Я. И. Николинъ.

Преподаватель Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II.

ГРАФИЧЕСКІЕ МЕТОДЫ

РАЗСЧЕТА

ВОДОСНАБЖЕНІЯ и КАНАЛИЗАЦІИ.

ЧАСТЬ I.

Теорія и примѣненія способа сопряженныхъ масштабовъ.

Съ 14 таблицами чертежей.

ТОМСКЪ.

Типо-Литографія Сиб. Т—ва. Печ. Дѣла. Уг. Ямского пер. и Дворянской ул. собств. домъ.

1911.

„Признавая допустимымъ и полезнымъ при проектированіи водостоковъ пользованіе графическими разсчетами, желательно имѣть графическія таблицы, приспособленныя къ непосредственному рѣшенію по нимъ задачъ.“ *Постановленіе VIII Русскаго Водопроводнаго Съѣзда 1907 года.*

I. Графическіе способы разсчета трубопроводовъ.

Задачи, относящіяся къ движенію воды въ трубахъ и водостокахъ, разрѣшаются при посредствѣ ряда формулъ, выработанныхъ различными учеными на основаніи опытовъ, наблюденій и теоретическихъ соображеній.

Количество такихъ формулъ, какъ извѣстно, весьма значительно. Флиннъ, въ своемъ сочиненіи „Движеніе воды въ оросительныхъ каналахъ и т. д.“ приводитъ 18 формулъ, употребляемыхъ одновременно какъ для трубъ, такъ и для каналовъ, и 19 формулъ, примѣняемыхъ спеціально къ трубамъ, всего 37 формулъ. Но этотъ перечень нельзя считать исчерпывающимъ, такъ какъ въ него не включены нѣкоторыя изъ формулъ, примѣнявшихся на континентѣ Европы, и, конечно, не попали новыя формулы, появившіяся послѣ выхода его книги. Къ настоящему времени число формулъ, относящихся къ движенію воды въ трубахъ, несомнѣнно, больше пятидесяти.

Въ предлагаемой статьѣ мы будемъ имѣть дѣло только съ движеніемъ воды въ водопроводныхъ трубахъ и водостокахъ, называя тѣ и другіе совмѣстно трубопроводами. При этомъ, по существу дѣла, мы можемъ говорить вначалѣ только о движеніи въ трубопроводахъ круглаго сѣченія, т. е. трубахъ, работающихъ при совершенномъ наполненіи, а затѣмъ, разработавъ вопросъ въ этомъ направленіи, выяснимъ и тѣ измѣненія, которыя вводятся въ примѣненіи къ трубопроводамъ иного сѣченія при разныхъ степеняхъ наполненія.

Основаніемъ для всѣхъ формулъ, опредѣляющихъ движеніе воды въ трубахъ, служитъ уравненіе, получаемое непосредственно изъ выраженія равновѣсія жидкости, находящейся въ установившемся равномѣрномъ движеніи по руслу какого угодно сѣченія,

$$h-h_0=\frac{\varphi}{\gamma}\cdot\frac{P}{\Omega}\cdot L\,, \qquad (1)$$

гдѣ Ω—площадь живого сѣченія русла, въ данномъ случаѣ трубы;

P—смачиваемый периметръ;

L—длина разсматриваемаго участка трубы;

h и h_0—потери напора въ концѣ и началѣ этого участка;

φ—величина гидравлическихъ сопротивленій на единицу площади стѣнки;

γ—вѣсъ единицы объема воды.

Обозначая отношеніе $\frac{h-h_0}{L}$, потерю напора на единицу длины или гидравлическій уклонъ, черезъ i, а отношеніе $\frac{\Omega}{P}$, гидравлическій радіусъ, черезъ ρ, получаемъ

$$i=\frac{\varphi}{\gamma\rho}\,. \qquad (2)$$

Величина φ мѣняется съ измѣненіемъ нѣсколькихъ факторовъ, характеризующихъ движеніе: скорости движенія, гидравлическаго радіуса и уклона и состоянія стѣнокъ трубы. Учитывая вліяніе этихъ факторовъ на основаніи опытовъ и наблюденій и выражая величину φ въ видѣ функцій скорости v съ коеффиціентами, постоянными или же представляющими функціи другихъ факторовъ, различные изслѣдователи выработали свои формулы для движенія воды въ трубахъ. Но такъ какъ при этомъ одни стремились, въ видахъ точности, выразить вліяніе каждаго фактора отдѣльно, другіе, въ видахъ простоты, старались искусственно свести всѣ вліянія къ воздѣйствію одного фактора, то изъ вышеуказаннаго единаго основанія получился рядъ формулъ, весьма различныхъ по формѣ, составу перемѣнныхъ, сложности и удобству примѣненія.

Формулы для движенія воды въ трубахъ могутъ быть классифицированы, съ одной стороны—по составу факторовъ, въ зависимость отъ которыхъ поставлена величина φ, а слѣдовательно и пропорціональная ей величина i, съ другой—по формѣ, въ которой выражена зависимость этихъ величинъ отъ указанныхъ факторовъ, въ особенности отъ скорости.

Въ отношеніи состава формулъ нужно сказать, что факторомъ, вліяніе котораго выражается всѣми безъ исключенія формулами, является скорость v. Поэтому всѣ формулы (за исключеніемъ только формулы Дю-Бюа, не имѣвшей практическаго приложенія) могутъ быть приведены къ виду

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \rho i = bv^2 \ . \qquad (3)^{1)}$$

Коеффиціентъ b, являясь функціей факторовъ, характеризующихъ движеніе, въ различныхъ формулахъ представляетъ десять разныхъ комбинацій состава этихъ факторовъ, а именно:

1) $b = const.$ (напримѣръ, формулы Шези—Эйтельвейна, Дюпюи, Бердмора.

2) $b = f_1\ (v)$ (формулы Прони, Вейсбаха, Сенъ-Венана);

3) $b = f_2\ (\rho)$ (формула Дарси);

4) $b = f_3\ (\rho, n)$ (формулы Леви, Гангилье-Куттера старая и сокращенная, Кнауффа, Маннинга, Базена);

5) $b = f_4\ (\rho,\ n_1,\ n_2)$ (формулы Дарси-Базена, Франка);

6) $b = f_5\ (\rho,\ i)$ (формула Невиля);

7) $b = f_6\ (\rho,\ v,\ n)$ (формулы Смита, Лампе, Лампе-Линдлея, Фламана)

8) $b = f_7\ (\rho,\ i,\ n)$ (формула Гангилье-Куттера полная);

9) $b = f_8\ (\rho,\ v,\ \theta)$ (формула Гагена);

10) $b = f_9\ (\rho,\ r,\ n_1,\ n_2)$ (формулы Анвина, Траппа, Вестона).

Въ этихъ выраженіяхъ подъ n, n_1, n_2 разумѣются элементы формулъ (коеффиціенты или показатели), выражающіе зависимость движенія отъ состоянія стѣнокъ трубы; θ обозначаетъ коеффиціентъ въ формулѣ Гагена, зависящій отъ температуры.

Большій интересъ представляетъ для насъ другая классификація формулъ движенія воды въ трубахъ—по виду функціи, выражающей зависимость величинъ φ и i отъ скорости v. Въ этомъ отношеніи можно раздѣлить данныя формулы на пять видовъ:

1) φ и произведеніе ρi выражаются функціей v вида mv_2, гдѣ $m = const.$ (формулы Шези-Эйтельвейна, Дюпюи, Бердмора); при этомъ уравненіе (3) принимаетъ видъ:

$$\frac{\varphi}{v} = \rho i = mv^2 \ , \qquad (3')$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{1}{m}}\ \sqrt{\rho i} = k\ \sqrt{\rho i}\ , \qquad (4)$$

гдѣ k (коеффиціентъ скорости)$= const.$

2) φ и ρi выражаются функціей v вида $m_1 v^2$, гдѣ m_1—функція ρ и i, въ отдѣльности или совмѣстно, и коеффиціентовъ шероховато-

---

[1]) Этотъ общій видъ формулъ движенія воды представляется мнѣ вообще болѣе выразительнымъ и болѣе удобнымъ для анализа, нежели формула Шези.

сти (формулы Невиля, Дарси, Дарси-Базена, Леви, Франка, Гангилье Куттера всѣ, Кнауффа, Маннинга, Базена); при этомъ

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=m_1\ v^2\ , \tag{3''}$$

$$v=\sqrt{\frac{1}{m_1}}\ \sqrt{\rho i}\ =k_1\sqrt{\rho i}\ , \tag{4'}$$

гдѣ $k_1=f_1\ (\rho,\ i,\ n)$.

3) φ и ρi выражаются функціей v вида $pv+qv^2$, гдѣ $p-const.$ или функція ρ, а $q-const.$ (или также функція ρ—Гагенъ). (формулы Прони, Гагена).

При этомъ изъ уравненія (2) получается

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=pv+qv^2\ , \tag{5}$$

откуда

$$\rho i=\left(\frac{p}{v}+q\right)\ v^2\ , \tag{3'''}$$

$$v=\sqrt{\frac{1}{q+\frac{p}{v}}}\ \sqrt{\rho i}=k_2\ \sqrt{\rho i}\ , \tag{4''}$$

гдѣ $k_2=f_2\ (v,\ \rho)$.

4) φ и ρi выражаются функціей v вида $pv^{\frac{3}{2}}+qv^2$, гдѣ $p-const.$ или функція ρ (и коеффиціентовъ шероховатости), а $q-const.$ (формулы Вейсбаха, Смита, Вестона). Такимъ образомъ

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=pv^{\frac{3}{2}}+qv^2\ , \tag{5'}$$

откуда

$$\rho i=\left(\frac{p}{\sqrt{v}}+q\right)\ v^2\ , \tag{3^{iv}}$$

$$v=\sqrt{\frac{1}{q+\frac{p}{\sqrt{v}}}}\ \sqrt{\rho i}=k_3\ \sqrt{\rho i}\ , \tag{4'''}$$

гдѣ $k_3=f_3\ (v,\ \rho,\ n)$.

5) φ и ρi выражаются функціей v вида $m_2\ v^z$, гдѣ m_2—логарифмическая функція ρ (иногда также i—Сенъ-Венанъ) и коеффиціента ше-

роховатости, $z=const.$ (формулы Анвина, Траппа, Лампе, Лампе-Линдлея, Фламана).

Изъ уравненія (2) получается

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=m_2 v^z\ , \tag{6}$$

$$v=\frac{(\rho i)^{\frac{1}{z}}}{m_2^{\frac{1}{z}}}\ . \tag{7}$$

Эти выраженія могутъ быть сведены къ виду (3) или (4):

$$\rho i=m_2\ v^z=(m_2\ v^{z-2})\ v^2\ , \tag{3'}$$

$$v=\frac{(\rho i)^{\frac{1}{z}}}{m_2^{\frac{1}{z}}}=\frac{(\rho i)^{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}}}{m_2^{\frac{1}{z}}}(\rho i)^{\frac{1}{2}}=k_4\ \sqrt{\rho i}\ , \tag{4'}$$

гдѣ $k_4=f_4\ (\rho,\ i,\ n)$.

Послѣднее подраздѣленіе формулъ характерно съ точки зрѣнія ихъ простоты и удобства примѣненія.

Наиболѣе простыми являются формулы перваго типа. Благодаря этому, онѣ первыми получили практическое примѣненіе и продолжаютъ отчасти употребляться до настоящаго времени, въ особенности для предварительныхъ подсчетовъ. Но, представляя величину гидравлическихъ сопротивленій въ видѣ одночленной функціи одной только скорости и не учитывая вліянія другихъ факторовъ, эти формулы не могутъ выражать даже приблизительно общихъ условій движенія воды. Онѣ даютъ надежные результаты только въ узкихъ предѣлахъ, соотвѣтствующихъ условіямъ опытовъ, которые послужили для установленія коеффиціента той или другой формулы.

Недостаточная точность и общность формулъ перваго типа и выясненное опытами серьезное вліяніе на величину гидравлическихъ сопротивленій, кромѣ скорости, также гидравлическаго радіуса и состоянія стѣнокъ трубы, заставили изслѣдователей усложнить формулы движенія воды введеніемъ элементовъ, выражающихъ вліяніе этихъ послѣднихъ факторовъ, въ разныхъ комбинаціяхъ. При этомъ получились формулы послѣдующихъ четырехъ типовъ.

Изъ нихъ формулы второго, третьяго и четвертаго типа, отличаясь другъ отъ друга по составу перемѣнныхъ, представляютъ сходство въ томъ отношеніи, что въ тѣхъ и другихъ коеффиціенты сопротивле-

нія и скорости b и k выражаются функціей одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ и при томъ многочленнаго, *нелогарифмическаго вида.*

Формулы этихъ трехъ типовъ явились на смѣну формулъ съ постояннымъ k. Число ихъ весьма значительно, и, какъ извѣстно, онѣ до настоящаго времени пользуются если не исключительнымъ, то, во всякомъ случаѣ, преобладающимъ распространеніемъ въ приложеніи къ практикѣ. Эти формулы охватываютъ случаи движенія воды гораздо шире и точнѣе, и, по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ нихъ, даютъ результаты, достаточно близкіе къ дѣйствительности въ предѣлахъ практическаго примѣненія. Но пользованіе ими связано съ однимъ неудобствомъ—сложностью и утомительностью вычисленія многочленныхъ формулъ. При массовыхъ подсчетахъ, неизбѣжныхъ въ дѣлѣ водоснабженія и канализаціи, это неудобство ведетъ къ затратѣ лишняго времени и оказывается настолько серьезнымъ, что нѣкоторыя формулы именно въ силу этого не находятъ примѣненія (какъ съ другой стороны многія формулы съ постояннымъ коеффиціентомъ лишь потому удерживаются въ практикѣ, что онѣ облегчаютъ выкладки, хотя бы даже въ ущербъ точности).

Формулы пятаго типа отличаются отъ предшествующихъ тѣмъ, что онѣ имѣютъ *логарифмическій видъ.* Это обстоятельство, конечно, серьезно облегчаетъ пользованіе ими. Формулы эти появились значительно позднѣе; число ихъ не велико, а извѣстность и распространеніе, благодаря установившейся репутаціи болѣе старыхъ формулъ многочленнаго вида, пока не такъ велики, какъ было бы желательно. Однако несомнѣнныя преимущества въ отношеніи пользованія ими, при достаточной точности, обращаютъ на нихъ серьезное вниманіе спеціалистовъ и за послѣдніе годы постепенно расширяютъ кругъ ихъ примѣненія. Эти именно формулы и ихъ преобразованія въ графической формѣ и будутъ составлять предметъ настоящей статьи.

Мы указали, что крупное неудобство формулъ типовъ, наиболѣе употребительныхъ въ настоящее время, состоитъ въ томъ, что онѣ имѣютъ многочленную форму, неподдающуюся логариѳмированію. Многочленный видъ этихъ формулъ объясняется основнымъ принципомъ, положеннымъ въ основаніе этихъ формулъ. Принципъ этотъ (доказанный теоретически Буссинескомъ въ его „Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides") состоитъ въ слѣдующемъ.

Зависимость величины гидравлическихъ сопротивленій отъ скорости можетъ быть выражена въ формѣ уравненія (3):

$$\frac{\varphi}{\gamma}=pi=bv^2 \quad , \tag{3}$$

при чемъ коеффиціентъ, обозначенный черезъ b, измѣняется въ обратномъ отношеніи съ величинами v и ρ такимъ образомъ, что онъ можетъ быть довольно точно выраженъ функціей вида

$$b=\alpha\left(1+\frac{\beta}{\rho}+\frac{\beta_1}{v}\right). \tag{8}$$

Этотъ принципъ примѣнимъ одинаково къ движенію воды *какъ въ трубахъ, такъ и въ водныхъ потокахъ*. Гидравлики середины прошлаго вѣка положили этотъ принципъ въ основу при разработкѣ своихъ формулъ. При этомъ они понимали значеніе неудобствъ, вносимыхъ многочленностью выраженія (8) при практическомъ приложеніи, но могли сдѣлать только одно—сократить число членовъ исключеніемъ одного изъ нихъ. Такъ Прони отбросилъ второй членъ $\frac{\beta}{\rho}$, а Дарси и Базенъ, напротивъ, третій $\frac{\beta_1}{v}$. Но эти первоначальныя формулы и проистекшія изъ нихъ, путемъ измѣненія характера отдѣльныхъ членовъ, позднѣйшія остались всетаки двучленными, а нѣкоторыя приняли еще болѣе сложный видъ.

Между тѣмъ позднѣйшія изслѣдованія, а также опыты Базена показали, что въ тѣхъ случаяхъ, когда гидравлическій радіусъ невеликъ, и стѣнки русла потока гладки или слегка шероховаты, въ частности въ случаѣ теченія по трубамъ, съ уменьшеніемъ гидравлическаго радіуса и шероховатости, законъ движенія воды приближается къ закону Пуазеля, относящемуся къ движенію по капиллярнымъ трубкамъ.

Результаты опытовъ Пуазеля, которые были опубликованы въ 1846 году, сводятся къ тому, что въ примѣненіи къ капиллярнымъ трубкамъ, т. е. такому случаю движенія по трубамъ, когда гидравлическія сопротивленія сводятся цѣликомъ или главнымъ образомъ къ внѣшнему тренію (о стѣнки трубы), существуетъ очень опредѣленная зависимость между величиной этихъ сопротивленій, діаметромъ трубы (или ея гидравлическимъ радіусомъ) и скоростью. Эта зависимость выражена Пуазелемъ въ видѣ формулы:

$$i=\frac{p}{k}\cdot\frac{v}{D^2}, \tag{9}$$

гдѣ

i—гидравлическій уклонъ,

D и v—діаметръ и скорость,

k—числовой коеффиціентъ,

p—коеффиціентъ вязкости жидкости, зависящій отъ температуры по формулѣ:

$$p=\frac{1}{1+0{,}03368\ \theta+0{,}000221\ \theta^2}\ , \tag{10}$$

гдѣ θ—температура по C.

Формула (9) можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ:

$$i=\frac{p}{16\ k}\cdot\frac{v}{\rho^2}=\frac{\alpha v}{\rho^2}\ ,$$

гдѣ

ρ—по прежнему, гидравлическій радіусъ;

α—коеффиціентъ, пропорціональный p, при постоянной температурѣ *const*.

$$\rho i=\frac{\alpha v}{\rho}\ , \tag{11}$$

или, сопоставляя съ (2),

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=\frac{\alpha v}{\rho}\ . \tag{11'}$$

Приводя эту формулу къ виду (3), получаемъ

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=\frac{\alpha}{\rho v}\cdot v^2=b_1\ v^2\ . \tag{12}$$

Такимъ образомъ для даннаго частнаго случая движенія въ выраженіе коеффиціента, соотвѣтствующаго b въ формулѣ (3), такъ же какъ и въ формулу (8), входятъ величины $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{v}$, но не въ формѣ многочлена, а въ формѣ произведенія $\frac{1}{\rho v}$.

