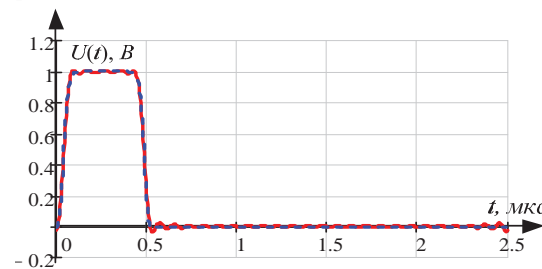
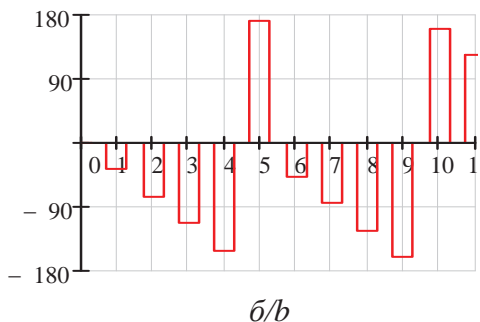


Рис. 6. Зондирующий импульс и результат его восстановления (пунктирная красная кривая)

Fig. 6. A probe pulse and the result of its recovery (dashed red curve)

Постановка задачи для определения частотной зависимости индуктивности и сопротивления витков обмотки

Проведем расчет распределения плотности тока в поперечном сечении проводника с помощью векторного магнитного потенциала. Для этого бу-



дем использовать систему уравнений Максвелла с материальными соотношениями [10–13]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mu \mathbf{B}.$$

Здесь \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{J} – плотность тока; \mathbf{D} – вектор электрического смещения; \mathbf{B} – вектор магнитной индукции; ε – диэлектрическая проницаемость; μ – магнитная проницаемость; σ – проводимость среды.

Перейдем от векторных уравнений Максвелла к скалярному уравнению, введя вспомогательный магнитный потенциал \mathbf{A} . Выбирая соответствующую калибровку, связывающую векторный магнитный потенциал \mathbf{A} с электрическим вектором напряженности \mathbf{E} и магнитной индукцией \mathbf{B} [9, 10]:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

можно получить уравнение для магнитного векторного потенциала

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mathbf{J} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla(\mu^{-1} \nabla \mathbf{A}) = \mathbf{J}.$$

С учетом полоидальной геометрии системы (рис. 7), магнитный потенциал и вектор плотности тока будут иметь по единственной компоненте, ориентированной по угловой координате $\mathbf{A} = \{0, 0, A\}$, $\mathbf{J} = \{0, 0, J\}$. Будем искать решения в гармоническом виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\varphi e^{j\omega t}$. Учитывая, что $J = \frac{\sigma V}{2\pi r}$, и после сокращения на экспоненциальный множитель получаем искомое уравнение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\varphi e^{-j\omega t}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow -j\omega \mathbf{A}$$

$$(j\omega\sigma - \omega^2\varepsilon)\mathbf{A}_\varphi + \nabla(\mu^{-1}\nabla\mathbf{A}_\varphi) = \frac{\sigma V}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi.$$

С учетом калибровки получаем скалярное уравнение Гельмгольца [12, 13] для угловой компоненты векторного потенциала

$$(j\omega\sigma - \omega^2\varepsilon)A_\varphi + \mu^{-1}\Delta A_\varphi = \frac{\sigma V}{2\pi r},$$

где V – напряжения проводника; ω – частота; j – мнимая единица; r – радиус от центра оси окружности цилиндра в поперечном сечении (рис. 1); \mathbf{e}_φ – единичный вектор, ориентированный вдоль угловой координаты.

Плотность тока и ток определяются выражениями:

$$\mathbf{J}_\varphi = \nabla(\mu^{-1}\nabla A_\varphi), \quad I = \pi \int_0^R J_\varphi r^2 dr.$$

Магнитная энергия определяется выражением:

$$W = 2\pi \oint A_\varphi r dr,$$

из которого при известном токе определяется индуктивность с помощью соотношения:

$$L = 2W/I^2.$$

При известном напряжении и токе определяем сопротивление проводника, используя формулу:

$$R = \operatorname{Re}(V/I).$$

Для расчета представленных уравнений использовался математический пакет COMSOL Multiphysics, основанный на методе конечных элементов [14–17].

Результаты расчетов

Результаты расчетов приведены на рис. 7–11.

При известных зависимостях индуктивности и сопротивления от частоты можно определить переходные процессы, происходящие в обмотках трансформатора. Поскольку входной импульс представлен в виде суммы гармоник, расчет проводился с использованием метода наложения. То есть рассчитывались напряжения и токи для каждой гармоники. Затем результаты расчетов токов и напряжений каждой гармоники складывались и получались результирующие токи и напряжения при воздействии зондирующего импульса.

Запишем дифференциальные уравнения для определения напряжений и тока в реактивных элементах схемы замещения для одного витка, приведенной на рис. 2. Для решения дифференциальных уравнений использовался метод пространства состояний, дифференциальное уравнение третьего порядка представлялось в виде системы 3-х уравнений первого порядка [18, 19]. Уравнения рассчитывались численно с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом. Число точек дискретизаций равнялось $N=10^3$. Величины емкостей $C1$ и $C2$ брались из справочника [20] в соответствии с формой кольца.

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L(t, \omega_k)}{dt} \\ \frac{dU_{C1}(t, \omega_k)}{dt} \\ \frac{dU_{C2}(t, \omega_k)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1(\omega_k)}{L(\omega_k)} & \frac{1}{L(\omega_k)} & 0 \\ -\frac{1}{C1} & -\frac{1}{C1r} & -\frac{1}{C1r} \\ 0 & -\frac{1}{C2r} & -\frac{1}{C2rr1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t, \omega_k) \\ U_{C1}(t, \omega_k) \\ U_{C2}(t, \omega_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E(t, \omega_k)}{C1r} \\ \frac{E(t, \omega_k)}{C2 \cdot r} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E(t, \omega_k)$ – гармоническая составляющая входного импульса при фиксированной частоте; $i_L(t, \omega_k)$, $U_{C1}(t, \omega_k)$, $U_{C2}(t, \omega_k)$ – ток, индуктивности, напряжение на первом и втором конденсаторах. Результирующие токи и напряжения представляются в виде ряда:

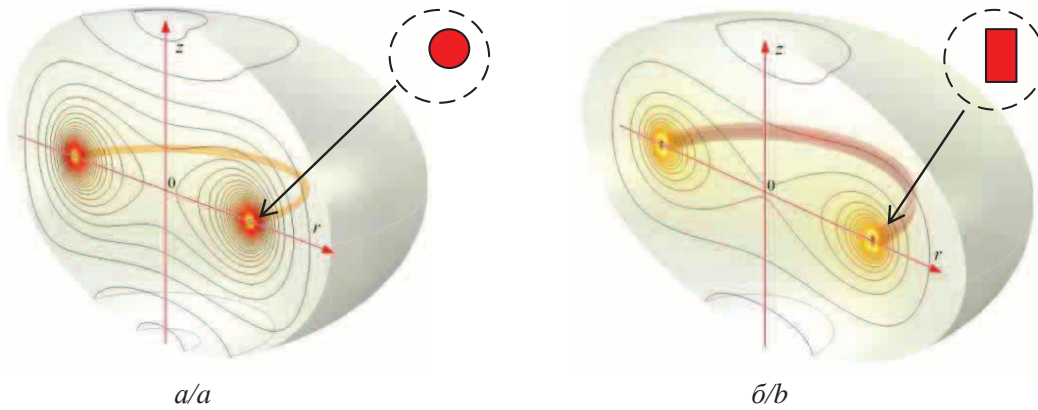


Рис. 7. Изолинии поля распределения магнитного потенциала A_{φ} кольцевых проводников. В верхнем правом углу показана форма сечения кольца при фиксированной частоте ω : а) круглое; б) прямоугольное сечение

Fig. 7. Isolines of distribution field of magnetic potential A_{φ} of circular conductors. In the upper right corner the shapes of the rings section at fixed frequency ω : a) circular; b) rectangular, are shown