Производя наблюденія надъ прямоугольнымъ каналомъ шириною въ 0,10 метра, Базенъ нашелъ, что въ предѣлахъ его опытовъ коеффиціентъ b формулы (3) можетъ считаться пропорціональнымъ $^1/_2$ степени того же произведенія $\frac{1}{\rho v}$, т. е. можетъ быть выраженъ формулой

$$b=\frac{\alpha}{(\rho v)^{\frac{1}{2}}}\ . \tag{13}$$

Это соотношеніе оставалось правильнымъ и для тѣхъ случаевъ, когда стѣнки канала дѣлались шероховатыми путемъ покрытія грубой тканью.

Обобщая результаты указанныхъ опытовъ, нѣкоторые изслѣдователи (Сенъ-Венанъ, Фламанъ) пришли къ выводу, что какъ для движенія воды въ капиллярныхъ трубкахъ, такъ и для движенія въ трубахъ вообще коэффиціентъ b можетъ быть выраженъ функціей произведенія $\frac{1}{\rho v}$, въ которой это произведеніе фигурируетъ въ видѣ нѣкоторой степени, съ показателемъ, измѣняющимся между 0 (въ предѣлѣ) и 1 (для капиллярныхъ трубокъ). Другими словами, для всѣхъ случаевъ движенія воды въ трубахъ можетъ быть примѣняема формула:

$$b=\frac{\alpha_0}{(\rho v)^z}, \qquad (14)$$

гдѣ $0<z<1$.

Шероховатость, которая въ среднемъ встрѣчается въ водопроводныхъ трубахъ, меньше, чѣмъ при упомянутомъ выше покрытіи стѣнокъ канала при опытахъ Базена; съ другой стороны теченіе въ трубахъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, болѣе спокойно, нежели въ открытомъ каналѣ тѣхъ же размѣровъ. Поэтому можно думать, что для случаевъ движенія воды въ обыкновенныхъ водопроводныхъ трубахъ показатель степени въ выраженіи

$$b=\frac{\alpha_0}{(\rho v)^z} \qquad (14)$$

долженъ находиться въ предѣлахъ между 0 и $\frac{1}{2}$ [1]).

Какъ бы то ни было, оказалось, что законъ движенія воды въ *трубахъ* можетъ быть выраженъ не только формулами (3) и (8), охватывающими его вмѣстѣ съ движеніемъ въ открытыхъ руслахъ, но

[1]) Приведенный типъ выраженія для b нельзя, однако, считать безспорнымъ. Возведеніе $\frac{1}{v}$ въ степень (кромѣ первой), при переходѣ къ коэффиціенту скорости k, ставитъ его въ зависимость отъ v, что противорѣчитъ опытамъ Дарси и вѣскимъ теоретическимъ соображеніямъ, высказаннымъ М. Леви. Самъ Базенъ, повидимому, не раздѣлялъ мнѣнія лицъ, использовавшихъ его опыты для созданія формулы (14) и ея производныхъ, такъ какъ его собственная формула, данная имъ уже въ 1897 году, сохраняетъ двучленную форму и зависимость k только отъ ρ. Тѣмъ не менѣе формулы, въ основу построенія которыхъ положенъ указанный принципъ, хорошо покрываютъ данныя опыта и, въ соединеніи съ незамѣнимой простотой и удобствомъ пользованія, представляютъ высокую цѣнность. Занимаясь вопросомъ о предѣлахъ примѣнимости существующихъ формулъ для движенія воды въ трубахъ, я пришелъ къ другому выраженію для b, также логарифмическаго вида, но свободному отъ указанныхъ несоотвѣтствій и къ очень простой формулѣ для скорости, хорошо согласующейся съ дѣйствительностью. Эту формулу, съ относящимися къ ней таблицами, діаграммами и соображеніями, я предполагаю опубликовать въ слѣдующемъ выпускѣ настоящей работы.

также, и при томъ съ бо̀льшимъ вѣроятіемъ, формулами, аналогичными относящимся къ движенію воды въ капиллярныхъ трубкахъ, именно:

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=b_1 v^2 , \tag{3}$$

$$b_1=\frac{\alpha_0}{(\rho v)^z} , \tag{14}$$

откуда получается соотношеніе

$$\frac{\varphi}{\gamma}=\rho i=\frac{\alpha_0}{(\rho v)^z} . v^2 . \tag{15}$$

Мы видимъ, что это соотношеніе, въ противоположность уравненіямъ, исходящимъ изъ выраженія (8), имѣетъ одночленный и логарифмическій видъ. Оно и послужило основаніемъ для нѣсколькихъ *логарифмическихъ* формулъ для движенія воды въ трубахъ.

Формулы логарифмическаго вида для рѣшенія гидравлическихъ задачъ нашли себѣ къ настоящему времени довольно широкое примѣненіе въ Англіи и Америкѣ. Первыя же попытки введенія ихъ въ практику явились почти одновременно во Франціи, Германіи и Англіи.

Сенъ-Венанъ въ своемъ трудѣ „Formules et tables nouvelles etc." (1851) предложилъ формулу:

$$v=n \ (Di)^{\frac{7}{12}} , \tag{16}$$

гдѣ

D—діаметръ трубы,

n—постоянный коеффиціентъ,

и разработалъ таблицы, облегчающія примѣненіе ея. Но его попытка ввести эту формулу въ употребленіе не имѣла того успѣха, котораго она заслуживала. Послѣ него такая попытка не повторялась во Франціи до появленія формулы Фламана.

Въ Германіи Гагенъ предложилъ въ 1853 году одночленную формулу, подобную формулѣ Сенъ-Венана, но съ разными показателями для i и D и съ другимъ коеффиціентомъ n. Но и на нѣмецкой почвѣ эта попытка также не имѣла успѣха, тѣмъ болѣе, что самъ Гагенъ позднѣе перешелъ къ формулѣ двучленнаго вида.

Осбёрнъ Рейнольдсъ, сравнивая результаты различныхъ опытовъ, пришелъ къ заключенію, что величина гидравлическихъ сопротивленій при

движеніи по трубамъ пропорціональна не второй степени v, какъ это принято въ формулѣ (3), а нѣкоторой степени v^z, показатель которой измѣняется сообразно степени шероховатости стѣнокъ. По его мнѣнію, этотъ показатель равенъ, напримѣръ, 1,7 для трубъ съ очень гладкими стѣнками, 1,722 для свинцовыхъ трубъ и достигаетъ 2 только при очень шероховатыхъ стѣнкахъ.

На основаніи этихъ соображеній, проф. Анвинъ (Unwin) предложилъ слѣдующую формулу:

$$i=n\frac{v^z}{D^{3-z}}\ , \tag{17}$$

гдѣ n и z—перемѣнныя. Это послѣднее количество, фигурирующее въ показателяхъ v и D, принимается отъ 1,79 до 2,00 для чугунныхъ трубъ, въ общемъ согласно съ указаніями Рейнольдса.

Нужно замѣтить, что формула Анвина

$$i=n\frac{v^z}{D^{3-z}} \tag{17}$$

вполнѣ сводится къ общему виду, выражаемому формулой (15). Въ самомъ дѣлѣ, она можетъ быть представлена въ видѣ:

$$Di=n\frac{v^z}{D^{2-z}}=n\frac{1}{(Dv)^{2-z}}\cdot v^2\ , \tag{17'}$$

который соотвѣтствуетъ (15).

Формула Анвина получила довольно широкое примѣненіе въ Англіи, и по ея типу было составлено дальнѣйшими изслѣдователями нѣсколько новыхъ формулъ, отличающихся отъ первоначальной величинами n и z. Такова, напримѣръ, формула Траппа (Thrupp)

$$i=n\frac{v^z}{D^{0,6616z}}\ , \tag{18}$$

въ которой z измѣняется отъ 1,70 до 2,00 Она совпадаетъ съ предшествующей, когда $z=1,86$, т е. когда сопротивленіе имѣетъ приблизительно среднюю величину.

Въ связи съ формулой Анвина явилась также формула Фосса

$$Di=\frac{n}{\sqrt[6]{D^2v}}\,v^2\ , \tag{18'}$$

иначе

$$i=\frac{n\ v^{1,84}}{D^{1,33}} \tag{18''}$$

и формула Маннинга:

$$Di = \frac{n}{\sqrt{D}} v^2 \qquad (18''')$$

или

$$i = \frac{nv^2}{D^{1,5}} . \qquad (18^{IV})$$

Въ 1873 году проф. д-ръ Лампе, на основаніи сравненія какъ своихъ, такъ и предшествующихъ опытовъ, предложилъ логарифмическую формулу:

$$D^{1,25} i = n \; v^{1,802} . \qquad (19)$$

Объ этой формулѣ мы будемъ впослѣдствіи говорить болѣе подробно. Пока же укажемъ, что она также, при небольшомъ измѣненіи, можетъ быть сведена къ виду (15). Именно, если мы вмѣсто показателя 1,25 возьмемъ 1,20, а вмѣсто 1,802 1,80, то получимъ:

$$D^{1,20} i = nv^{1,80} , \qquad (19')$$

$$D^{\frac{6}{5}} i = n v^{\frac{9}{5}} ,$$

$$Di = n \frac{1}{(Dv)^{\frac{1}{5}}} v^2 , \qquad (19'')$$

что вполнѣ соотвѣтствуетъ выраженію (15). Формула Лампе, какъ увидимъ дальше, заслуживаетъ серьезнаго вниманія. Она имѣетъ нѣкоторый кругъ распространенія въ Германіи, а также, по почину г. Линдлея, который ввелъ въ нее небольшое измѣненіе (формула Лампе—Линдлея), и проф. Н. К. Чижова, у насъ въ Россіи.

Позднѣе Meissner предложилъ формулу

$$i = \frac{n_1 \; v^{1,833}}{D^{1,33}} , \qquad (19''')$$

которая, очевидно, составлена по образцу формулы Лампе, съ небольшимъ измѣненіемъ показателей и коеффиціента.

Въ 90-хъ годахъ проф. Фламанъ нашелъ, что болѣе соотвѣтствуетъ результатамъ наблюденій вмѣсто показателя $\frac{1}{5}$ въ формулѣ (19'') показатель $^1/_4$. Онъ нашелъ это тѣмъ болѣе удобнымъ, что корень 4 степени, въ случаѣ надобности, можетъ быть вычисленъ безъ помощи таблицъ Такимъ образомъ получилась логарифмическая формула Фламана, имѣющая видъ:

$$Di = \frac{n}{(Dv)^{\frac{1}{4}}} \cdot v^2 , \qquad (20)$$

по типу выраженія (15), изображаемая также уравненіями

$$D^5 \; i^4 = n^4 \; v^7 \qquad (20')$$

или

$$D^{\frac{5}{4}} i = n \; v^{\frac{7}{4}} \qquad (20'')$$

Формула Фламана имѣетъ нѣкоторое распространеніе во Франціи и въ большей степени въ Америкѣ.

По содержанію настоящей статьи намъ приходится упомянуть еще одну логарифмическую формулу для движенія воды по трубамъ, именно — формулу Леви-Валло. Она предложена А. Валло, на основаніи искусственнаго преобразованія нелогарифмической формулы М. Леви, и имѣетъ видъ:

$$D = n \; Q^{\frac{3}{8}} \; i^{\frac{3}{16}} , \qquad (21)$$

гдѣ Q — расходъ.

Формулы для гидравлическаго разсчета, имѣющія логарифмическій видъ, какъ выше было указано, представляютъ уже сами по себѣ, благодаря своей формѣ, значительныя удобства въ обращеніи, по сравненію съ формулами нелогарифмическими. Примѣненіе ихъ можетъ серьезно содѣйствовать сбереженію времени при массовыхъ подсчетахъ. Но цѣнность логарифмическихъ формулъ въ этомъ отношеніи еще усугубляется тѣмъ обстоятельствомъ, что ихъ логарифмическій характеръ даетъ удобные способы преобразовывать ихъ въ графическія формы, благодаря которымъ процессъ разсчета доводится до послѣдней степени простоты.

Нужно удивляться, что логарифмическія формулы не были оцѣнены въ достаточной степени съ самаго своего появленія (да и теперь еще медленно расширяютъ кругъ своего примѣненія). Причинъ этому могло быть нѣсколько. Прежде всего, ко времени ихъ появленія уже установилась репутація нѣкоторыхъ многочленныхъ формулъ и вѣра въ бо̀льшую точность формулъ этого типа. Далѣе сыграло роль стремленіе большинства гидравликовъ къ созданію формулъ, охватывающихъ весь кругъ условій движенія воды, для чего многочленныя формулы были или казались неизбѣжными. Наконецъ просто въ прежнее время не было столь частой и острой нужды въ массовыхъ подсчетахъ, которая бы сдѣла-

ла простоту формулъ и процессовъ разсчета вопросомъ необходимости.

Широкое развитіе въ послѣднія десятилѣтія XIX вѣка постройки водопроводныхъ и канализаціонныхъ сооруженій поставило вопросъ объ упрощеніи способовъ гидравлическаго разсчета, въ видахъ сбереженія труда и времени, самымъ настоятельнымъ образомъ. Это обстоятельство отозвалось, между прочимъ, и на тѣхъ формулахъ обычнаго, нелогарифмическаго вида, которыя пользовались наиболѣе широкимъ примѣненіемъ на практикѣ. Новое теченіе выразилось здѣсь въ стремленіи къ возможному, безъ ущерба практической точности, упрощенію этихъ формулъ, въ широкой разработкѣ вспомогательныхъ таблицъ, наконецъ, въ примѣненіи способовъ графическаго изображенія формулъ. Съ другой стороны, тоже обстоятельство вновь поставило на очередь вопросъ о гидравлическихъ формулахъ логарифмическаго вида. Подъ давленіемъ практической необходимости, попытки нѣкоторыхъ спеціалистовъ ввести въ употребленіе формулы этого вида встрѣтили болѣе благопріятный пріемъ и увѣнчались значительнымъ успѣхомъ. Само собою разумѣется, что и къ логарифмическимъ формуламъ былъ примѣненъ рядъ мѣръ, имѣющихъ цѣлью дальнѣйшее упрощеніе разсчета, тѣмъ болѣе, что видъ такихъ формулъ дѣлаетъ ихъ особенно удобными для данной цѣли. Мѣры эти, помимо разработки числовыхъ таблицъ, сводились къ различнымъ способамъ преобразованія формулъ въ графическій видъ, а именно къ изображенію ихъ въ видѣ діаграммъ кривыхъ или прямыхъ линій, или особыхъ логарифмическихъ масштабовъ (считая въ томъ числѣ и приготовленіе особыхъ логарифмическихъ линеекъ для гидравлическаго разсчета).

Такимъ образомъ мы видимъ въ послѣднія десятилѣтія XIX вѣка въ области разсчета водоснабженія и канализаціи новое теченіе, весьма интересное и много обѣщающее, именно стремленіе, въ видахъ упрощенія этого разсчета, къ разнообразнымъ примѣненіямъ графическихъ методовъ. Примѣненіе этихъ методовъ коснулось и формулъ обычнаго, многочленнаго вида, но особенно широкое развитіе приняло въ отношеніи формулъ логарифмическихъ.

Не имѣя возможности въ настоящей статьѣ остановиться даже краткимъ образомъ на всѣхъ примѣненіяхъ графическихъ методовъ къ гидравлическому разсчету, я считаю необходимымъ, по крайней мѣрѣ, дать перечень этихъ примѣненій.

Сюда относятся:

1) *Діаграммы для опредѣленія* различныхъ *коеффиціентовъ* гидравли-

ческихъ формулъ. Онѣ примѣняются къ формуламъ нелогарифмическаго вида и достаточно извѣстны.

2) Графическія таблицы для изображенія соотношеній между величинами въ видѣ системы прямыхъ *и кривыхъ* линій (*діаграммы изоплетныхъ кривыхъ*). Онѣ примѣнимы къ формуламъ какъ нелогарифмическаго, такъ и логарифмическаго вида. Таковы діаграммы Гобрехта [1]), Гергарда, Гюртена, Колиньона, Д'Обрива и Вильрю, Коффина, Э. и Г. Тэйлоръ и П. Ф. Горбачева.

3) *Логарифмографическія* таблицы для изображенія соотношеній между логарифмами величинъ въ видѣ системы *прямыхъ* линій (*діаграммы изоплетныхъ прямыхъ*). Онѣ примѣняются только къ формуламъ логарифмическаго вида. Таковы діаграммы Тима, Франка, Фромма, В. А. Саткевича и М. С. Ясюковича.

4) Изображеніе соотношеній между логарифмами величинъ въ видѣ діаграммъ *сопряженныхъ масштабовъ*, построенныхъ *по методу масштабовъ функцій*. Употребляются только въ отношеніи логарифмическихъ формулъ. Таковы діаграммы по формулѣ Лампе для метрическихъ мѣръ Венера, для русскихъ—проф. Н. К. Чижова.

5) Примѣненіе *счетныхъ* логарифмическихъ *линеекъ для гидравлическаго разсчета* (главнымъ образомъ, въ Англіи), которыя представляютъ одинъ изъ видовъ *сопряженныхъ масштабовъ*.

6) *Діаграммы сопряженныхъ масштабовъ*, построенныя по *методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія* (*діаграммы или „абаки" изоплетныхъ точекъ*). Послѣднія примѣняются наиболѣе удобно къ формуламъ логариѳмическаго вида [2]). Таковы діаграммы: по формулѣ Леви-Валло для метрическихъ мѣръ Даріэса; по формулѣ Фламана для метрическихъ мѣръ Бертрана, для англійскихъ (и русскихъ) мѣръ помѣщенная въ курсѣ проф. М. М. Черепашинскаго.

7) Примѣненія графическихъ методовъ къ разсчету *сомкнутой* водопроводной *сѣти*, напримѣръ, способъ, предложенный М. С. Ясюковичемъ.

Это новое теченіе и всѣ эти способы примѣненія графическихъ методовъ, различными путями идущіе къ одной цѣли, упрощенію процесса гидравлическаго разсчета и сбереженію труда и времени, заслуживаютъ глубокаго вниманія техниковъ спеціалистовъ, въ смыслѣ изученія и дальнѣйшаго развитія.

---

[1]) Источники, въ которыхъ находятся свѣдѣнія объ этомъ и послѣдующихъ методахъ, могутъ быть найдены въ спискѣ литературы, прилагаемомъ въ концѣ, по именамъ авторовъ.

[2]) Д'Оканемъ указана также возможность примѣненія этого способа къ нелогарифмической формулѣ Базена.