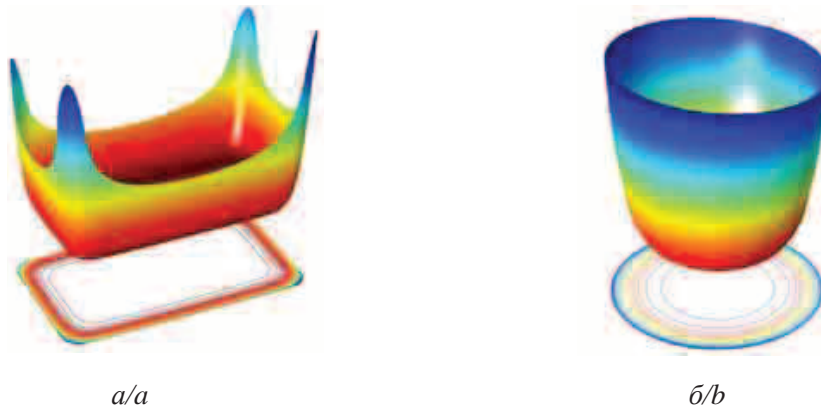


Рис. 8. Относительное распределение плотности тока и картина контурных линий в поперечном сечении проводника при частоте $f=5,4 \cdot 10^5$ Гц: а) для прямоугольного, б) для круглого сечения, соответственно

Fig. 8. Relative distribution of current density and the pattern of contour lines in cross-section of a conductor at frequency of $f=5,4 \cdot 10^5$ Hz for: a) rectangular, b) round, cross sections, respectively

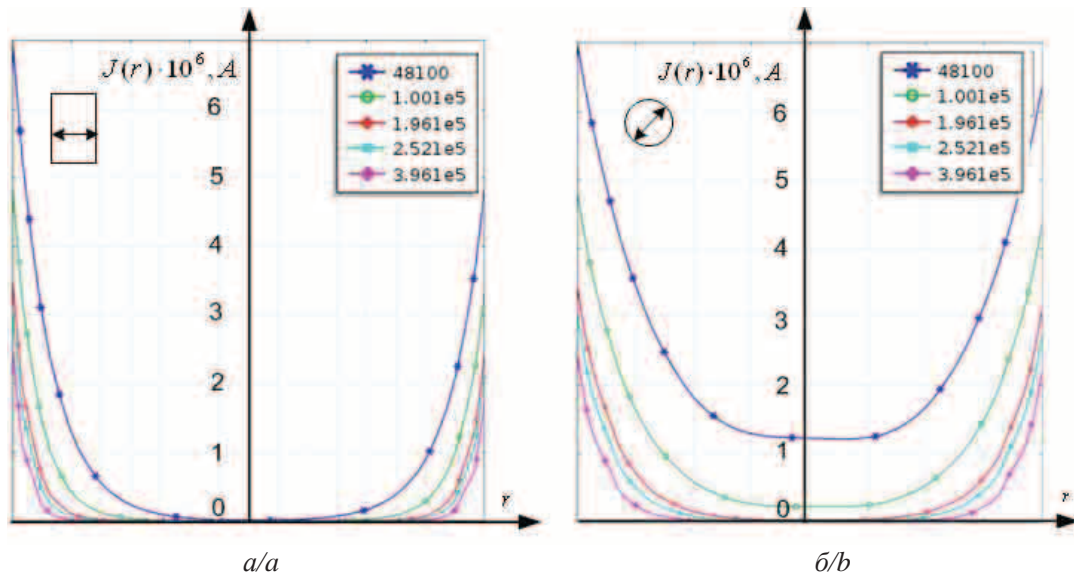


Рис. 9. Распределение плотности тока в поперечном сечении проводника при различных частотах для: а) круглого; б) прямоугольного сечения, соответственно

Fig. 9. Current density distribution in cross-section of the conductor at different frequencies for: a) round; b) rectangular cross section, respectively