И дѣйствительно, въ послѣднее время эти примѣненія начинаютъ привлекать къ себѣ замѣтное вниманіе. Однако техническая литература, посвященная данному вопросу, какъ на русскомъ, такъ и на иностранныхъ языкахъ, пока ограничивается почти исключительно болѣе или менѣе краткими сообщеніями, разбросанными въ разныхъ журналахъ, по поводу отдѣльныхъ способовъ графическаго разсчета. Матеріалы, могущіе служить для освѣщенія вопроса, какъ теоретическіе, такъ и практическіе (таблицы, альбомы), являются еще болѣе разбросанными и отрывочными, какъ это видно, напримѣръ, изъ количества источниковъ, которые пришлось использовать при составленіи предлагаемой части настоящей работы. Эти обстоятельства, въ особенности же теоретическій интересъ и практическая важность новаго теченія, заставляютъ считать своевременнымъ изученіе вопроса о примѣненіи графическихъ методовъ всякаго рода къ разсчету водоснабженія и канализаціи, въ видахъ, съ одной стороны, систематизаціи и освѣщенія этихъ методовъ съ ихъ теоретическими предпосылками, математическими и гидравлическими, и съ вытекающими изъ нихъ обобщеніями и выводами, съ другой—въ видахъ популяризаціи этихъ методовъ среди спеціалистовъ, которая можетъ содѣйствовать ихъ практическому приложенію и дальнѣйшей разработкѣ.

Предлагаемая статья является результатомъ такого изученія въ отношеніи къ одному изъ элементовъ вопроса. Я касаюсь въ ней примѣненія графическихъ методовъ къ гидравлическому разсчету только въ отношеніи формулъ логарифмическаго вида. Между прочимъ, эти формулы представляютъ и сами по себѣ особый интересъ. А такъ какъ онѣ обладаютъ выдающимися достоинствами и, несомнѣнно, заслуживаютъ большей извѣстности, то я считаю нелишнимъ попутно дать объ нихъ довольно полныя свѣдѣнія. Изъ трехъ способовъ графическаго разсчета, примѣнимыхъ къ этимъ формуламъ (способы изоплетныхъ линій, логарифмографическихъ таблицъ и сопряженныхъ масштабовъ) здѣсь идетъ рѣчь исключительно о способѣ сопряженныхъ масштабовъ. Выборъ этого именно способа для начала работы объясняется, помимо его достоинствъ, также и тѣмъ, что онъ является наименѣе освѣщеннымъ въ технической литературѣ. Въ отношеніи этого послѣдняго способа настоящая статья имѣетъ въ виду дать возможно полныя и систематическія свѣдѣнія, охватывающія теоретическія основанія его и случаи, методы и результаты примѣненія къ различнымъ формуламъ гидравлическаго разсчета.

Можетъ быть, будетъ не лишнимъ, однако, въ видахъ сравненія, дать читателямъ представленіе также о діаграммахъ, относящихся ко

второму и третьему типу. Съ этою цѣлью, независимо отъ ссылокъ на литературу, приложены, въ видѣ образцовъ, одна діаграмма, построенная по методу изоплетныхъ кривыхъ, изъ альбома E. B. & G. M. Taylor (формула Гангилье-Куттера, видоизмѣненная Джексономъ) (черт. 1) и логарифмографическая таблица, принадлежащая В. А. Саткевичу (формула Лампе) (черт. 2).

II. Развитіе и принципы способа сопряженныхъ масштабовъ.

Примѣненія графическихъ методовъ къ гидравлическому разсчету, которыя представляютъ разные виды *способа сопряженныхъ масштабовъ*, являются однимъ изъ самыхъ новыхъ приложеній математики. Они основаны на принципахъ математической науки, извѣстной подъ названіемъ *номографіи*[1]), именно, съ одной стороны—на принципѣ *масштабовъ функцій*, съ другой—на принципѣ *точекъ прямолинейнаго пересѣченія*, иначе—*изоплетныхъ точекъ*.

Если для всѣхъ перемѣнныхъ, которыя связаны извѣстнымъ уравненіемъ, построить систему геометрическихъ элементовъ (точекъ или линій), градуированныхъ въ соотвѣтствіи со значеніями этихъ пере-

---

[1]) Терминъ *номографія* (отъ греческихъ νόμος—законъ и γράφειν—писать) былъ предложенъ въ 1891 году д'Оканемъ (d'Ocagne) въ его брошюрѣ „*Les calculs usuels effectués au moyen des abaques*". Съ тѣхъ поръ онъ пріобрѣлъ право гражданства и принятъ Международной Коммиссіей по вопросу о библіографической классификаціи математическихъ наукъ для обозначенія особаго отдѣла математики.

Къ области номографіи относятся и другіе способы примѣненія графическихъ методовъ, перечисленные въ нашей классификаціи, за исключеніемъ седьмого.

Номографія ставитъ своею цѣлью свести вычисленія, которыя являются необходимыми въ различныхъ отрасляхъ техники, къ простому *чтенію на графическихъ таблицахъ, составленныхъ разъ навсегда*.

Этотъ *постоянный* характеръ діаграммъ даетъ основаніе проводить разницу между *номографіей* и *графическимъ разсчетомъ* въ собственномъ значеніи слова. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ *въ примѣненіи къ даннымъ каждаго частнаго случая* числовой разсчетъ замѣняется вычерчиваніемъ эпюры. *Каждый разъ* для новаго состава данныхъ приходится составлять *новую эпюру*. Такой именно разсчетъ составляетъ предметъ графической статики, а въ разсматриваемой нами области таковы примѣненія графическихъ методовъ къ разсчету сѣти. *Номографическія діаграммы* (по французской терминологіи *абаки*, *les abaques*), напротивъ, изображаютъ результаты извѣстнаго соотношенія *для всѣхъ возможныхъ значеній данныхъ элементовъ* въ опредѣленныхъ предѣлахъ. Можно сказать, что номографическая діаграмма представляетъ синтезъ геометрическихъ построеній, соотвѣтствующихъ безконечному количеству различныхъ значеній элементовъ, фигурирующихъ въ разсчетѣ.

На основаніи приведенныхъ соображеній, было бы точнѣе присвоить излагаемымъ способамъ гидравлическаго разсчета названіе *номографическихъ*. Но мы будемъ продолжать называть ихъ просто графическими, такъ какъ различія въ терминахъ въ данномъ случаѣ не имѣютъ значенія.

мѣнныхъ, и если связь между перемѣнными, установленная уравненіемъ, выражается геометрически легко опредѣляемымъ относительнымъ положеніемъ соотвѣтствующихъ геометрическихъ элементовъ, то совокупность послѣднихъ представляетъ діаграмму даннаго уравненія. Подъ именемъ номографіи разумѣется теорія такихъ діаграммъ, т. е. теорія графическаго представленія математическихъ законовъ, выражаемыхъ уравненіями съ какимъ либо числомъ перемѣнныхъ.

Принципъ геометрическаго представленія уравненій съ двумя перемѣнными относится къ тому моменту, когда Декартъ положилъ основаніе аналитической геометріи. Въ отношеніи уравненій съ тремя перемѣнными первый примѣръ графическаго представленія былъ данъ Pouchet, который въ своей „*Arithmétique linéaire*“ (1795 г.) примѣнилъ систему кривыхъ, расположенныхъ на прямоугольной сѣти координатъ. Та-же идея была примѣнена въ трудахъ Obenheim'a, Piombert'a, Bellencontre'a и Allix'a, относящихся къ 1814—1840 гг. Terquem въ 1830 г., по поводу работъ Obenheim'a и Bellencontre'a, обратилъ вниманіе на общность этого способа представленія уравненій съ 3 перемѣнными, а также указалъ на связь его съ нѣкоторыми идеями математиковъ предшествующихъ столѣтій.

Однако въ первые 50 лѣтъ идейнаго существованія метода примѣненіе графическихъ таблицъ было весьма ограниченнымъ. Развитіе въ 40-хъ годахъ XIX столѣтія сѣти желѣзныхъ дорогъ во Франціи поставило на очередь задачу о быстромъ подсчетѣ большихъ количествъ земляныхъ работъ. Для рѣшенія этой задачи у инженеровъ Лаланна (Léon-Louis-Chrétien Lalanne, 1811—1892 гг.) и Девена (Devaine) явилась мысль примѣнить графическіе методы. Этому обстоятельству мы обязаны тѣмъ, что Лаланнъ открылъ (въ 1843 г.) новый принципъ для графическаго выраженія уравненій, который онъ назвалъ принципомъ *анаморфоза*. Открытіе Лаланна было опубликовано въ видѣ мемуара въ Annales des Ponts et Chaussées за 1846 годъ подъ заглавіемъ „*Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphose appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur*“. Это произведеніе легло въ основу дальнѣйшаго развитія номографіи и само по себѣ дало почву для цѣлаго ряда приложеній къ техническому разсчету. Самъ Лаланнъ былъ крайне заинтересованъ практическимъ приложеніемъ своей теоріи и разработалъ нѣсколько руководствъ къ графическому разсчету (*Tables nouvelles pour abréger divers calculs, Tables graphiques à l'usage des chemins de fer, Description et usage de l'abaque ou compteur universel, Instruction sur les règles de*

calcul и др.); онъ же изобрѣлъ особое приспособленіе для механическаго производства вычисленій, *balance à calcul, balance algébrique.*

Въ 1884 году проф. Массо (Massau) въ своемъ *Mémoire sur l'intégration graphique* довелъ принципъ анаморфоза до высшей степени общности. Лаллеманъ (Lallemand) далъ анаморфическимъ діаграммамъ спеціальную форму, которой онъ присвоилъ наименованіе *гексагональныхъ* діаграммъ. Но особая заслуга въ дѣлѣ продолженія идейной работы Лаланна и развитія номографіи принадлежитъ д'Оканю (Maurice d'Ocagne, профессоръ Парижской École des Ponts et Chaussées). Онъ посвятилъ цѣлый рядъ работъ вопросу о графическомъ представленіи уравненій и въ 1884 году опубликовалъ найденный имъ въ этой области новый общій принципъ, къ которому онъ пришелъ путемъ преобразованія діаграммъ Лаланна, и который положенъ въ основу *метода точекъ прямолинейнаго пересѣченія* (méthode des points alignés). Послѣднему д'Оканъ далъ первоначально названіе *метода изоплетныхъ точекъ* (méthode des points isoplèthes), желая этимъ подчеркнуть, что системы точекъ, играющія роль въ этомъ методѣ, соотвѣтствуютъ системамъ *изоплетныхъ прямыхъ*, которыя фигурируютъ въ діаграммахъ, построенныхъ по методу Лаланна.

Основы этого метода были изложены впервые въ мемуарѣ д'Оканя „*Procédé nouveau de calcul graphique*" (Annales des Ponts et Chaussées, 1884). Затѣмъ тотъ же вопросъ былъ подвергнутъ болѣе широкой разработкѣ въ послѣдующей статьѣ д'Оканя, появившейся въ 1890 г., „*Méthode de calcul graphique fondée sur l'emploi des coordonnées parallèles*" (Génie Civil, 1890) и, наконецъ, получилъ полное развитіе въ его обширныхъ монографіяхъ „*Nomographie*" (1891) и „*Traité de nomographie*" (1899).

Этимъ работамъ д'Оканя удалось возбудить интересъ среди представителей различныхъ областей техники, и открытый имъ новый методъ далъ основаніе для многихъ приложеній къ разнымъ областямъ техническаго разсчета.

Принципы, положенные Лаланномъ въ основу номографіи, получили дальнѣйшее развитіе не только на родинѣ этой науки. И за предѣлами Франціи онъ имѣетъ послѣдователей, которые продолжаютъ разработку номографіи въ новыхъ направленіяхъ; таковы, напримѣръ, проф. Мемке (Mehmke), Goedseels и др.

Обращаясь теперь собственно къ способу сопряженныхъ масштабовъ, мы напомнимъ, что, какъ выше указано, способъ этотъ относится къ области номографіи и имѣетъ въ основѣ два номографическихъ принципа: принципъ *масштабовъ функцій* и принципъ *точекъ*

прямолинейнаго пересѣченія. Первый изъ этихъ принциповъ, являющійся вмѣстѣ съ тѣмъ основнымъ положеніемъ всей номографіи, служитъ для построенія градуаціи отдѣльныхъ масштабовъ въ діаграммахъ. Суть его сводится къ слѣдующему.

Пусть имѣется нѣкоторая функція $f(x)$ независимой перемѣнной x, въ такихъ предѣлахъ, что для каждаго значенія перемѣнной x имѣется только одно опредѣленное значеніе функціи.

Будемъ наносить на оси OX, отъ начала координатъ O (черт. 3), длины:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda f(x_1)\ , \\ l_2 &= \lambda f(x_2)\ , \\ l_3 &= \lambda f(x_3)\ , \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{22}$$

гдѣ λ—произвольно выбранная длина, и надпишемъ надъ точками, обозначающими концы отрѣзковъ l_1, l_2, l_3 , . . . , соотвѣтствующія значенія x_1, x_2, x_3 , . . . перемѣнной.

Совокупность полученныхъ такимъ образомъ точекъ съ числовыми отмѣтками составитъ *масштабъ функціи* $f(x)$. Длина λ называется *модулемъ* этого *масштаба.*

Если масштабъ функціи долженъ быть ограниченъ двумя частными значеніями перемѣнной, напр. x_0 и x_n, то можно построить его, начиная съ низшаго предѣла x_0, безъ участія начала координатъ O. Чтобы получить точки x_1, x_2, x_3 , . . . , x_n, нужно нанести на оси, начиная отъ произвольно выбранной точки съ отмѣткой x_0, отрѣзки:

$$\begin{aligned} l_1 &= \lambda\,[f(x_1) - f(x_0)]\ , \\ l_2 &= \lambda\,[f(x_2) - f(x_1)]\ , \\ l_3 &= \lambda\,[f(x_3) - f(x_2)]\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L &= \lambda\,[f(x_n) - f(x_0)]\ , \end{aligned} \tag{23}$$

гдѣ L—длина масштаба.

Принимая

$$f(x) = x \tag{24}$$

и измѣняя ее черезъ равное и круглое число единицъ того или другого десятичнаго порядка, мы получимъ, путемъ указаннаго построенія, *нормальный* масштабъ. Въ зависимости отъ задачъ, подлежащихъ графическому рѣшенію, иногда приходится примѣнять построе-

ніе къ инымъ функціямъ, и тогда получаются масштабы функцій другого характера, напр. *логарифмическіе, сегментные, изоградные* [1]).

Если принять

$$f(x) = \log x \ , \tag{25}$$

то построеніе дастъ *логарифмическій масштабъ функцій.* Образцомъ его могутъ служить дѣленія счетной логарифмической линейки (черт. 4). Такой масштабъ примѣняется для построенія всѣхъ логариѳмическихъ діаграммъ, въ томъ числѣ и діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ.

По поводу этого логарифмическаго масштаба нужно замѣтить, что, если продолжить его далѣе 10, то въ промежуткѣ отъ 10 до 100 онъ будетъ имѣть ту же длину и тѣ же дѣленія, какъ и отъ 0 до 10, при чемъ дѣленія будутъ соотвѣтствовать величинамъ въ 10 разъ большимъ. То же самое было бы отъ 100 до 1000, только съ отмѣтками еще въ 10 разъ большими и т. д. Изъ этого слѣдуетъ, во первыхъ, что на логарифмическомъ масштабѣ, построенномъ въ предѣлахъ отъ 0 до 10, единицы могутъ относиться къ какому угодно десятичному порядку; во вторыхъ, что степень относительной точности отсчета въ примѣненіи къ любому порядку остается постоянной.

Первое вытекаетъ изъ того, что:

$$\lambda \log (10^n . x) = \lambda (n + \log x) \ . \tag{26}$$

Такимъ образомъ для чиселъ въ предѣлахъ отъ 10^n до 10^{n+1} логарифмическій масштабъ остается такимъ же, какъ и отъ 1 до 10, только нужно представить начало его отнесеннымъ на разстояніе $n\lambda$ влѣво отъ дѣйствительнаго.

Что относительная точность (или процентъ точности) разсчета при употребленіи логарифмическаго масштаба вездѣ одинаковъ, видно изъ слѣдующаго разсужденія. Въ любомъ мѣстѣ масштаба наибольшая величина ошибки при отсчетѣ глазомъ, вообще говоря, по длинѣ одна и та же. Эта величина представляетъ разность двухъ логарифмовъ нѣкоторыхъ значеній, между которыми заключается истинное значеніе. Такимъ образомъ, называя крайнія значенія черезъ x_n и x_{n+1}, мы можемъ сказать, что:

$$\log x_{n+1} - \log x_n = const \ . \tag{27}$$

---

[1]) Идея построенія масштабовъ функцій (въ примѣненіи къ логарифмической функціи) принадлежитъ Гюнтеру и относится къ началу XVII вѣка.

Но

$$\log x_{n+1} - \log x_n = \log \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

откуда

$$\log \frac{x_{n+1}}{x_n} = const.,$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = const.,$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = const. \tag{28}$$

Такимъ образомъ, если, читая по логарифмическому масштабу, мы придадимъ его числовымъ отмѣткамъ значенія въ 10 разъ большія, то увеличатся также въ 10 разъ числовыя значенія предѣловъ ошибки, а относительная величина ошибки и процентъ точности вычисленія останутся одни и тѣ же.

Другой номографическій принципъ, который представляетъ для насъ интересъ, это разработанный д'Оканемъ *методъ точекъ прямолинейнаго пересѣченія.* На немъ именно основано построеніе одного изъ видовъ діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ. Для уясненія этого метода, а также въ видахъ сравненія его съ другими методами, примѣняемыми къ графическому разсчету, весьма удобно прослѣдить въ самыхъ общихъ чертахъ ту логическую нить, къ которой сводятся различные методы въ ихъ послѣдовательномъ развитіи и исторической смѣнѣ.

Допустимъ, что мы имѣемъ уравненіе съ 3 перемѣнными вида

$$F(x, y, z) = 0, \tag{29}$$

которое желаемъ представить въ графической формѣ. Простѣйшій способъ, примѣнимый для этой цѣли, сводится къ слѣдующему.

Дадимъ одной изъ перемѣнныхъ, (по преимуществу—той, которая чаще всего выражается въ видѣ функціи двухъ другихъ), напримѣръ z, опредѣленное значеніе. Тогда мы получимъ одно уравненіе съ двумя перемѣнными. Такое уравненіе легко представить въ видѣ кривой, вычерченной на сѣти прямоугольныхъ координатъ, опредѣляемой равенствами:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x, \\ y' &= \lambda_2 y, \end{aligned} \tag{30}$$

гдѣ λ_1 и λ_2 соотвѣтственно выбранные модули масштабовъ отложенія величинъ x и y по осямъ координатъ (ср. черт. 5).

Уравненіе этой кривой будетъ

$$F\left(\frac{x'}{\lambda_1}, \frac{y'}{\lambda_2}, z\right)=0 \ . \qquad (29')$$

Такая кривая, на протяженіи которой элементъ z сохраняетъ одно и то же значеніе, была названа Лаланномъ кривой равнаго элемента (courbe d'égale élément), затѣмъ нѣмецкимъ авторомъ Фоглеромъ (Vogler)—*изоплетной кривой* (ἴσος—равный, πλῆθος—величина). Этотъ послѣдній терминъ былъ затѣмъ принятъ самимъ Лаланномъ.

Построимъ подобнымъ же образомъ кривыя, соотвѣтствующія цѣлому ряду значеній z, возрастающихъ черезъ опредѣленные промежутки, и будемъ надписывать при каждой кривой соотвѣтствующее ей значеніе z. При этомъ, конечно, достаточно провести часть каждой кривой внутри прямоугольника, который образуется двумя парами перпендикуляровъ, проведенныхъ къ осямъ OX и OY черезъ точки, соотвѣтствующія конечнымъ значеніямъ x и y.