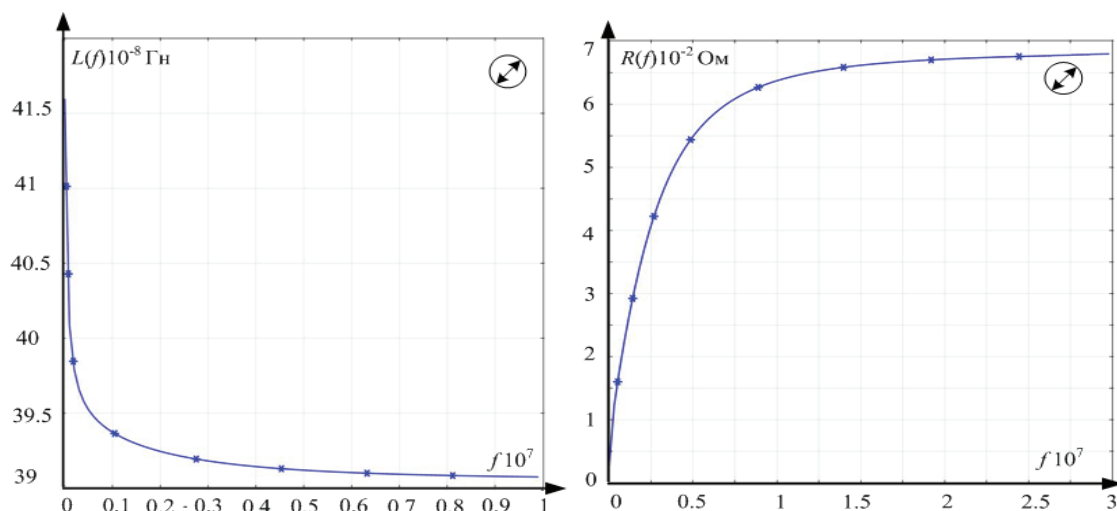


Рис. 10. Частотные зависимости индуктивности $L(f)$ и сопротивления $R(f)$ провода с круглым поперечным сечением

Fig. 10. Frequency dependence of the inductance $L(f)$ and resistance $R(f)$ of wires with circular cross-section

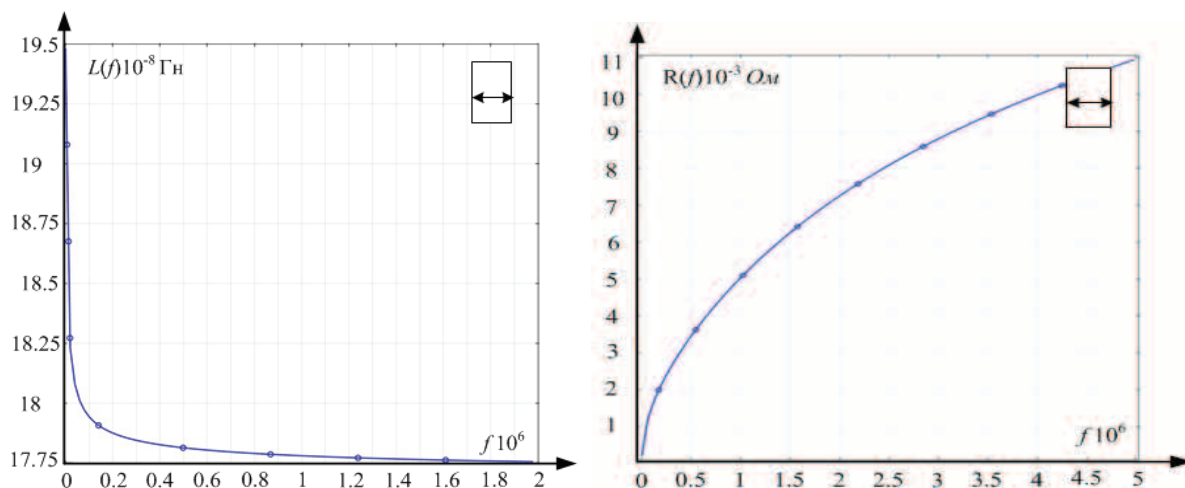


Рис. 11. Частотные зависимости индуктивности $L(f)$ и сопротивления $R(f)$ провода с прямоугольным поперечным сечением

Fig. 11. Frequency dependence of the inductance $L(f)$ and resistance $R(f)$ of wire with a rectangular cross section

$$i_L(t) = \sum_{k=0}^N i_L(t, \omega_k), \quad \omega_k = \omega k = \frac{2\pi}{T} k,$$

$$\omega = 2,53 \cdot 10^6 \text{ рад / с},$$

$$U_{C1}(t) = \sum_{k=0}^N U_{C1}(t, \omega_k), \quad U_{C2}(t) = \sum_{k=0}^N U_{C2}(t, \omega_k),$$

$$U_R(t) = \sum_{k=0}^N i_L(t, \omega_k) R(\omega).$$

Результаты расчетов для провода круглого сечения приведены на рис. 12.

График напряжения на конденсаторе C_1 , он же напряжение на витке, рассчитанный теоретически, удовлетворительно совпадает с экспериментом. Что свидетельствует об удовлетворительности модели.

Для провода с прямоугольным поперечным сечением графические зависимости выглядят аналогично.

Заключение

Авторами предложен алгоритм, позволяющий представить трансформатор в виде электротехнической схемы замещения с распределенными параметрами при его зондировании импульсом наносекундной длительности. Алгоритм включает в себя следующие этапы:

- 1) представление зондирующего импульса наносекундной длительности в виде суперпозиции гармонических волн с различными частотами;
- 2) расчет параметров схемы замещения – индуктивности и сопротивления – с учетом скин-эффекта, т. е. в зависимости от частоты для различных поперечных сечений обмоток трансформатора;
- 3) расчет токов и напряжений схемы замещения для каждой гармоники;
- 4) представление окончательного результата в виде суперпозиции токов и напряжений каждой гармоники.

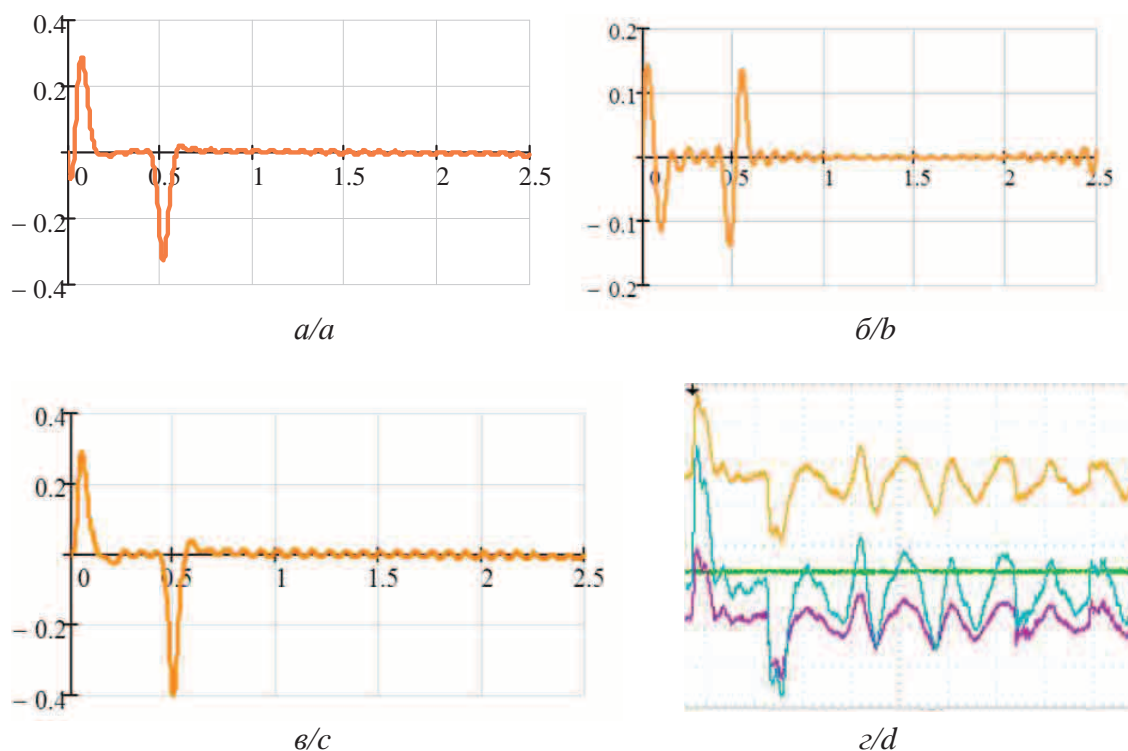


Рис. 12. Напряжение на: а) индуктивности $U_L(t)$ б) активном сопротивлении $U_R(t)$; в) конденсаторе $U_C(t)$; г) экспериментальные осциллограммы напряжений, снятые с помощью отпаек на трех витках при зондировании пробного импульса. На всех рисунках ось ординат – напряжения в вольтах, ось абсцисс – время в микросекундах

Fig. 12. a) inductor $U_L(t)$ b) active resistance $U_R(t)$; c) capacitor $U_C(t)$ voltage; d) experimental waveform of the voltage measured from taps for three turns when the probe pulse is affected. In all figures the Y-axis is in volts, the X-axis is in microseconds

В работе продемонстрировано хорошее согласие теоретических расчетов с экспериментальными результатами.