Такимъ образомъ мы получимъ систему кривыхъ внутри прямоугольника (черт. 6), разбитаго рядами координатъ на клѣтки, въ видѣ сѣти. Эта система и представляетъ графически наши перемѣнныя въ назначенныхъ предѣлахъ. Діаграммамъ этого вида, а по аналогіи съ ними и другимъ діаграммамъ съ градуировкой и числовыми отмѣтками, Лаланномъ и его французскими учениками присвоено названіе *абакъ* (les abaques des lignes isoplèthes). Мы будемъ называть ихъ просто діаграммами, въ данномъ случаѣ—*діаграммами изоплетныхъ кривыхъ* [1]).

---

[1]) Французское слово l'abaque происходитъ отъ греческаго ἄβακος. Этимъ именемъ у Грековъ обозначалась доска для стола, а также счетная доска, къ которой, при неудобствѣ пользованія древними цифровыми знаками, прибѣгали не только учащіеся, но и математики и астрономы. Съ послѣднимъ значеніемъ это слово перешло въ латинскій (abacus) и итальянскій (abaco) языки, въ которыхъ очень часто встрѣчается въ теченіе среднихъ вѣковъ. Между прочимъ, отъ этого слова произошло прозвище одного изъ знаменитыхъ математиковъ XIV вѣка, Paolo di Dagomari, который извѣстенъ болѣе подъ именемъ Paolo dall'Abaco (Павелъ арифметикъ). Во французскомъ языкѣ слово l'abaque примѣняется для обозначенія Пиѳагоровой таблицы умноженія, доски для вычисленія, счетовъ, а также упомянутыхъ діаграммъ для вычисленія.

Проф. М. М. Черепашинскій, говоря о томъ методѣ, которому мы, въ согласіи съ д'Оканемъ, даемъ новое наименованіе *метода точекъ прямолинейнаго пересѣченія*, употребляетъ для его обозначенія, исходя изъ старой терминологіи (*la méthode des points isoplèthes, les abaques des points isoplèthes*), выраженіе *методъ изоплетныхъ абакъ*. Такой терминъ представляется намъ не вполнѣ удачнымъ вообще, такъ какъ онъ не выражаетъ отличія даннаго метода отъ методовъ, лежащихъ въ основаніи діаграммъ изоплетныхъ кривыхъ и прямыхъ, и потому мы замѣняемъ его вышеприведеннымъ, болѣе опредѣленнымъ выраженіемъ. Въ частности же относительно слова *абака* нужно сказать, что оно не получило права гражданства въ русскомъ языкѣ въ примѣненіи къ данному понятію. Кстому же это слово и въ греческомъ, и во всѣхъ другихъ языкахъ мужескаго рода. Эти послѣднія соображенія заставляютъ считать болѣе удобнымъ и достаточнымъ примѣненіе вмѣсто него въ данномъ и аналогичныхъ случаяхъ термина *діаграмма*.

Если мы условимся обозначать терминами *горизонталь* и *вертикаль* линіи, параллельныя соотвѣтственно OX и OY, то способъ пользованія такой діаграммой въ цѣляхъ опредѣленія значенія z, по даннымъ x и y, можетъ быть формулированъ слѣдующимъ образомъ: прочитать отмѣтку кривой, проходящей черезъ точку встрѣчи вертикали съ отмѣткой x и горизонтали съ отмѣткой y. Само собой разумѣется, что при чтеніи, въ случаѣ надобности, примѣняется интерполяція. Та же самая діаграмма даетъ возможность опредѣлить x или y, если даны одна изъ этихъ перемѣнныхъ, а также z. Напримѣръ, если даны y и z, то можно получить x, прочитавъ отмѣтку вертикали, проходящей черезъ точку встрѣчи горизонтали съ отмѣткой y и изоплетной кривой съ отмѣткой z.

Не трудно видѣть, что въ діаграммахъ изоплетныхъ кривыхъ графическое представленіе уравненія создается путемъ горизонтальныхъ сѣченій поверхности, опредѣляемой уравненіемъ (29), въ которомъ x, y и z приняты за Декартовы координаты пространства.

При построеніи діаграммъ, о которыхъ только что говорено, могутъ быть частные случаи, когда кривыя z обращаются въ прямыя. Возвращаясь къ предшествующему и разсматривая уравненія (29), (29′) и (30), мы видимъ, что это бываетъ тогда, когда уравненіе (29) можетъ быть сведено къ виду

$$\frac{x'}{\lambda_1} f(z) + \frac{y'}{\lambda_2} \varphi(z) + \psi(z) = 0 \tag{31}$$

или, въ силу (30),

$$x f(z) + y \varphi(z) + \psi(z) = 0 . \tag{31'}$$

Въ томъ болѣе общемъ случаѣ, когда для построенія уравненія (29) оказывается болѣе удобнымъ откладывать по осямъ координатъ не x и y, а $f_1(x)$ и $f_2(y)$, такимъ образомъ, что

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 f_1(x) , \\ y' &= \lambda_2 f_2(y) , \end{aligned} \tag{30'}$$

для того, чтобы кривыя z діаграммы обратились въ прямыя, уравненіе (29) должно имѣть форму:

$$\frac{x'}{\lambda_1} f(z) + \frac{y'}{\lambda_2} \varphi(z) + \psi(z) = 0 \tag{32}$$

или

$$f_1(x) f(z) + f_2(y) \varphi(z) + \psi(z) = 0 . \tag{32'}$$

Номографическія діаграммы, отличающіяся указаннымъ свойствомъ, называются *діаграммами изоплетныхъ прямыхъ.*

Построеніе такихъ діаграммъ, конечно, значительно легче, нежели діаграммъ съ кривыми линіями. Отсюда понятно, что на практикѣ болѣе охотно прибѣгаютъ къ употребленію діаграммъ этого типа, если только уравненіе, опредѣляющее соотношеніе между элементами задачи, можетъ быть сведено къ виду (31′) или (32′).

Лаланнъ, Лаллеманъ и позднѣйшіе изслѣдователи показали разными путями, что діаграммы, заключающія кривыя линіи (діаграммы изоплетныхъ кривыхъ) въ извѣстныхъ случаяхъ, благодаря нѣкоторымъ предварительнымъ операціямъ (анаморфозъ геометрическій или логарифмическій) могутъ быть искусственно замѣнены діаграммами, состоящими исключительно изъ прямыхъ линій, параллельныхъ или непараллельныхъ между собою, т. е. діаграммами изоплетныхъ прямыхъ. Дѣло сводится при этомъ къ преобразованію уравненій, подлежащихъ графическому изображенію, въ видъ (31′) или (32′), чему сопутствуетъ обыкновенно измѣненіе масштабовъ функцій по осямъ координатъ. Иногда приходится прибѣгать къ введенію новой системы координатъ или спеціальнаго третьяго масштаба функцій (гексагональныя діаграммы Лаллемана).

Къ числу уравненій, которыя представляютъ частные случаи типа (32′), относятся уравненія вида

$$f_1\ (x)+f_2\ (y)+f_3\ (z)=0 \tag{33}$$

которыя весьма часто встрѣчаются въ практикѣ. Въ этомъ случаѣ, примѣняя прежній способъ нанесенія на оси координатъ, имѣемъ

$$\begin{aligned} x'&=\lambda_1\ f_1(x)\ , \\ y'&=\lambda_2\ f_2(y)\ , \end{aligned} \tag{34}$$

откуда получается уравненіе кривыхъ z

$$\frac{x'}{\lambda_1}+\frac{y'}{\lambda_2}+f_3\ (z)=0\ . \tag{35}$$

Уравненія такого вида даютъ діаграмму изоплетныхъ прямыхъ, параллельныхъ между собою.

Нужно сказать, что уравненія вида (33) допускаютъ еще возможность графическаго изображенія по методу такъ называемыхъ гексагональныхъ діаграммъ Лаллемана, а также по интересующему насъ методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія.

Другая форма уравненій, очень употребительная въ практикѣ, имѣетъ видъ

$$f_1(x)\, f_2(y) = f_3(z)\ . \tag{36}$$

Она можетъ быть приведена къ предшествующему типу путемъ логарифмированія обѣихъ частей:

$$\log f_1(x) + \log f_2(y) = \log f_3(z)\ . \tag{37}$$

Въ такомъ видѣ уравненіе можетъ быть представлено графически въ видѣ діаграммы параллельныхъ прямыхъ (на логарифмической сѣткѣ).

Этотъ простой и удобный способъ преобразованія имѣетъ очень важное значеніе. Онъ принадлежитъ Лаланну, и былъ первымъ открытымъ имъ методомъ анаморфоза.

Полученнымъ такимъ образомъ діаграммамъ изоплетныхъ прямыхъ, въ силу логарифмическаго характера преобразованія и нанесенія, присвоено въ практикѣ названіе *логарифмо-графическихъ таблицъ.*

Способъ употребленія діаграммъ, съ переходомъ отъ изоплетныхъ кривыхъ къ изоплетнымъ прямымъ, нисколько не мѣняется. Способъ этотъ, однако, не лишенъ нѣкоторыхъ неудобствъ, которыя сводятся главнымъ образомъ къ тому, что для полученія отсчетовъ приходится слѣдить глазами по линіямъ и интерполировать между ними, что утомительно и недостаточно гарантируетъ отъ ошибокъ. Не входя пока въ обсужденіе сравнительнаго значенія этихъ неудобствъ, о чемъ будетъ рѣчь дальше, достаточно констатировать ихъ существованіе. Д'Окань обратилъ вниманіе на эти неудобства и нашелъ, что является болѣе желательнымъ употреблять въ качествѣ элементовъ съ числовыми отмѣтками, для графическаго представленія уравненій, по возможности, только точки. Онъ предложилъ и методъ, который даетъ возможность достигнуть этой цѣли въ отношеніи нѣкоторыхъ уравненій, именно *методъ точекъ прямолинейнаго пересѣченія.*

Переходъ къ этому послѣднему методу имѣетъ въ основѣ принципъ геометрическаго дуализма. Принципъ этотъ въ примѣненіи къ данному случаю выражается въ томъ, что для каждой системы пересѣкающихся прямыхъ линій существуетъ такая система точекъ, что *тремъ взаимно встрѣчающимся прямымъ* первой системы соотвѣтствуютъ во второй *три точки, лежащія на одной прямой.* Такимъ образомъ мы имѣ-

емъ здѣсь дѣло съ однимъ изъ геометрическихъ преобразованій, которыя носятъ названіе дуалистическихъ[1]).

Предположимъ, что мы примѣнили такое преобразованіе къ діаграммѣ, состоящей изъ трехъ системъ какихъ либо прямыхъ, сохраняя, конечно, при переходѣ отъ одной фигуры къ другой, числовую отмѣтку каждаго элемента. Тогда мы получимъ новую діаграмму (черт. 7), на которой каждой изъ перемѣнныхъ x, y и z будетъ соотвѣтствовать система точекъ съ числовыми отмѣтками, расположенныхъ по линіи, въ общемъ случаѣ—кривой. Эти три системы точекъ съ числовыми отмѣтками будутъ представлять *криволинейные масштабы.*

Такъ же, какъ на первой діаграммѣ три прямыя съ числовыми отмѣтками значеній x, y и z, удовлетворяющихъ уравненію, сходились между собою, такъ здѣсь *три соотвѣтствующія точки* будутъ лежать *на одной прямой*, пересѣкающей всѣ три масштаба. Эта новая діаграмма представляетъ самый общій видъ діаграммы *точекъ прямолинейнаго пересѣченія.* Отсюда способъ употребленія діаграммы такого рода: *прямая, соединяющая точки съ отмѣтками x и y на двухъ криволинейныхъ масштабахъ, встрѣчаетъ третій масштабъ въ точкѣ съ отмѣткой z.*

Въ практикѣ примѣняется, подъ именемъ метода точекъ прямолинейнаго пересѣченія д'Оканя, частный случай вышеуказанныхъ діаграммъ, когда криволинейные масштабы функцій, благодаря особенностямъ уравненій, подлежащихъ графическому изображенію, обращаются въ прямыя, параллельныя другъ другу. Такой случай получается тогда, когда уравненія имѣютъ видъ (33) или (36—37). Въ этомъ случаѣ діаграмма имѣетъ видъ *трехъ* (или нѣсколькихъ) *масштабовъ функцій*, расположенныхъ параллельно другъ другу и находящихся въ такой *взаимной связи*, что всякая прямая, пересѣкающая эти масштабы, встрѣчаетъ ихъ въ точкахъ съ такими числовыми значеніями перемѣнныхъ, которыя при одновременной подстановкѣ удовлетворяютъ уравненіе, представляемое діаграммой.

Методу, о которомъ идетъ рѣчь, изобрѣтатель его, д'Окань, первоначально далъ названіе *метода изоплетныхъ точекъ* (*méthode des*

---

[1]) Принципъ геометрическаго дуализма излагается въ высшей (проективной) геометріи. Выводы этой науки, кстати сказать, имѣютъ громадное значеніе для наукъ техническихъ. Они именно являются теоретической основой такихъ доктринъ, какъ начертательная геометрія, графическая статика, и вообще важнѣйшихъ приложеній графическихъ методовъ въ техникѣ. Есть всѣ основанія ожидать отъ этой высоко интересной науки и новыхъ услугъ для техники, если только она будетъ пользоваться надлежащимъ вниманіемъ дѣятелей технической мысли.

points isoplèthes), по аналогіи съ методомъ изоплетныхъ прямыхъ Лаланна. Но это названіе было затѣмъ признано авторомъ неудачнымъ, и онъ употреблялъ нѣкоторое время новый терминъ—*méthode des points cotés* (методъ *точекъ съ числовыми отмѣтками*), желая подчеркнуть, что въ его діаграммахъ для отсчета служатъ именно *точки*, снабженныя числовыми отмѣтками, *а не линіи*. Однако тутъ является соображеніе, что можно строить діаграммы, гдѣ также входятъ только точки съ числовыми отмѣтками, но вовсе не обладающія указаннымъ свойствомъ въ отношеніи сѣкущей прямой. Поэтому въ концѣ концовъ д'Окань остановился на терминѣ—*méthode des points alignées*, характеризующемъ относительное положеніе точекъ, читаемыхъ одновременно. Этотъ терминъ мы будемъ переводить выраженіемъ—*методъ точекъ прямолинейнаго пересѣченія*.

Способъ примѣненія даннаго метода къ рѣшенію гидравлическихъ задачъ мы называемъ *способомъ сопряженныхъ масштабовъ*, а служащія для этой цѣли діаграммы—*діаграммами сопряженныхъ масштабовъ*. Смыслъ этихъ терминовъ диктуется внѣшнимъ видомъ діаграммъ и существующей связью между отдѣльными масштабами, допускающей только совмѣстное употребленіе. Введеніе же ихъ въ классификацію способовъ гидравлическаго разсчета казалось желательнымъ по двумъ соображеніямъ. Во первыхъ, эти термины удобнѣе и яснѣе, нежели выраженіе, указывающее на математическій методъ построенія. Во вторыхъ, существуетъ другой аналогичный видъ діаграммъ, которыя представляютъ также примѣненіе масштабовъ параллельныхъ между собою и логарифмическихъ, какъ и въ данномъ случаѣ, но построены безъ примѣненія метода точекъ прямолинейнаго пересѣченія, просто по принципу масштабовъ функцій. Эти діаграммы по внѣшнему виду и отчасти способу употребленія близки къ діаграммамъ сопряженныхъ масштабовъ, построеннымъ по методу д'Оканя. Поэтому казалось удобнымъ, въ видахъ классификаціи графическихъ способовъ и отличія способовъ примѣненія масштабовъ функцій отъ способа логарифмографическихъ таблицъ, подвести оба указанные выше сходные способы подъ общее названіе—способы сопряженныхъ масштабовъ. Въ случаяхъ, когда нужно отличать одинъ изъ способовъ сопряженныхъ масштабовъ отъ другого, можно, конечно, прибавлять указаніе на методъ построенія.

Методъ точекъ прямолинейнаго пересѣченія примѣнимъ, какъ было указано, для графичеекаго изображенія уравненій, имѣющихъ форму

$$f_1(x)+f_2(y)=f_3(z) \quad . \qquad (33)$$

Напомнимъ, что къ нимъ же сводятся уравненія вида

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = f_3(z) \tag{36}$$

путемъ преобразованія въ

$$\log f_1(x) + \log f_2(y) = \log f_3(z) \ . \tag{37}$$

Возможность обращенія уравненія (33) въ форму діаграммы сопряженныхъ масштабовъ можетъ быть доказана различными способами. Доказательство, данное д'Оканемъ, ведется при помощи такъ называемыхъ параллельныхъ координатъ. Ввиду необычности примѣненія этой своеобразной координатной системы, можно было бы не касаться такого способа доказательства. Однако, ввиду достигаемой этимъ примѣненіемъ замѣчательной простоты, а также интереса самой системы параллельныхъ координатъ, мы не считаемъ возможнымъ обойти этотъ способъ и изложимъ его, введя съ своей стороны нѣкоторое упрощеніе, путемъ исключенія лишнихъ элементовъ (вспомогательная система осей координатъ xOy и связанная съ ними величина δ — половина разстоянія между началами параллельныхъ координатъ). Для этой цѣли намъ придется предварительно въ нѣсколькихъ словахъ разъяснить сущность и особенности системы параллельныхъ координатъ.

Задаемся двумя точками A и B (черт. 8), которыя назовемъ *началами параллельныхъ координатъ*. Черезъ эти точки проведемъ двѣ параллельныя прямыя AU и BV—*оси параллельныхъ координатъ* [1]). Отложимъ на осяхъ отрѣзки

$$AM = u \text{ и } BN = v \ . \tag{38}$$

Условимся считать такіе отрѣзки положительными въ направленіи отъ A къ U и отъ B къ V и отрицательными въ обратную сторону. Концы отрѣзковъ AM и BN опредѣлятъ точки M и N на осяхъ координатъ, принадлежащія прямой MN. Длины u и v, взятыя съ соотвѣтственными знаками, называются *параллельными координатами прямой* MN. Здѣсь AU, BV, u, v—обычныя обозначенія осей и координатъ въ данной системѣ, какъ OX, OY, x, y въ прямоугольныхъ координатахъ.

Если разсматривать неподвижную точку P (черт. 9) и перемѣнную прямую MN, проходящую черезъ эту точку, то можно вывести соот-

---

[1]) D'Ocagne. „Coordonnées parallèles et axiales", p. 4, 9.

ношеніе между координатами такой прямой, которая будетъ уравненіемъ точки P.