Авторы благодарят профессора Валерия Александровича Лавриновича за любезно предоставленные экспериментальные данные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Исаев Ю.Н., Старцева Е.В., Щекотуев А.В. Исследование волновых процессов обмоток трансформатора как цепи с распределенными параметрами // Известия ТПУ. – 2015. – Т. 326. – № 8. – С. 27–35.
- Геллер Б., Веверка А. Импульсные процессы в электрических машинах. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
- Геллер Б., Веверка А. Волновые процессы в электрических машинах. – М.: Государственное энергетическое издательство, 1960. – 632 с.
- Ильдарханов Р.Г., Усачев А.Е. Контроль состояния обмоток силовых трансформаторов путем спектрального анализа передаточных функций // Известия вузов. Проблемы энергетики. – 2010. – № 3–4. – С. 38–47.
- Кухаркин Е.С. Основы технической электродинамики. – М.: Высшая школа 1969. – 509 с.
- Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Высшая школа 1996. – 638 с.
- Шимонис К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир 1964. – 773 с.
- Исаев Ю.Н., Купцов А.М. Практика использования системы MathCAD в расчетах электрических и магнитных цепей. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2013. – 180 с.
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 831 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 651 с.
- Демирчан К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. – М.: Высш. шк., 1986. – 239 с.
- Левич В.В. Курс теоретической физики Т. 1. – М.: ФИЗМАТИЗ, 1969. – 659 с.
- Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 340 с.
- Pryor R.W. Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principle Approach. – London: Jones and Bartlett Publishers, LLC, 2009. – 293 p.
- Gallagher R.H. Finite Element Analysis. Fundamentals. – New Jersey: Prentice-Hall, 1975. – 428 p.
- Zitkiewicz O.C. The Finite Element Method in engineering science. – London: MCGRAW-HILL, 1975. – 541 p.
- Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
- Исаев Ю.Н. Системы автоматического управления. – Томск: Изд-во ТПУ, 2013. – 142 с.
- Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1 / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 654 с.
- Иосель Ю.Я, Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 289 с.

Поступила 18.08.2015 г.

UDC 621.3.001.24

CALCULATION OF EQUIVALENT DISTRIBUTED CIRCUIT PARAMETERS OF TRANSFORMER WINDING UNDER THE INFLUENCE OF SKIN EFFECT

Yusup N. Isaev,

National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russia. E-mail: isaev_yusup@mail.ru

Elena V. Startseva,

National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russia. E-mail: s.e.v.75@mail.ru

The relevance of the work. When producing, transporting and processing geo assets it is necessary to use various electrical equipment, the transformers are the main electricity distributors in this case. In some cases it is necessary to route the local electric network to recharge electric power devices for processing geo assets, the transformers are the main units of network as well. The efficiency of electric networks depends on the state of distribution devices – transformers, especially on the condition of the transformer windings. Therefore, the investigation and modeling of the transformer windings are the important tasks. When presenting the transformer windings as a distributed system we need to know the values of the equivalent circuit elements. In the presence of high-frequency currents in the circuit, the skin effect – the dependence of current on frequency – influences the value of equivalent circuit elements. The relevance of the research is caused by the fact that the pulse of nanosecond duration, which spectrum is filled with high frequencies, is used as the probe pulse for the transformer. The high frequency of the probe pulse provokes the skin effect, which, in its turn, contributes the frequency dependence to the value of the equivalent circuit parameters.

The aim of the research is to introduce the probe nanosecond pulse as a superposition of harmonics with different frequencies; to calculate inductance and resistance for the transformer equivalent circuit for each harmonic with fixed frequency, which forms the pulse; to determine the values of inductance and capacitance using the calculation of electromagnetic field and taking into account the skin effect as well. The energy of the calculated electromagnetic field allows retrieving the inductance and resistance values of the investigated system at the fixed frequency. To get the resulting equivalent circuit, which consists of combined circuits, obtained for each frequency separately, using superposition principle; to obtain voltage and currents of equivalent circuit of transformer windings and compare them with the experimental data.

Method of investigation is based on superposition principle, which means the expansion of arbitrary functions to the Fourier series. The authors use as well the numerical solution of partial differential equations – Helmholtz equation using the finite element method. To implement the method of finite elements the mathematical package COMSOL Multiphysics was used.