Проведемъ линіи AP и BP, съ продолженіями PB' и PA', и положимъ, что

$$AA'=\alpha,\ BB'=\beta\ . \tag{39}$$

Мы будемъ имѣть для любого положенія прямой MN

$$\frac{BN}{MA'}=\frac{NB'}{AM}$$

или

$$\frac{v}{\alpha-u}=\frac{\beta-v}{u}\ .$$

Отсюда получается

$$\frac{u}{\alpha}+\frac{v}{\beta}=1\ , \tag{40}$$

которое и будетъ *уравненіемъ точки* P въ параллельныхъ координатахъ.

Наоборотъ, всякое уравненіе первой степени обозначаетъ въ параллельныхъ координатахъ точку. Пусть, напримѣръ, имѣется уравненіе

$$au+bv+c=0\ , \tag{41}$$

которому удовлетворяютъ координаты прямой. Приводя уравненіе (41) къ виду (40), при чемъ

$$\alpha=-\frac{c}{a}\ ;\quad \beta=-\frac{c}{b}\ ,$$

легко видѣть, что прямыя, удовлетворяющія уравненію (41), постоянно проходятъ черезъ нѣкоторую точку P. Если провести черезъ эту точку линію CP параллельно осямъ координатъ до пересѣченія съ AB и обозначить длину CP черезъ w, AB черезъ s, а разстоянія точки C отъ началъ координатъ черезъ s_1 и s_2 (которыя должны считаться положительными или отрицательными, въ зависимости отъ направленія), то получаются слѣдующія соотношенія:

$$\frac{s_1}{-s_2}=\frac{AC}{CB}=\frac{AP}{PB'}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{b}{a}\ ^{1)},$$

[1]) Для случая, когда точка P находится между осями координатъ. Когда она находится внѣ пространства между осями (черт. 9*a*), s_1 и s_2 имѣютъ одинаковые знаки, но зато знаки α и β въ уравненіи (40) и a и b въ уравненіи (41) разные Такимъ образомъ для этого послѣдняго случая получается:

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{AC}{CB}=-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{b}{a}\ , \tag{42}$$

т. е. прежнее соотношеніе.

$$\frac{s_1}{s_2}=-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{b}{a}\ ; \tag{42}$$

$$\frac{w}{\alpha}=\frac{-s_2}{s}\ ,\ \frac{w}{\beta}=\frac{s_1}{s}\ ;$$

$$w\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{s_1-s_2}{s}=1;$$

$$w=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{c}{a+b}\ . \tag{42'}$$

Теперь обратимся къ вопросу о преобразованіи въ графическую форму уравненія вида

$$f_1\ (x)+f_2\ (y)=f_3\ (z)\ . \tag{33}$$

Возьмемъ произвольную прямую AB и примемъ двѣ точки ея A и B (черт. 10), находящіяся на разстояніи s другъ отъ друга, за начала параллельныхъ координатъ. Проведемъ черезъ эти точки двѣ параллельныя прямыя AU и BV, которыя будутъ осями координатъ.

Отложимъ функціи $f_1\ (x)$ и $f_2\ (y)$ по осямъ координатъ AU и BV въ видѣ масштабовъ функцій, при модуляхъ λ_1 и λ_2. Тогда, обозначая отрѣзки на осяхъ AU и BV соотвѣтственно черезъ u и v, получимъ

$$\begin{aligned} u&=\lambda_1\ f_1\ (x)\ ,\\ v&=\lambda_2\ f_2\ (y)\ . \end{aligned} \tag{43}$$

Мы имѣемъ право разсматривать эти отрѣзки, какъ параллельныя координаты нѣкоторой перемѣнной прямой MN, пересѣкающей оси координатъ въ точкахъ M и N, находящихся въ разстояніи u и v отъ началъ координатъ.

Внося выраженія для $f_1(x)$ и $f_2\ (y)$, слѣдующія изъ равенствъ (43), въ основное уравненіе (33), мы получаемъ новое уравненіе

$$\frac{u}{\lambda_1}+\frac{v}{\lambda_2}=f_3\ (z) \tag{44}$$

между параллельными координатами u и v.

Придадимъ $f_3\ (z)$ нѣкоторое постоянное значеніе C. Тогда уравненіе (44) получитъ видъ

$$\frac{u}{\lambda_1}+\frac{v}{\lambda_2}=C\ . \tag{44'}$$

Сравнивая это уравненіе съ (41), мы видимъ, что уравненіе (44') опредѣляетъ нѣкоторую точку P, лежащую на линіи MN при любомъ значеніи координатъ u и v. Это значитъ, что при измѣненіи значеній u и v прямая MN перемѣщается, вращаясь около точки P. Положеніе этой точки опредѣлится, если мы проведемъ черезъ нее прямую $CP \parallel AU$ и BV до пересѣченія съ AB въ точкѣ C, длиной отрѣзковъ AC и CP. На основаніи (42), обозначая по прежнему AB черезъ s, AC и CB черезъ s_1 и s_2,

$$\frac{s_1}{s_2} = -\frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ ; \tag{45}$$

кромѣ того

$$s_1 - s_2 = s\ ; \tag{46}$$

отсюда

$$\frac{s_1}{s_1 - s} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

и

$$s_1 = s\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\ . \tag{47}$$

Съ другой стороны, называя длину CP черезъ w, на основаніи 2-го равенства (42) и (44'),

$$w = \frac{C}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} = C\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\ . \tag{48}$$

Величины s_1 и w вполнѣ опредѣляютъ положеніе точки P для даннаго значенія $f_3(z)$. Съ измѣненіемъ значенія $f_3(z)$ получается новая точка P' (и, въ зависимости отъ значеній u и v, новая серія прямыхъ, неизмѣнно проходящихъ черезъ эту новую точку).

При этомъ, разсматривая формулу (47), мы видимъ, что значеніе s_1 не зависитъ отъ измѣненій $f_3(z)$ и вообще является постояннымъ, при опредѣленныхъ, произвольно выбранныхъ s, λ_1 и λ_2. Это значитъ, что точки P, P' и т. д., опредѣляемыя уравненіемъ (44) при различныхъ значеніяхъ $f_3(z)$, располагаются непремѣнно по одной линіи, параллельной осямъ координатъ, положеніе которой опредѣляется выборомъ величинъ s, λ_1 и λ_2.

Такое свойство этихъ точекъ даетъ возможность находить ихъ графическимъ способомъ при данныхъ значеніяхъ u и v въ уравненіи

(44) или, что тоже, $f_1(x)$ и $f_2(y)$ въ уравненіи (33). Для этого, послѣ указаннаго выше построенія осей координатъ и масштабовъ функцій, нужно на линіи началъ AB намѣтить точку C въ разстояніи отъ A

$$s_1 = s\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \tag{47}$$

провести черезъ нее линію CP, параллельную осямъ, затѣмъ соединить точки масштабовъ функцій, соотвѣтствующія u и v, прямою MN. Точка пересѣченія прямыхъ MN и CP будетъ искомою.

Разсматривая, съ другой стороны, формулу (48), мы замѣчаемъ, что разстояніе точекъ P, P' и т. д. отъ точки C, удовлетворяющей равенству (47), при опредѣленныхъ значеніяхъ λ_1 и λ_2, зависитъ всецѣло отъ измѣненія значенія $f_1(z)$, причемъ прямо пропорціонально этому значенію и получается изъ него умноженіемъ на $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$. Это значитъ, что если бы мы представили $f_3(z)$, въ видѣ масштаба функцій, отложеннаго отъ точки C по линіи CP при модулѣ, равномъ $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, то точки, надписанныя значеніями $f_3(z)$, должны совпадать съ точками P, P' и т. д., которыя опредѣляются уравненіемъ (44) при этихъ значеніяхъ $f_3(z)$.

Эта связь между точками, удовлетворяющими уравненію (44), и соотвѣтствующими значеніями $f_3(z)$ даетъ возможность распространить графическій способъ опредѣленія непосредственно на значенія $f_3(z)$. Въ самомъ дѣлѣ, продолжимъ линію CP въ видѣ третьяго масштаба функцій, обозначивъ его черезъ CW, и нанесемъ на немъ отъ точки C длины w, опредѣляемыя равенствомъ

$$w = \lambda_3\ f_3(z) = \frac{\lambda_1\ \lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\ f_3\ (z), \tag{50}$$

гдѣ

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1\ \lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \tag{51}$$

есть модуль масштаба $f_3\ (z)$.

Имѣя теперь три масштаба функцій AU, BV и CW, мы можемъ, при заданныхъ значеніяхъ $f_1(x)$ и $f_2(y)$, найти тѣмъ же графическимъ пріемомъ одновременно положеніе точки, удовлетворяющей уравненію (44), и значеніе $f_3(z)$, удовлетворяющее уравненію (33). Для этого черезъ точки на масштабахъ AU и BV, соотвѣтствующія значеніямъ $f_1(x)$ и $f_2(y)$, проводимъ прямую линію, и послѣдняя въ

пересѣченіи съ масштабомъ CW дастъ искомую точку и укажетъ соотвѣтствующее значеніе $f_3(z)$.

Такимъ образомъ три масштаба AU, BV и CW изображаютъ графически связь между величинами $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$, входящими въ уравненіе вида (33), т. е. являются графическимъ представленіемъ уравненій даннаго вида. Какъ видно изъ предшествующаго, каждой комбинаціи значеній перемѣнныхъ въ уравненіи (33) на діаграммѣ соотвѣтствуетъ система трехъ точекъ съ числовыми отмѣтками, расположенныхъ на одной прямой, сѣкущей масштабы функцій. Это характеризуетъ методъ представленія уравненій, какъ методъ точекъ прямолинейнаго пересѣченія.

Способъ построенія трехъ масштабовъ функцій, которые мы называемъ сопряженными масштабами, ясенъ изъ предыдущаго. Нужно замѣтить только, что соотношеніе между модулемъ масштаба $f_3(z)$ и модулями функцій $f_1(x)$ и $f_2(y)$ можетъ быть приведено въ болѣе выразительную форму. Въ самомъ дѣлѣ, формула

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \tag{51}$$

путемъ преобразованія, получатъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3}. \tag{51'}$$

Итакъ, коротко говоря, для построенія діаграммы уравненія вида (33), выбравъ модули масштабовъ λ_1 и λ_2 и опредѣливъ модуль λ_3 по формулѣ (51'), достаточно взять на линіи AB точку C, удовлетворяющую равенству (47), провести черезъ точки A, B и C три параллельныя оси AU, BV, CW и нанести на этихъ осяхъ, начиная отъ точекъ A, B и C, соотвѣтственные масштабы функцій, опредѣляемые формулами (43) и (50).

Въ отношеніи пользованія діаграммами сопряженныхъ масштабовъ этого рода, къ предшествующему нужно добавить, что установленная связь между тремя функціями, входящими въ уравненіе (33), представляемое діаграммой, даетъ возможность опредѣлять значеніе любой изъ этихъ функцій, если извѣстны двѣ другія, тѣмъ же способомъ, какой мы вывели въ отношеніи $f_3(z)$. Вообще всякая прямая, пересѣкающая три сопряженные масштаба діаграммы, въ точкахъ пересѣченія съ ними даетъ значенія функцій, отложенныхъ по масштабамъ, одновременно удовлетворяющія уравненіе, представляемое діаграммой.

Принципъ діаграммъ, построенныхъ по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія, можетъ быть доказанъ также другими способами, не прибѣгая къ системѣ параллельныхъ координатъ. Напримѣръ, въ отношеніи уравненій съ тремя перемѣнными, о которыхъ пока шла рѣчь, можно разсуждать слѣдующимъ образомъ.

Пусть мы имѣемъ, по прежнему, уравненіе вида

$$f_1(x)+f_2(y)=f_3(z). \tag{33}$$

Возьмемъ на произвольной прямой (черт. 11) точки A и B и проведемъ черезъ нихъ двѣ параллельныя линіи AX и BY. Отложимъ на послѣднихъ $f_1(x)$ и $f_2(y)$ въ видѣ масштабовъ функцій, при модуляхъ λ_1 и λ_2, на основаніи равенствъ:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x)&=x', \\ \lambda_2 f_2(y)&=y', \end{aligned} \tag{52}$$

гдѣ x' и y'—длины соотвѣтственныхъ отрѣзковъ на линіяхъ AX и BY.

Замѣняя въ уравненіи (33) $f_1(x)$ и $f_2(y)$ согласно (52), получаемъ уравненіе

$$\frac{x}{\lambda_1}+\frac{y}{\lambda_2}=f_3(z). \tag{53}$$

Дадимъ $f_3(z)$ постоянное значеніе $f_3(z_0)$.

Тогда уравненіеіе (53) обратится въ

$$\frac{x}{\lambda_1}+\frac{y}{\lambda_2}=f_3(z_0). \tag{53'}$$

Пусть это послѣднее удовлетворяется нѣкоторыми величинами x_0 и y_0, т. е.

$$\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{y_0}{\lambda_2}=f_3(z_0). \tag{53''}$$

Величины x_0 и y_0 на черт. 11 опредѣляютъ нѣкоторую прямую X_0Y_0. Эта прямая, въ зависимости отъ измѣненія значеній x и y, мѣняетъ свое положеніе, вращаясь около постоянной точки, положеніе которой легко опредѣляется.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что уравненіе (53') удовлетворяется другой парой величинъ x_1 и y_1, т. е.

$$\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{y_1}{\lambda_2}=f_3(z_0), \tag{53'''}$$

причемъ опредѣляется другая прямая X_1Y_1. Назовемъ точку пересѣченія прямыхъ X_0Y_0 и X_1Y_1 черезъ P и опредѣлимъ ея положеніе.

Изъ уравненій (53″) и (53‴) слѣдуетъ, что

$$\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{y_0}{\lambda_2}=\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{y_1}{\lambda_2}\,, \tag{54}$$

$$\frac{1}{\lambda_1}(x_0-x_1)=\frac{1}{\lambda_2}(y_1-y_0)\,,$$

$$\frac{x_0-x_1}{y_1-y_0}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{55}$$

или, по чертежу,

$$\frac{X_0X_1}{Y_0Y_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,. \tag{55'}$$

Проведемъ черезъ точку P прямую CZ, параллельную AX и BY, до пересѣченія съ AB въ точкѣ C, и прямую QR, параллельную AB.

Треугольники X_0PX_1 и Y_0PY_1 подобны между собою. Поэтому

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{X_0X_1}{Y_0Y_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{56}$$

или, что тоже,

$$\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,. \tag{56'}$$

Съ другой стороны, подобіе $\triangle$—ковъ X_0PQ и Y_0PR даетъ:

$$\frac{QX_0}{RY_0}=\frac{PQ}{PR}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{57}$$

Принимая во вниманіе, что

$$\begin{aligned} QX_0&=x_0-CP\,,\\ RY_0&=CP-y_0\,, \end{aligned} \tag{58}$$

имѣемъ

$$\frac{x_0-CP}{CP-y_0}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,, \tag{57'}$$

откуда

$$CP=\frac{\lambda_2x_0+\lambda_1y_0}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{59}$$

Но уравненіе (53′) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\lambda_2 x_0 + \lambda_1 y_0 = \lambda_1 \lambda_2 f_3 (z_0). \qquad (53^{IV})$$

Отсюда окончательное значеніе для CP получается въ видѣ

$$CP = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f_3(z_0). \qquad (60)$$

Соотношенія (56′) и (60), при извѣстной длинѣ линіи AB, вполнѣ опредѣляютъ точку P. Сравнивая ихъ съ (45) и (50), мы видимъ, что нашъ способъ доказательства приводитъ къ тѣмъ же результатамъ, что и примѣненіе параллельныхъ координатъ.

Соотношеніе (56′) показываетъ, что точка пересѣченія прямыхъ $X_0 Y_0$ и $X_1 Y_1$ находится на неподвижной оси CZ. Соотношеніе (60) доказываетъ съ другой стороны, что разстояніе CP точки P отъ AB, при постоянномъ значеніи $f_3(z_0)$, постоянно, и слѣдовательно точка P остается также постоянной, что и требовалось доказать. Положеніе точки P опредѣляется, если мы проведемъ прямую $CZ \parallel AX$ и BY на такомъ разстояніи между ними, чтобы было удовлетворено отношеніе

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad (56')$$

и на этой прямой отъ AB отложимъ длину

$$CP = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f_3 (z_0) \qquad (60)$$

На основаніи этого, если нанести соотвѣтственно на AX, BY, CZ $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$, входящія въ уравненіе (33), въ видѣ масштабовъ функцій, при модуляхъ λ_1, λ_2 и $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, то дѣленія, соотвѣтствующія значеніямъ перемѣнныхъ, удовлетворяющимъ одновременно уравненію, будутъ находиться на одной прямой, пересѣкающей всѣ три масштаба. Изъ этого слѣдуетъ, очевидно, что если даны значенія двухъ изъ упомянутыхъ перемѣнныхъ, то будетъ достаточно провести прямую, соединяющую соотвѣтственныя точки двухъ масштабовъ, для того чтобы прочесть въ пересѣченіи съ третьимъ масштабомъ значеніе третьей перемѣнной

Способъ графическаго построенія при помощи сопряженныхъ масштабовъ можетъ быть примѣненъ къ уравненіямъ вида, аналогичнаго (33), не только съ тремя перемѣнными, но и съ какимъ угодно числомъ ихъ. Это докажемъ въ самомъ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, что у насъ имѣется уравненіе съ n перемѣнными, вида

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) + \ldots + f_{n-2}(u) + f_{n-1}(v) = f_n(w), \qquad (61)$$

которое мы желаемъ рѣшить относительно перемѣнной w.

Возьмемъ линію AN (черт. 12) и на ней намѣтимъ $n-1$ точекъ A, B, C, ... M, N, на произвольномъ разстояніи одна отъ другой.

Проведемъ черезъ эти точки рядъ параллельныхъ прямыхъ, въ видахъ удобства, перпендикулярно линіи AN, именно AX, BY, CZ, . . . MU, NV, и будемъ откладывать на этихъ прямыхъ, начиная отъ AN, величины $f_1(x)$, $f_2(y)$, . . . $f_{n-1}(v)$ въ видѣ масштабовъ функцій, при модуляхъ λ_1, λ_2, . . . λ_{n-1}, на основаніи равенствъ

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x) &= x', \\ \lambda_2 f_2(y) &= y', \\ \lambda_3 f_3(z) &= z', \\ &\ldots\ldots \\ \lambda_{n-1} f_{n-1}(v) &= v'. \end{aligned} \qquad (62)$$

Выражая $f_1(x)$, $f_2(y)$, . . . $f_{n-1}(v)$ при посредствѣ λ_1, λ_2, . . . и x', y', . . . и внося въ уравненіе (61), получаемъ новое уравненіе:

$$\frac{x'}{\lambda_1} + \frac{y'}{\lambda_2} + \frac{z'}{\lambda_3} + \ldots + \frac{u'}{\lambda_{n-2}} + \frac{v'}{\lambda_{n-1}} = f_n(w). \qquad (63)$$

Если мы представимъ это послѣднее въ видѣ

$$\frac{1}{\lambda_1}x' + \frac{1}{\lambda_2}y' + \frac{1}{\lambda_3}z' + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-2}}u' + \frac{1}{\lambda_{n-1}}v = f_n(w), \qquad (63')$$

то увидимъ, что первая часть его можетъ быть разсматриваема, какъ

сумма моментовъ параллельныхъ силъ, равныхъ $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_{n-1}}$, около оси представляемой линіей AN, причемъ величины x', y', z', ... v' служатъ плечами моментовъ.

Въ силу этого величину $f_n(w)$ можно представлять въ видѣ момента равнодѣйствующей этихъ силъ и примѣнять къ величинамъ, входящимъ въ уравненіе (63'), пріемы, соотвѣтствующіе зависимости между моментами равнодѣйствующей и составляющихъ.

Пусть $f_n(w)$ имѣетъ нѣкоторое частное значеніе $f_n(w_0)$, и уравненіе (63') удовлетворяется при этомъ значеніями x'_0, y'_0, $z'_0 \ldots v'_0$, которыя отложены по линіямъ AX, BU, ... NV въ видѣ длинъ AX_0, BY_0, ... NV_0. Отнесемъ всѣ построенные нами элементы къ прямоугольной системѣ координатъ $\Xi\,\Omega\,Y\,Z$, въ которой прямая AN принята за ось абсциссъ, а ось ординатъ || построеннымъ масштабамъ функцій, и положимъ, что разстоянія отъ начала координатъ до точекъ A, B, ... N будутъ s_1, $s_2 \ldots s_{n-1}$. Такимъ образомъ мы имѣемъ въ плоскости $\Xi\,\Omega\,Y$ $n-1$ точекъ приложенія параллельныхъ силъ $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \ldots \frac{1}{\lambda_{n-1}}$, направленныхъ $\perp$ этой плоскости, именно X_0, $У_0$, Z_0, ... U_0, V_0, которыхъ абсциссы будутъ $s_1, s_2, s_3, \ldots s_{n-2}, s_{n-1}$, а ординатами служатъ длины x'_0, y'_0, z'_0, ... u'_0, v'_0. Беря моменты данныхъ силъ и равнодѣйствующей ихъ относительно осей координатъ $\Omega\Xi$ и ΩY, не трудно видѣть, что координаты точки приложенія равнодѣйствующей опредѣляются аналитически формулами:

$$s_n = \frac{\frac{1}{\lambda_1}s_1 + \frac{1}{\lambda_2}s_2 + \frac{1}{\lambda_3}s_3 + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-2}}s_{n-2} + \frac{1}{\lambda_{n-1}}s_{n-1}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-2}} + \frac{1}{\lambda_{n-1}}} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{m=n-1} \frac{s_m}{\lambda_m}}{\sum\limits_{m=1}^{m=n-1} \frac{1}{\lambda_m}} \quad (64)$$

$$w'_0 = \frac{\frac{1}{\lambda_1}x'_0 + \frac{1}{\lambda_2}y'_0 + \frac{1}{\lambda_3}z'_0 + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-2}}u'_0 + \frac{1}{\lambda_{n-1}}v'_0}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-2}} + \frac{1}{\lambda_{n-1}}} = \frac{f_n(w_0)}{\sum\limits_{m=1}^{m=n-1} \frac{1}{\lambda_m}} \quad (65)$$

Полученныя нами выраженія чрезвычайно интересны. Разсматривая ихъ, мы видимъ, прежде всего, что величина абсциссы точки приложенія равнодѣйствующей s_n не зависитъ ни отъ одной изъ перемѣнныхъ, входящихъ въ уравненіе (63′), а находится въ зависимости только отъ величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ и $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$. Такъ какъ величины λ_m и s_m, согласно предположенію, выбираются произвольно и для данной діаграммы являются постоянными, то и величина s_n можетъ считаться постоянной. Такимъ образомъ точка приложенія равнодѣйствующей, о которой мы говоримъ, при опредѣленныхъ и произвольно выбранныхъ λ_m и s_m, находится всегда на одной и той же ординатѣ, которой абсцисса s_n опредѣляется формулой (64).

Съ другой стороны формула (65) показываетъ, что ордината точки приложенія нашей равнодѣйствующей, при опредѣленныхъ λ_m, зависитъ исключительно отъ измѣненія значенія $f_n(w)$ и пропорціональна этому значенію. Отсюда слѣдуетъ, наоборотъ, что если можно какимъ либо способомъ найти эту точку приложенія, то достаточно измѣрить ея ординату, для того чтобы имѣть искомое значеніе $f_n(w_0)$ Для нахожденія точки приложенія равнодѣйствующей параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ опредѣленныхъ точкахъ, легко использовать извѣстные графическіе способы. Примѣняя ихъ, мы можемъ, благодаря свойству выраженія (65), получить графическій способъ нахожденія $f_n(w_0)$.

Извѣстно, что геометрическое опредѣленіе точки приложенія равнодѣйствующей какого угодно числа параллельныхъ силъ сводится къ опредѣленію точки приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ. Равнодѣйствующая двухъ какихъ либо силъ, по сложеніи съ третьей силой, даетъ равнодѣйствующую системы этихъ трехъ силъ и ея точку приложенія; эта послѣдняя, по сложеніи съ четвертой силой, дастъ равнодѣйствующую четырехъ силъ, и т. д. въ послѣдовательномъ порядкѣ, до общей равнодѣйствующей всѣхъ данныхъ силъ. При этомъ, конечно, можно дѣйствовать въ какомъ угодно порядкѣ. Извѣстно также, что точка приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ находится на линіи, соединяющей точки приложенія слагаемыхъ, и дѣлитъ эту линію на части, обратно пропорціональныя величинамъ слагаемыхъ.

Такимъ образомъ для даннаго случая нахожденіе точки приложенія равнодѣйствующей P, находящейся на ординатѣ SW, можетъ быть произведено слѣдующимъ порядкомъ. Начнемъ съ нахожденія точки приложенія равнодѣйствующей силъ $\frac{1}{\lambda_1}$ и $\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)$, приложенныхъ въ X_0 и Y_0,

которую назовемъ $P_{1,2}$. Для нахожденія абсциссы этой точки мы должны, по (64), отложить отъ Ω длину

$$s_{1,2}=\frac{\frac{1}{\lambda_1}s_1+\frac{1}{\lambda_2}s_2}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}=\frac{s_1\,\lambda_2+s_2\,\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (64')$$

Вычисляя, на основанія этого выраженія, длины отрѣзковъ отъ точки $S_{1,2}$ до A и B, а затѣмъ отношеніе ихъ, мы получаемъ:

$$AS_{1,2}=s_{1,2}-s_1=\frac{\lambda_1\,(s_2-s_1)}{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$S_{1,2}\,B=s_2-s_{1,2}=\frac{\lambda_2\,(s_2-s_1)}{\lambda_1+\lambda_2}, \qquad (66)$$

$$\frac{AS_{1,2}}{S_{1,2}B}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}},$$

т. е. конецъ абсциссы искомой точки приложенія равнодѣйствующей силъ $\frac{1}{\lambda_1}$ и $\frac{1}{\lambda_2}$ дѣлитъ разстояніе между точками A и B на части, обратно пропорціональныя величинамъ $\frac{1}{\lambda_1}$ и $\frac{1}{\lambda_2}$, что мы и должны были ожидать, на основаніи предшествующаго. Такимъ образомъ положеніе ординаты $S_{1,2}\,W_{1,2}$, на которой лежитъ точка $P_{1,2}$, опредѣляется очень просто путемъ дѣленія отрѣзка AB между линіями ординатъ точекъ приложенія слагающихъ $\frac{1}{\lambda_1}$ и $\frac{1}{\lambda_2}$ обратно пропорціонально послѣднимъ или, въ данномъ случаѣ, пропорціонально модулямъ соотвѣтственныхъ масштабовъ.

Для нахожденія ординаты точки $P_{1,2}$ достаточно соединить прямою линіей точки приложенія слагающихъ X_0 и Y_0. Пересѣченіе линіи $X_0\,Y_0$ съ направленіемъ ординаты опредѣлитъ намъ положеніе точки $P_{1,2}$ и длину ординаты $S_{1,2}\,P_{1,2}$.

Взявъ затѣмъ только что найденную точку $P_{1,2}$ и точку приложенія слѣдующей слагающей Z_0, подобнымъ же образомъ можно найти точку приложенія $P_{1,2,3}$ слѣдующей частной равнодѣйствующей, и такъ

далѣе, въ послѣдовательномъ порядкѣ. Такимъ графическимъ процессомъ мы найдемъ въ концѣ концовъ точку приложенія общей равнодѣйствующей всѣхъ силъ P, абсцисса и ордината которой удовлетворяютъ формуламъ (64) и (65).

Формула (65) показываетъ, что между ординатой точки P и величиной $f_n(w_0)$ существуетъ неразрывная связь. Именно ордината w'_0 прямо пропорціональна величинѣ $f_n(w_0)$ и получается изъ послѣдней умноженіемъ на $\dfrac{1}{\sum\limits_{m=1}^{m=n-1}\dfrac{1}{\lambda_m}}$. Это значитъ, что если мы отложимъ $f_n(w_0)$ на ординатѣ точки P отъ начала ея въ видѣ масштаба функцій, при модулѣ $\dfrac{1}{\sum\limits_{m=1}^{m=n-1}\dfrac{1}{\lambda_m}}$, то положеніе точки P на ординатѣ опредѣлитъ, отмѣткой на масштабѣ функціи, величину $f_n(w_0)$.

Такимъ образомъ весь процессъ, ведущій къ опредѣленію $f_n(w_0)$ удовлетворяющей уравненію (63′) и (61), сводится къ ряду графическихъ построеній на діаграммѣ, представляющей рядъ параллельныхъ осей, а именно масштабовъ функцій AX, BY, CZ . . . MU, NV и SW и вспомогательныхъ осей $S_{1,2}W_{1,2}$, $S_{1,2,3}W_{1,2,3}$ . . . Эти элементы вполнѣ опредѣляютъ соотношеніе между перемѣнными уравненія (61) и потому совмѣстно являются графическимъ представленіемъ этого уравненія.

Замѣтимъ въ концѣ концовъ, что модуль масштаба искомой функціи $f_n(w)$ удовлетворяетъ слѣдующимъ соотношеніямъ:

$$\lambda_n = \frac{1}{\sum\limits_{m=1}^{m=n-1}\dfrac{1}{\lambda_m}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}+\ldots+\dfrac{1}{\lambda_{n-1}}} \tag{67}$$

или

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n-2}}+\frac{1}{\lambda_{n-1}}. \tag{67'}$$

Послѣднее соотношеніе вполнѣ соотвѣтствуетъ выраженію (51′) для случая уравненія съ тремя перемѣнными, выведенному ранѣе при помощи параллельныхъ координатъ.

Итакъ, для построенія діаграммы уравненія съ n перемѣнными x, y, . . . v, w вида (61), въ видахъ опредѣленія перемѣнной w, нужно прежде всего отъ произвольныхъ точекъ, лежащихъ на одной прямой, построить $n-1$ параллельныхъ масштабовъ, соотвѣтствующихъ перемѣннымъ x, y, . . . v, при произвольно выбранныхъ модуляхъ λ_1, λ_2. . . . λ_{n-1}, затѣмъ, путемъ послѣдовательнаго дѣленія разстояній между масштабами пропорціонально модулямъ (основнымъ и вспомогательнымъ), провести вспомогательныя оси $S_{1,2}W_{1,2}$, $S_{1,2,3}W_{1,2,3}$ . . . и ось масштаба искомой перемѣнной SW и, наконецъ, градуировать масштабъ этой послѣдней перемѣнной согласно равенству (67′). Понятно, что построеніе вспомогательныхъ осей можетъ быть произведено въ любомъ порядкѣ перемѣнныхъ.

Для нахожденія значенія перемѣнной w_0 по заданнымъ значеніямъ другихъ перемѣнныхъ x_0, y_0, z_0 , . . v_0 нужно, проведя черезъ точки X_0 и $У_0$ прямую, найти пересѣченіе ея со вспомогательной осью $S_{1,2}W_{1,2}$, затѣмъ черезъ эту точку пересѣченія и Z_0 провести прямую и найти ея пересѣченіе съ осью $S_{1,2,3}W_{1,2,3}$ и т. д., до тѣхъ поръ, пока въ пересѣченіи послѣдней сѣкущей съ масштабомъ SW не получимъ искомое значеніе w_0.

Для нахожденія другой перемѣнной, удовлетворяющей тому же уравненію, можетъ быть, конечно, примѣненъ тотъ же составъ основныхъ масштабовъ, но при другой комбинаціи вспомогательныхъ осей.

Возьмемъ для примѣра уравненіе съ четырьмя перемѣнными вида

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = f_4(u), \tag{61}$$

которое мы желаемъ рѣшить въ отношеніи $f_4(u)$. Выберемъ на линіи AC (черт. 13) три произвольныя точки A, B и C и проведемъ черезъ нихъ три параллельныя линіи AX, $BУ$, CZ. Отложимъ на послѣднихъ $f_1(x)$, $f_2(y)$ и $f_3(z)$ въ видѣ масштабовъ функцій, при произвольныхъ модуляхъ λ_1, λ_2, λ_3. Возьмемъ нѣкоторыя частныя значенія перемѣнныхъ x_0 и y_0. Для этихъ значеній на масштабахъ получаются точки X_0, Y_0. Раздѣлимъ разстояніе AB на части, пропорціональныя отношенію $\lambda_1:\lambda_2$ (обратно пропорціональныя $\frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2}$), и черезъ полученную точку $S_{1,2}$ проведемъ линію $S_{1,2}U_{1,2} \parallel AX$ и $BУ$. Соединимъ точки X_0 и $У_0$ прямою. Пересѣченіе $X_0 У_0$ съ $S_{1,2}U_{1,2}$ дастъ намъ

точку $P_{1,2}$. Изъ предыдущаго ясно значеніе этой точки. Если бы мы имѣли уравненіе

$$f_1(x_0) + f_1(y_0) = f_{1,2}(u_{1,2}), \tag{69}$$

то, откладывая по линіи $S_{1,2}U_{1,2}$ $f_{1,2}(u_{1,2})$ въ видѣ масштаба функціи при модулѣ $\lambda_{1,2}$, опредѣляемомъ соотношеніемъ

$$\frac{1}{\lambda_{1,2}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}, \tag{67''}$$

точка $P_{1,2}$ опредѣлила бы намъ, числовой отмѣткой масштаба, величину $f_{1,2}(u_{1,2})$ при данныхъ x_0, y_0.

Теперь раздѣлимъ разстояніе $S_{1,2}C$ на части, пропорціональныя отношенію $\lambda_{1,2} : \lambda_3$ и черезъ полученную точку S проведемъ прямую SU, параллельную прочимъ масштабамъ. Соединимъ точку $P_{1,2}$ съ Z_0. Прямая $P_{1,2}$ Z_0 въ пересѣченіи съ SU дастъ точку P_0. Если на линіи SU мы отложимъ $f_4(u)$ въ видѣ масштаба функціи, при модулѣ λ_4, удовлетворяющемъ выраженію

$$\frac{1}{\lambda_4} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3}, \tag{67'''}$$

то точка P_0 дастъ намъ, числовой отмѣткой масштаба, значеніе $f_4(u)$ для данныхъ значеній x_0, y_0 и z_0. Построенные такимъ образомъ четыре сопряженные масштаба функціи AX, $BУ$, CZ и SU даютъ возможность совершенно такимъ же образомъ опредѣлить значеніе $f_4(u)$ для любыхъ заданныхъ значеній $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$.

Тоже самое построеніе могло быть исполнено въ другомъ порядкѣ перемѣнныхъ, начиная, напримѣръ, съ перемѣнныхъ x и z. Тогда получились бы первоначально (черт. 13) линіи $S_{1,3}U_{1,3}$ и X_0Z_0 и точка $P_{1,3}$, а затѣмъ, въ связи съ точкой $У_0$, окончательно прежняя линія SU и точка P_0.

Еслибы въ уравненіи (68) были извѣстны величины $f_4(u_0)$ и еще двухъ любыхъ перемѣнныхъ, напримѣръ $f_1(x_0)$ и $f_3(z_0)$, то, имѣя построенные четыре сопряженные масштаба, легко найти значеніе $f_2(y)$. Для этого достаточно, построивъ прямыя $S_{1,3}U_{1,3}$ и X_0Z_0, найти точку $P_{1,3}$. Соединивъ послѣднюю съ точкой P_0 и продолживъ до пересѣченія съ масштабомъ $BУ$, находимъ точку $У_0$, опредѣляющую значеніе $f_2(y_0)$.

При построеніи четырехъ основныхъ масштабовъ AX, BY, CZ и SU приходится прибѣгать къ построенію вспомогательныхъ линій $S_{1,2}U_{1,2}$, $S_{2,3}U_{2,3}$, $S_{1,3}U_{1,3}$ (черт. 13). Отдѣльныя точки этихъ линій $P_{1,2}$, $P_{2,3}$, $P_{1,3}$, какъ мы видѣли въ примѣненіи къ одному случаю, изображаютъ, подобно точкамъ X_0, Y_0, Z_0, P, значенія нѣкоторыхъ функцій $f_{1,2}(u_{1,2})$, $f_{2,3}(u_{2,3})$, $f_{1,3}(u_{1,3})$, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(y) &= f_{1,2}(u_{1,2}), \\ f_2(y) + f_3(z) &= f_{2,3}(u_{2,3}), \\ f_1(x) + f_3(z) &= f_{1,3}(u_{1,3}). \end{aligned} \tag{69'}$$

Когда эти послѣднія функціи имѣютъ сами по себѣ реальное значеніе, то онѣ могутъ быть опредѣляемы по общему правилу, если мы нанесемъ ихъ на линіяхъ $S_{1,2}U_{1,2}$, $S_{2,3}U_{2,3}$, $S_{1,2}U_{1,3}$, въ видѣ масштабовъ функцій, при соотвѣтственно опредѣленныхъ модуляхъ масштабовъ. При этомъ условіи діаграмма сопряженныхъ масштабовъ, построенная аналогично черт. 13, обратилась бы въ органическое сочетаніе семи сопряженныхъ масштабовъ, которые даютъ возможность графическаго рѣшенія четырехъ уравненій

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = f_4(u), \tag{68}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(y) &= f_{1,2}(u_{1,2}), \\ f_2(y) + f_3(z) &= f_{2,3}(u_{2,3}), \\ f_1(x) + f_3(z) &= f_{2,3}(u_{2,3}), \end{aligned} \tag{69'}$$

и графическаго опредѣленія семи перемѣнныхъ, если въ каждомъ случаѣ рѣшенія даны значенія трехъ основныхъ перемѣнныхъ.

Такимъ же образомъ можно было бы убѣдиться, что можно построить діаграмму сопряженныхъ масштабовъ, заключающую по одному масштабу для каждой перемѣнной, которая будетъ давать значенія функціи $f_n(w)$, удовлетворяющей уравненію

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) + \ldots + f_{n-2}(u) + f_{n-1}(u) = f_n(w), \tag{67}$$

а также значенія функцій, удовлетворяющихъ уравненіямъ, образованнымъ по аналогіи съ уравненіями (69') Ясно также, что такая же діаграмма могла бы дать значеніе любой изъ функцій, входящихъ въ

уравненіе (61), какъ функціи $n-2$ другихъ функцій первой части уравненія и $f_n(w)$.