Results. The authors carried out frequency decomposition of nanosecond pulse and use it as a probe signal for transformer diagnosis. Based on the solution of Maxwell's equations the spatial distribution pattern of the magnetic vector potential was obtained. To extract the information on the inductance and resistance of the equivalent circuit of transformer winding the vector magnetic potential was used. The authors obtained the graphs of inductance and resistance of equivalent circuit for the transformer winding as a function of frequency. Graphical dependences are given for a variety of cross-sections of the transformer windings: round and rectangular shapes. Based on the obtained graphical dependencies the equivalent circuits of the transformer windings with the possible influence of the skin effect were built. The paper introduces the calculations of voltage and current of transformer windings using the equivalent circuit, as well as the results of comparison of theoretical calculations with the experimental ones.

Key words:

Transformer winding, probe pulse, frequency spectrum, distributed parameters, Helmholtz equation, skin effect, state-space equation.

The authors thank professor Valery Aleksandrovich Lavrinovich for the experimental data.

REFERENCES

1. Isaev Yu.N., Startseva E.V., Schekotuev A.V. Issledovanie volnovykh protsessov obmotok transformatora kak tsepi s raspredelitelnyimi parametrami [Investigation of transformer windings wave processes as a distributed electric circuit]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2015, vol. 326, no. 8, pp. 27–35.
2. Heller B., Veverka A. *Volnovye protsessy v elektricheskikh mashinakh* [Wave processes in electric machines]. Moscow, Gosudarstvennoe energeticheskoe izdatelstvo, 1960. 632 p.
3. Heller B., Veverka A. *Impulsnye protsessy v elektricheskikh mashinakh* [Switching in electric machines]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 440 p.
4. Ildarkhanov R.G., Usachyov A.E. Kontrol sostoyaniya obmotok silovykh transformatorov putem spektralnogo analiza peredachnykh funktsii [Control of winding state in power transformers by spectral analysis of transfer function]. *Izvestiya vuzov. Problemy energetiki*, 2010, no. 3–4, pp. 38–47.
5. Kukharkin E.S. *Osnovy tekhnicheskoy elektrodinamiki* [Background of technical electrodynamics]. Moscow, Visshaya shkola Publ., 1969. 509 p.
6. Bessonov L.A. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Elektricheskie tsepi* [Theoretical bases of electrical engineering. Electric circuits]. Moscow, Visshaya shkola Publ., 1996. 639 p.
7. Shimonis K. *Teoreticheskaya elektrotekhnika* [Theoretical electrical engineering]. Moscow, Mir Publ., 1964. 773 p.
8. Isaev Yu.N., Kuptsov A.M. *Praktika ispolzovaniya sistemy MAT-KAD v raschetakh elekticheskikh i magnitnykh tsepey* [The practice of using of MathCAD to calculate electric and magnetic circuits]. Moscow, SOLON-PRESS, 2013. 180 p.
9. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 831 p.
10. Landau L.D., Lifshits E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005. 651 p.

11. Demirchan K.S., Chechurin V.L. *Mashinnye raschety elektromagnitnykh poley* [Computing electromagnetic fields]. Moscow, Visshaya shkola Publ., 1986. 239 p.
12. Levich V.V. *Kurs teoreticheskoy fiziki* [Course of Theoretical physics]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1969. Vol. 1, 659 p.
13. Bredov M.M., Rumyantsev V.V., Toptygin I.N. *Klasicheskaya elektrodinamika* [Classical electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 340 p.
14. Pryor R.W. *Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principle Approach*. London, Jones and Bartlett Publishers, LLC, 2009. 293 p.
15. Gallaher R.H. *Finite Element Analysis. Fundamentals*. New Jersey, Prentice-Hall, 1975. 428 p.
16. Zitbkiewicz O.C. *The Finite Element Method in engineering science*. London, MCGRAW-HILL, 1975. 541 p.
17. Strang G., Fix G. *Teoriya metoda konechnykh elementov* [An analysis of the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1973. 349 p.
18. Isaev Yu.N. *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya* [Automated control systems]. Tomsk, TPU Publ. house, 2013. 142 p.
19. *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of classic and modern automated control theory]. Eds. K.A. Pupkov, N.D. Egupov. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Press, 2004. V. 1, 654 p.
20. Yosel Yu.Ya., Kochanov E.S., Strunsky M.G. *Raschet elektricheskoy emkosti* [Calculation of electric capacitance]. Leningrad, Energoizdat Publ., 1981. 289 p.

Received: 18 August 2015.