Въ отличіе отъ выше указанныхъ органическихъ сочетаній сопряженныхъ масштабовъ, исходящихъ изъ одного основного уравненія вида (61) и образованныхъ изъ него же уравненій (69'), возможны и въ практикѣ встрѣчаются другія комбинаціи такихъ масштабовъ, представляющія чисто механическое соединеніе группъ сопряженныхъ масштабовъ, исходящихъ изъ нѣсколькихъ уравненій простого трехчленнаго типа.

Допустимъ, напримѣръ, что мы имѣемъ нѣсколько уравненій, предназначенныхъ для рѣшенія аналогичныхъ или послѣдовательныхъ задачъ, слѣдующаго вида:

$$f_1(x) + f_2(y) = f_3(z), \tag{70}$$

$$f_1(x) + f_4(u) = f_5(v), \tag{70'}$$

$$f_2(y) + f_4(u) = f_6(w). \tag{70''}$$

Представимъ уравненіе (70), по обычнымъ правиламъ, въ видѣ діаграммы трехъ сопряженныхъ масштабовъ. Никто не мѣшаетъ намъ, воспользовавшись наличностью масштаба $f_1(x)$, построить на той же діаграммѣ уравненіе (70'), оставивъ положеніе и модуль этого масштаба и добавивъ соотвѣтственнымъ образомъ масштабы $f_4(u)$ и $f_5(v)$. Затѣмъ такимъ же образомъ масштабы $f_2(y)$ и $f_4(u)$ могутъ войти въ діаграмму уравненія (70''), и т. д. Разница между такой комбинаціей масштабовъ и сочетаніемъ, о которомъ говорилось раньше, ясна сама собой. Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ чисто механическимъ соединеніемъ на одномъ чертежѣ масштабовъ, группы которыхъ представляютъ самостоятельныя діаграммы отдѣльныхъ уравненій. Связь между ними сводится только къ общимъ масштабамъ функцій, входящихъ въ нѣсколько уравненій. Діаграммы эти строятся и функціонируютъ совершенно независимо одна отъ другой и могутъ быть во всякое время разбиты на нѣсколько самостоятельныхъ діаграммъ.

Уравненіе вида

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) \ldots f_{n-2}(u) \cdot f_{n-1}(v) = f_n(w), \tag{71}$$

котораго первая часть представляетъ произведеніе функцій, сводится къ разсмотрѣнному выше (61) при посредствѣ логарифмированія обѣихъ частей уравненія. Тогда имѣемъ, въ самомъ дѣлѣ:

$$\log f_1(x) + \log f_2(y) + \log f_3(z) + \ldots + \log f_{n-1}(v) = \log f_n(w). \tag{71'}$$

Послѣ этого, чтобы найти графически значеніе $f_n(w)$, или также одной изъ прочихъ функцій, въ зависимости отъ $n-1$ другихъ, достаточно построить діаграмму, подобную той, которая была описана, нанося по ординатамъ въ видѣ масштабовъ функцій не самыя функціи, а ихъ логарифмы, что легко сдѣлать, пользуясь логарифмическимъ масштабомъ.

Въ заключеніе нужно сказать нѣсколько словъ о практическихъ пріемахъ построенія діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ. Ясно прежде всего, что свобода выбора модулей λ_1 и λ_2 дѣлаетъ данный методъ весьма удобнымъ въ приложеніи. Благодаря этому обстоятельству, всегда можно взять оба основные масштаба одинаковой длины. Разберемъ сначала способъ построенія трехъ сопряженныхъ масштабовъ для уравненія

$$f_1(x) + f_2(y) = f_3(z) \tag{33}$$

въ идеальномъ случаѣ, съ тѣмъ чтобы потомъ указать отступленія, обусловливаемыя практикой.

Прежде всего можно задаться произвольно длиною масштабовъ. Модули λ_1 и λ_2 получаются по обычнымъ правиламъ построенія масштабовъ [1]), на основаніи формулы

$$\lambda\,[f\,(x_n) - f\,(x_1)] = L\,, \tag{72}$$

гдѣ λ—искомая величина модуля,

$f\,(x_1)$ и $f\,(x_n)$—крайнія значенія функціи,

L—принятая длина масштаба,

а модуль λ_3 по формулѣ (51′).

Послѣ этого наносимъ на двухъ параллельныхъ осяхъ масштабъ $f_1\,(x)$, начиная отъ точки A къ X (черт. 14), и масштабъ $f_2\,(y)$ отъ B къ $У$. Такъ какъ наклоненіе линіи началъ координатъ къ осямъ въ параллельныхъ координатахъ можетъ быть какое угодно, то выбираемъ точки A и B на линіи, перпендикулярной къ направленію AX и $BУ$. Разстояніе масштабовъ AX и $BУ$ произвольно. Поэтому мы можемъ выбрать его такимъ образомъ, чтобы наименьшій уголъ, составляемый при чтеніи линейкой или указательной чертой транспаранта съ направленіемъ масштабовъ, не былъ слишкомъ малъ и имѣлъ желательную намъ величину (напримѣръ, $\frac{\pi}{4}$) .

1) D'Ocagne. Traité de Nomographie, p. 3—6.

Теперь проведемъ линію CZ, параллельную двумъ другимъ масштабамъ, такимъ образомъ, чтобы

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \tag{45}$$

и выбираемъ пару значеній перемѣнныхъ x и y, для которыхъ значенія перемѣнной z получались бы изъ основного уравненія наиболѣе удобнымъ образомъ. Проведя на діаграммѣ соотвѣтственныя линіи и найдя соотвѣтственныя значенія z, не трудно построить масштабъ функціи $f_3(z)$, въ предѣлахъ прямыхъ AB и XY.

Таковъ теоретическій типъ діаграммы сопряженныхъ масштабовъ. Въ практикѣ можно болѣе или менѣе отступать отъ него.

Ясно, напримѣръ, что если вычисленныя значенія модулей λ_1 и λ_2 не выражаются простыми числами, ихъ приходится округлять, что вводитъ неравенство длины масштабовъ. Съ другой стороны, форматъ діаграммы можетъ заставить уменьшить разсчитанный предѣльный уголъ наклоненія индекса транспаранта къ линіямъ масштабовъ. Случается, что на практикѣ предѣльныя значенія той или другой перемѣнной относятся только къ части масштаба другой перемѣнной. Тогда масштабъ Z можетъ быть соотвѣтственно уменьшенъ.

III. Примѣненіе способа сопряженныхъ масштабовъ къ формулѣ Лампе.

Формула Лампе явилась результатомъ извѣстныхъ опытовъ, произведенныхъ авторомъ ея, профессоромъ Dr. Lampe, въ 1869—1871 гг. надъ водоводомъ, доставляющимъ воду для водоснабженія г. Данцига отъ дер. Прангенау. Типъ ея выработанъ на основаніи разсмотрѣнія опытовъ Пуазеля, Якобсона и Гагена надъ движеніемъ воды въ трубахъ малаго діаметра и критическаго обсужденія выводовъ и формулъ, полученныхъ Гагеномъ изъ опытовъ Дарси и своихъ собственныхъ [1]).

Гагенъ, занимаясь изслѣдованіемъ, на основаніи результатовъ извѣстныхъ тогда [2]) наблюденій, какое изъ соотношеній вида

$$i = m v^z , \tag{73}$$

$$i = m v + p v^2 , \tag{74}$$

$$i = m_1 v^2 \tag{75}$$

[1]) Dr. Lampe. Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren. Civiling. 1873.

[2]) Hagen, G. Ueber die Bewegung des Wassers in cylindrischen, nahe horizontalen Leitungen. B. 1870.

лучше всего подходитъ для выраженія i, первоначально остановился на логарифмической формулѣ типа

$$\frac{i}{v} = m\,v^z, \tag{73'}$$

гдѣ $m = \frac{n}{D^{1,25}}$,

n — *const.*,

z — десятичная дробь, меньшая 1.

Однако затѣмъ онъ отказался отъ формулы этого типа и нашелъ болѣе подходящимъ видъ (74), результатомъ чего и явилась его многочленная формула

$$i = \frac{n}{D^2}\,v + \frac{n_1}{D}\,v^2. \tag{76}$$

Въ этой формулѣ первоначально оба коеффиціента n и n_1 были постоянными, а затѣмъ было принято, что n—функція (трехчленная) температуры 0, а n_1 – const.

Лампе, примѣнивъ формулу (76) въ окончательной редакціи къ опытамъ Пуазеля и Якобсона и къ своимъ опытамъ надъ Данцигскимъ водопроводомъ, нашелъ, что коеффиціенты n и n_1, которые (при одной и той же температурѣ) должны были быть постоянными, оказываются различными для каждаго случая. Это заставило Лампе, для выраженія результатовъ своихъ опытовъ, заняться выработкой новой, болѣе совершенной формулы.

Первоначально Лампе сдѣлалъ попытку, оставивъ общій видъ формулы Гагена (76), ограничиться измѣненіемъ коеффиціентовъ n и n_1, причемъ онъ исключилъ зависимость отъ температуры и принялъ оба коеффиціента постоянными. Такимъ образомъ получилась первая формула Лампе, нелогарифмическаго вида,

$$\frac{i}{v} = m + pv, \tag{77}$$

гдѣ m и p - функціи діаметра.

Однако эта формула не удовлетворила Лампе, и онъ, воспользовавшись прецедентомъ Гагена, сдѣлалъ попытку выразить результаты своихъ опытовъ аналитически при помощи формулы логарифмическаго вида. Такимъ образомъ получилась вторая по счету формула Лампе, логарифмическая, съ постояннымъ коеффиціентомъ, вида

$$\frac{i}{v} = m\,v^z, \tag{78}$$

въ которой m = const. = 0,0027716,

z = 0,80186.

Но затѣмъ оказалось, что формула (78) съ постояннымъ коеффиціентомъ m никакъ не покрываетъ данныхъ опыта, и Лампе сдѣлалъ m функціей діаметра, возведеннаго въ дробную степень, причемъ показатель 1,25 былъ заимствованъ изъ старой формулы Гагена.

Такимъ образомъ получилась окончательная, третья формула Лампе. Она имѣетъ видъ

$$\frac{i}{v} = m_1 v^z , \tag{79}$$

гдѣ $m_1 = \frac{n}{D^{1,25}}$,

n — const.,

$z = 0,802$.

Для новыхъ трубъ Лампе принимаетъ [1]) коеффиціентъ n равнымъ 0,0007555.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ формула получаетъ видъ

$$i = n \frac{v^{1,802}}{D^{1,25}} = 0,0007555 \frac{v^{1,802}}{D^{1,25}} . \tag{80}$$

Оказалось, что эта формула, покрывая результаты опытовъ автора надъ Данцигскимъ водопроводомъ, довольно хорошо согласуется съ опытами Дарси, хотя и менѣе примѣнима для трубъ малаго діаметра.

Такое совпаденіе съ явленіями дѣйствительности, въ предѣлахъ употребительныхъ на практикѣ размѣровъ, въ связи съ общепризнанной цѣнностью опытовъ автора, выдѣлило формулу Лампе изъ многочисленнаго ряда гидравлическихъ формулъ и обезпечило ей вниманіе спеціалистовъ. Это доказывается, напримѣръ, отзывами американскаго гидравлика Г. Смита [2]), Венера [3]), проф. Н. К. Чижова, А. А. Саткевича, инж. Линдлея, а также значительнымъ распространеніемъ въ практикѣ, между прочимъ и у насъ въ Россіи [4]). Г. Смитъ, работавшій спеціально надъ вопросомъ о сравнительномъ достоинствѣ разныхъ опытовъ и формулъ гидравлики, держится самаго высокаго мнѣнія о точности и практической цѣнности опытовъ Лампе [5]). Результаты произведеннаго имъ

---

[1]) A. Frank Die Formeln über die Bewegung des Wassers in Röhren. Civiling 1881.

[2]) H. Smith, Hydraulics.

[3]) H. Wehner, Ein Betrag zur Berechnung des Rohrwiederstandes in der Praxis. Gesundheits-Ing. 1897.

[4]) Формула Лампе достаточно извѣстна въ Россіи и часто примѣняется къ разсчету водопроводовъ, по иниціативѣ инж Линдлея и проф. Н. К. Чижова и А. А. Саткевича. Она принята также инж. Линдлеемъ въ его проектахъ канализаціи г.г. Варшавы и Петербурга.

[5]) „In all probability the most accurate experiments of the flow through a long pipe, where the loess of head from frict on et cet. has been measured by piezometer, by Prof. D-r C. J. H. Lampe". (H. Smith, Hydraulics, p. 231).

же сравнительнаго изученія формулъ даютъ возможность судить о достоинствѣ формулы Лампе. Изъ ряда опытныхъ данныхъ Смитъ опредѣлилъ вѣроятнѣйшія величины скорости для трубъ разныхъ діаметровъ при различныхъ гидравлическихъ уклонахъ, въ предположеніи, что трубы новыя асфальтированныя, и составилъ таблицу, въ которой показаны такія нормальныя скорости и скорости, получающіяся разсчетомъ по 11 различнымъ формуламъ. Эта таблица приведена проф. Ф. Е. Максименко въ курсѣ Гидравлики съ добавленіемъ новой формулы, предложенной авторомъ [1]).

Таблица отмѣчаетъ результаты разсчета, ближе другихъ подходящіе къ даннымъ, принятымъ за нормальныя, (отклоняющіеся не болѣе 10% въ ту или другую сторону), и по количеству ихъ оцѣниваетъ достоинство различныхъ формулъ. Изъ этой таблицы видно, что наиболѣе удовлетворительные результаты получаются по двумъ формуламъ: Лампе и Ф. Е. Максименко. Эти результаты разнятся отъ опытныхъ данныхъ болѣе, чѣмъ на 10 %, только въ 2 случаяхъ изъ 15. [2])

Въ практическомъ примѣненіи формула Лампе (80) была нѣсколько упрощена тѣмъ, что показатель степени v вмѣсто 1,802 принимается равнымъ 1,80 Это не вноситъ серьезныхъ измѣненій въ результаты разсчета [3]). Благодаря такому измѣненію формула приняла окончательно слѣдующій видъ:

$$i = n \frac{v^{1,8}}{\rho^{1,25}}. \tag{81}$$

Въ преобразованіи по типу формулы (6), она имѣетъ видъ

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \rho i = n \frac{v^{1,8}}{\rho^{0,25}}, \tag{82}$$

или, вводя значеніе діаметра,

$$\frac{Di}{4} = 1,414n \frac{v^{1,8}}{D^{0,25}} = n' \frac{v^{1,8}}{D^{0,25}}. \tag{83}$$

---

[1]) Ф. Е. Максименко. Курсъ Гидравлики (1892, стр. 273.

[2]) Нужно замѣтить, между прочимъ, что если привести формулу Лампе къ общему виду по Шези, то коеффиціентъ скорости k оказывается зависящимъ отъ скорости, а слѣдовательно и отъ уклона, что не соотвѣтствуетъ опытамъ Дарси.

[3]) П. Ф. Горбачевъ въ свой работѣ „О разсчетѣ скоростей теченія и пр.“ показываетъ это путемъ таблицы, дающей сравнительныя значенія коеффиціента скорости k. (стр. 50).

Наконецъ, въ преобразованіи по типу формулы Шези, получается

$$v = \sqrt{\frac{\rho^{0,25} v^{0,20}}{n}} \sqrt{\rho i}\ ;$$

$$k = \sqrt{\frac{\rho^{0,25} v^{0,20}}{n}}\ . \qquad (84$$

Коеффиціентъ шероховатости n въ формулѣ (82) имѣетъ слѣдующія значенія для измѣреній въ метрахъ (по Лампе и Линдлею [1]):

$n_1 = 0,000134$ — для новыхъ чистыхъ трубъ;

$n_2 = 0,00018$ — для трубъ водопроводовъ;

$n_3 = 0,00025$ — для обыкновенныхъ водостоковъ;

$n_4 = 0,00030$ — Линдлей рекомендуетъ примѣнять для водостоковъ, заложенныхъ при очень малыхъ уклонахъ.

Соотвѣтственно значенія коеффиціентовъ $n' = 1,414\ n$, для формулы (83) съ діаметромъ D, должны быть:

$$n'_1 = 0,00019;$$

$$n'_2 - 0,00025;$$

$$n'_3 - 0,00035;$$

$$n'_4 - 0,00042.$$

Зависимость коеффиціента шероховатости отъ уклона, рекомендуемая Линдлеемъ, является нѣкоторой особенностью. Объяснить это можно тѣмъ, что при малыхъ уклонахъ сами водостоки, находясь въ неблагопріятныхъ условіяхъ, загрязняются, образуютъ неровную поверхность, и шероховатость ихъ повышается; слѣдовательно, уклонъ въ данномъ случаѣ вліяетъ лишь косвенно, являясь признакомъ состоянія водостока.

Сравненіе между значеніями коеффиціента k по формуламъ Лампе, Дарси—Базена и Гангилье—Куттера для приблизительно одинаковыхъ степеней шероховатости показываетъ, что возрастаніе k по формулѣ Лампе близко къ результатамъ, получаемымъ изъ двухъ другихъ формулъ, но величина k для малыхъ діаметровъ (6″ и особенно 3″) нѣсколько преувеличена.

Для измѣреній въ футахъ проф. Н. К. Чижовъ, на основаніи прак-

[1]) П. Ф. Горбачевъ О разсчетѣ скоростей теченія и пр., стр. 52.

тическихъ указаній инженеровъ, пользующихся въ своихъ вычисленіяхъ формулой Лампе, считаетъ возможнымъ принять слѣдующія значенія коеффиціента шероховатости n въ формулѣ (82):

n_1=0,0000675—для совершенно новыхъ асфальтированныхъ чугунныхъ трубъ, проводящихъ чистую воду;

n_2=0,00007—0,00008—для чугунныхъ трубъ, находящихся въ нѣсколько худшемъ состояніи или проводящихъ мутную воду.

n_3=0,00009—0,0001—для чугунныхъ трубъ, покрытыхъ осадками инкрустированныхъ (это значеніе особенно подходитъ для разсчета городскихъ водопроводовъ);

n_4=0,00015—для плохихъ и очень старыхъ чугунныхъ трубъ;

n_{I} =0,000095—для водосточныхъ керамиковыхъ трубъ;

n_{II}=0,0001 - 0,0002—для водосточныхъ каналовъ.

Соотвѣтственно этому значенія n' для формулы (83) должны быть слѣдующія:

n'_1=0,000095,

n_2'=0,00010—0,00011,

n_3'=0,00013—0,00014,

n_4'=0,00021;

n'_{I} =0,000135,

n'_{II}=0,00014—0,00028.

Пользованіе формулой Лампе при разсчетахъ водоснабженій и канализацій значительно удобнѣе, нежели формулами многочленными такъ какъ по своему виду она удобна для логарифмированія.

Однако при той массѣ подсчетовъ потери напора, которая неизбѣжна при проектированіи цѣлыхъ сѣтей, вычисленія даже и по этой формулѣ представляются дѣломъ весьма кропотливымъ и въ высшей степени утомительнымъ. По счастью, тотъ же логарифмическій видъ формулы Лампе даетъ возможность избѣжать указанныхъ утомительныхъ арифметическихъ выкладокъ и сократить до minimum'а безполезную потерю времени, при чемъ конечные результаты вычисленій, благодаря достоинствамъ формулы въ отношеніи точности, являются не только вполнѣ достаточными для всѣхъ практическихъ цѣлей, но соотвѣтствуютъ лучшимъ изъ имѣющихся формулъ и выдѣляются своей близостью къ дѣйствительности.

Такая возможность достигается графическимъ изображеніемъ формулы Лампе въ видѣ ряда масштабовъ.

Формула Лампе можетъ быть преобразована въ форму сопряженныхъ масштабовъ также по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія, какъ это мы покажемъ вскорѣ въ отношеніи другихъ, совершен-

но подобныхъ ей формулъ. Но здѣсь мы укажемъ другой, очень остроумный способъ графическаго изображенія, примѣненный именно къ этой формулѣ сперва H. Wehner'омъ, а затѣмъ проф. Н. К. Чижовымъ. Основаніемъ этого способа служитъ только методъ масштабовъ функцій.

Излагаемый способъ графическаго изображенія формулы Лампе былъ опубликованъ въ 1897 году Г. Венеромъ въ Gesundheits—Ingenieur, въ статьѣ *Ein Beitrag zur Berechnung des Rohrwiederstandes in der Praxis*, причемъ діаграмма была составлена для измѣреній въ метрахъ. Въ томъ же 1897 году проф. Н. К. Чижовъ примѣнилъ къ формулѣ Лампе тотъ же способъ, но въ соотвѣтствіи съ потребностями русской жизни, составилъ свою діаграмму для измѣреній въ футахъ. Эта діаграмма появилась въ журналѣ „Строитель" въ статьѣ подъ заглавіемъ *Механическій способъ вычисленія потери напора.* Не получивъ до сихъ поръ статьи Г. Венера [1]), мы прилагаемъ (черт. 15) только діаграмму Н. К. Чижова. Понятно, что для разъясненія способа построенія и пользованія безразлично, къ какимъ мѣрамъ относится діаграмма, а въ смыслѣ практическаго примѣненія діаграмма, составленная въ футовыхъ мѣрахъ, является болѣе интересной и подходящей для русской дѣйствительности.

Способъ построенія діаграммы состоитъ въ слѣдующемъ.

Формула Лампе имѣетъ видъ

$$i = n \frac{v^{1,8}}{\rho^{1,25}}. \tag{81}$$

Логарифмируя эту формулу, получаемъ

$$\log i - \log n = 1,8 \log v - 1,25 \log i \rho. \tag{85}$$

На произвольной прямой (см. нижній масштабъ діаграммы [2]) $i - n$ (черт. 15), нанесемъ $\log i$ и $\log n$ въ видѣ масштабовъ функцій, т. е. отложимъ въ какомъ угодно масштабѣ дѣленія, пропорціональныя $\log i$ и $\log n$ и надъ дѣленіями надпишемъ соотвѣтственныя величины i и n.

На другой произвольной прямой нанесемъ подобнымъ же образомъ см. верхній масштабъ діаграммы, ρ и v) съ одной стороны $1,8 \log v$, съ другой стороны $1,25 \log \rho$. При этомъ модуль масштаба для данныхъ функцій долженъ быть тотъ же, что и для масштаба $\log i$ и $\log n$. Абсолютныя же длины новыхъ двухъ масштабовъ между одинаковыми дѣленіями будутъ разныя, именно въ 1,8 и 1, 25 раза больше соотвѣтственныхъ длинъ на масштабѣ $\log i$ и $\log n$.

Отложеніе нужно начинать отъ общей точки, обозначенной число-

---

[1]) Діаграмма Венера получена по окончаніи работы и изображена на черт. 15*a*.

[2]) При воспроизведеніи діаграммы оказалось неудобнымъ мѣнять обозначенія оригинала и поэтому, на черт. 15 нашимъ ρ и n соотвѣтствуютъ R и k.

вой отмѣткой 1,0 какъ для v, такъ и для ρ. Это явствуетъ изъ слѣдующаго соображенія.

Для случая, когда

$$log\ i_0 - log\ n_0 = 0, \tag{86}$$

уравненіе (85) обращается въ

$$1{,}8\ log\ v_0 - 1{,}25\ log\ \rho_0 = 0. \tag{85'}$$

Если въ тоже время

$$\rho = 1{,}0,$$

то

$$1{,}8\ log\ v_0 = 0,$$

$$v_0 = 1{,}0.$$

Надписавъ у дѣленій соотвѣтственныя величины ρ и v, мы получимъ двойной логарифмическій масштабъ гидравлическихъ радіусовъ и скоростей.

Двухъ построенныхъ масштабовъ достаточно для опредѣленія любой изъ величинъ i, v и ρ, входящихъ въ формулу Лампе (81), если двѣ изъ нихъ заданы. Но, чтобы ввести въ разсчетъ также величину расхода Q, на діаграммѣ построены еще логарифмическіе масштабы расходовъ (въ куб. футахъ) для 20 различныхъ діаметровъ, начиная съ 2″ до 30″. Масштабы эти строятся на линіяхъ, параллельныхъ масштабу скоростей, и притомъ такимъ образомъ, чтобы дѣленія масштабовъ расхода, соотвѣтствующія одной и той же скорости при разныхъ діаметрахъ, находились на одной вертикальной линіи съ дѣленіемъ, обозначающимъ эту скорость. Модуль масштаба, удовлетворяющаго такому условію, опредѣляется на основаніи соотношенія

$$l_0\ (log\ \frac{\pi D_0^2 v_0}{4} - log\ \frac{\pi D_0^2}{4} \cdot 1) = 1{,}8\ l\ log\ v_0, \tag{87}$$

гдѣ l — модуль масштаба $log\ i$ и n.

l_0 — модуль масштаба соотвѣтственнаго расхода Q.

Отсюда $l_0 = 1{,}8\ l$.

Это значитъ, что промежутки между однозначными дѣленіями на масштабѣ расходовъ будутъ такіе же, что и на масштабѣ скоростей.

Это является понятнымъ, если принять въ соображеніе, что

$$log \frac{\pi D_0^2 v_0}{4} = log\ \frac{\pi D_0^2}{4} + log\ v_0, \tag{88}$$

т. е. логарифмъ расхода можетъ быть представленъ въ видѣ суммы двухъ отрѣзковъ, изъ которыхъ послѣдній пропорціоналенъ $log\ v_0$, а въ данномъ случаѣ долженъ быть равенъ длинѣ, соотвѣтствующей $log\ v_0$ на масштабѣ скоростей.

Что касается построенія каждаго такого масштаба, то оно исполняется слѣдующимъ образомъ. Построивъ, на основаніи нормальнаго логарифмическаго масштаба, масштабъ съ модулемъ l_0, на линіи, намѣченной для масштаба расходовъ даннаго діаметра, наносятъ точку, соотвѣтствующую какой нибудь скорости. Вычисливъ затѣмъ, по діаметру и выбранной скорости, расходъ, прикладываютъ построенный масштабъ такимъ образомъ, чтобы нанесенная точка совпала съ мѣстомъ, отвѣчающимъ вычисленному расходу, и размѣчаютъ другія дѣленія.

Нужно замѣтить, что масштабы расходовъ для разныхъ діаметровъ заканчиваются слѣва въ точкахъ (обозначенныхъ на діаграммѣ кружками), которыя находятся на одной вертикали съ дѣленіями отмѣчающими на масштабѣ ρ величину гидравлическихъ радіусовъ при данныхъ діаметрахъ. Значеніе этого обстоятельства будетъ ясно при описаніи употребленія діаграммы.

Для того, чтобы опредѣлить при данномъ коеффиціентѣ шероховатости n, по заданнымъ, напримѣръ, величинамъ гидравлическаго уклона и гидравлическаго радіуса (или діаметра), скорость, нужно взять циркулемъ на масштабѣ $i-n$ разстояніе между дѣленіями, соотвѣтствующими заданнымъ i и n. Такимъ образомъ мы получаемъ длину, отвѣчающую $log\ i - log\ n$. Отложимъ затѣмъ полученную длину по верхнему соединенному масштабу отъ дѣленія, обозначающаго заданное ρ. Тогда другой конецъ циркуля укажетъ намъ дѣленіе, отвѣчающее искомой скорости v.

Что это дѣйствительно такъ, ясно изъ того, что, отложивъ отъ отмѣтки ρ длину, взятую циркулемъ, мы получили графически величину выраженія

$$log\ i - log\ n + 1{,}25\ log = 1{,}8\ log\ v, \qquad (85')$$

и по величинѣ полученнаго log прочли значеніе v.

Совершенно такимъ же образомъ по даннымъ уклону и скорости можетъ быть опредѣленъ гидравлическій радіусъ сѣченія. Опредѣленіе необходимаго уклона по заданнымъ гидравлическому радіусу (или діаметру) и скорости производится аналогичнымъ образомъ, только въ обратномъ порядкѣ.

Когда по извѣстнымъ діаметру и гидравлическому уклону (при опредѣленномъ коеффиціентѣ шероховатости) требуется найти расходъ, то можно было бы сперва опредѣлить скорость, во всемъ согласно указанному, а затѣмъ, проведя черезъ соотвѣтствующее дѣленіе вертикальную линію до пересѣченія съ масштабомъ расходовъ для даннаго діаметра, въ точкѣ пересѣченія прочитать искомый расходъ. Но операція упрощается тѣмъ, что начала масштаба расходовъ для разныхъ

діаметровъ находятся на одной вертикали съ отмѣтками соотвѣтственныхъ гидравлическихъ радіусовъ. Поэтому удобнѣе, взявъ циркулемъ на масштабѣ $i—n$ разстояніе между соотвѣтственными дѣленіями, отложить его отъ начала масштаба расходовъ даннаго діаметра. Тогда другой конецъ циркуля укажетъ намъ прямо искомый расходъ.

Опредѣленіе уклона по извѣстнымъ діаметру и расходу дѣлается такъ же просто въ обратномъ порядкѣ. Опредѣленіе діаметра по заданнымъ расходу и гидравлическому уклону производится посредствомъ послѣдовательныхъ пробъ, прокладывая взятую по масштабу $i—n$ длину, соотвѣтствующую $log\ i—log\ n$, по масштабамъ расходовъ. Тотъ діаметръ, на масштабѣ котораго свободная ножка циркуля указываетъ расходъ, наиболѣе близкій и притомъ высшій заданнаго, будетъ искомымъ.

Изъ предшествующаго ясно, что діаграмма Н. К. Чижова можетъ примѣняться для разсчетовъ не только въ предѣлахъ 20 діаметровъ круглыхъ трубъ, имѣющихъ на ней особые масштабы. Основные масштабы діаграммы даютъ возможность пользоваться ей и для иныхъ діаметровъ или для водоводовъ иного сѣченія, нежели круглое.

Большое удобство этой діаграммы состоитъ въ томъ, что она допускаетъ пользованіе любымъ коеффиціентомъ шероховатости. Объ особенностяхъ примѣненія ея въ случаяхъ разныхъ степеней наполненія и при разныхъ уклонахъ мы предпочитаемъ говорить въ особомъ мѣстѣ, разсматривая эти особенности въ примѣненіи ко всѣмъ вообще діаграммамъ сопряженныхъ масштабовъ.

Всматриваясь въ способъ пользованія діаграммой типа Венера или Н. К. Чижова, не трудно видѣть, что дѣло сводится къ операціямъ въ отношеніи логарифмическихъ масштабовъ, вычерченныхъ на бумагѣ, подобныхъ тѣмъ, которые примѣняются при пользованіи общеизвѣстными счетными логарифмическими линейками.

Нужно сказать, что примѣненіе принципа логарифмической линейки къ гидравлическому разсчету въ самой конкретной формѣ явилось значительно ранѣе. Подобныя логарифмическія линейки съ дѣленіями, нанесенными на двухъ неподвижныхъ масштабахъ и на подвижной средней части, уже давно изготовляются въ Англіи, но, къ сожалѣнію, онѣ еще очень мало извѣстны среди техниковъ вообще, въ Россіи же подобныхъ линеекъ нельзя достать въ продажѣ.

Это объясняется отчасти и тѣмъ, что эти линейки для насъ, русскихъ, не совсѣмъ удобны, такъ какъ дѣленія, соотвѣтствующія рас-

ходу воды Q, обозначены въ неупотребительной у насъ мѣрѣ—галлонахъ [1]).

IV. Примѣненіе способа сопряженныхъ масштабовъ къ формулѣ Леви-Валло.

Научный анализъ результатовъ, полученныхъ Дарси при его извѣстныхъ опытахъ надъ трубами, произведенныхъ въ 1849—1751 гг., дали мысль извѣстному математику и инженеру, М. Леви (Maurice Lévy) получить формулу, опредѣляющую прямолинейное движеніе и близкое къ таковому движеніе въ трубахъ чисто теоретическимъ путемъ, не прибѣгая къ гипотетическимъ предпосылкамъ, путемъ разсмотрѣнія механическихъ условій движенія частицы жидкости. Эта мысль была осуществлена имъ въ работѣ, опубликованной въ 1867 году [2]), причемъ получилась формула, носящая его имя, о которой мы должны говорить.

Задумываясь надъ вопросомъ о недостаточной научной ясности вопросовъ, относящихся къ движенію воды, и разнорѣчіи въ практическихъ выраженіяхъ, стремящихся опредѣлить это движеніе, Леви пришелъ къ мысли, что, можетъ быть, наше незнаніе происходитъ отъ того, что изслѣдователи съ излишкомъ предавались гипотезамъ и не обращали достаточнаго вниманія на механическія условія изучаемаго движенія, условія, знаніе которыхъ избавило бы отъ многихъ предположеній. Такъ въ основу разработки эмпирической формулы Дарси положена гипотеза, что треніе между двумя слоями жидкости пропорціонально квадрату относительной скорости. Формула Дарси представляетъ удачно его опыты. Однако Леви нашелъ попутно при своей работѣ, что законъ тренія, который принимаетъ Дарси, и который на первый взглядъ не представляетъ ничего недопустимаго, тѣмъ не менѣе противорѣчитъ механическому опредѣленію движенія, къ которому онъ прилагается. Леви пришелъ къ выводу, что если допустить, что треніе между двумя молекулами зависитъ исключительно отъ относительной скорости, то оно можетъ быть пропорціонально только первой степени этой скорости, т. е. что гипотеза, принятая Ньютономъ,

1) Не получивъ до сихъ поръ изъ Англіи экземпляра такой линейки, мы лишены возможности дать фототипію ея, но разсчитываемъ сдѣлать это во второмъ выпускѣ настоящей работы. Впрочемъ, устройство ея и способъ пользованія представляются достаточно ясными.

2) Théorie d'un courant liquide à filets rectilignes et parallèles de forme traversale quelconque. Applications aux tuyaux de conduites Annales des Ponts et Chaussées. 1867.

Пуассономъ и Навье, единственно возможна въ данномъ случаѣ. Но и послѣдняя гипотеза, какъ извѣстно, не соотвѣтствуетъ фактамъ. Эти обстоятельства привели Леви, прежде всего, къ заключенію, что обѣ гипотезы не соотвѣтствуютъ дѣйствительности, и что треніе зависитъ во всякомъ случаѣ не отъ одной только относительной скорости. Послѣднее косвенно подтверждено опытами Базена, который пришелъ къ мысли, что треніе зависитъ также и отъ абсолютной скорости, хотя и не указалъ въ этомъ отношеніи никакого точнаго закона. Другое заключеніе, къ которому пришелъ Леви, состояло въ томъ, что при опредѣленіи законовъ движенія воды желательно не дѣлать a priori никакихъ гипотезъ, а исходить изъ разсмотрѣнія чисто механическихъ условій этого движенія, начиная съ простѣйшаго случая, именно прямолинейнаго установившагося движенія.

Задавшись мыслью провести свое изслѣдованіе именно такимъ образомъ, Леви сдѣлалъ допущеніе только въ отношеніи того общаго факта, который согласно признается всѣми изслѣдователями, именно, что элементарное треніе между двумя частицами жидкости независимо отъ давленія, что, слѣдовательно, оно можетъ зависѣть только отъ абсолютной и относительной скоростей этихъ двухъ частицъ. Но онъ не допустилъ a priori никакой гипотезы относительно того, какую функцію абсолютной и относительной скорости представляетъ это треніе. Опираясь только на механическія условія установившагося движенія жидкостей, онъ показалъ прежде всего [1]), что эта функція не можетъ быть произвольной, и что она необходимо представляетъ произведеніе относительной скорости на функцію абсолютной скорости, т. е., что если обозначить черезъ φ треніе, отнесенное къ единицѣ поверхности, вмѣсто того, чтобы имѣть

$$\varphi = F\left(u\,\frac{du}{dR}\right), \tag{88}$$

гдѣ F—обозначеніе нѣкоторой функціи, необходимо получается соотношеніе

$$\varphi = \frac{du}{dR} f(u), \tag{89}$$

гдѣ f—также обозначеніе функціи.

Далѣе Леви, не придавая заранѣе функціи f никакой частной формы, нашелъ теоретически общее свойство установившагося прямолинейнаго движенія жидкостей, которое состоитъ въ томъ, что какова бы ни была при такомъ движеніи форма смачиваемаго периметра, кри-

1) Maurice Lévy, l. c.

выя равныхъ скоростей (*изотахи*) на поперечномъ сѣченіи параллельны между собою. Эта теорема находитъ подтвержденіе и въ опытахъ Базена надъ трубами прямоугольнаго сѣченія.

Это положеніе дало Леви возможность очень легко (и опять таки не опредѣляя функціи f) разрѣшить задачу о распредѣленіи скоростей въ точкахъ поперечнаго сѣченія, какова бы ни была криволинейная или прямоугольная форма смачиваемаго периметра.

Дифференціальное уравненіе, которое было имъ получено, содержитъ неизвѣстную функцію скорости, опредѣленіе которой находится въ зависимости отъ опредѣленія функціи f. Уравненіе это

$$d\ F(u)=\gamma i\rho.\ dl, \tag{90}$$

гдѣ l — разстояніе точекъ изотахи скорости u отъ нѣкоторой изотахи, принятой за начальную, измѣряемое по нормали къ изотахѣ;

ρ — гидравлическій радіусъ части сѣченія, ограниченной изотахой u;

i — уклонъ или потеря напора на единицу длины;

γ — вѣсъ куб. метра воды,

по интегрированіи, обращается въ

$$F(u) - F(u_0) = \gamma i \int_{l_0}^{l} \rho\, dl, \tag{91}$$

а затѣмъ, по опредѣленіи величины ρ, въ

$$F(u) - F(u_0) = \gamma i \int_{l_0}^{l} \frac{\Omega_0 + (l - l_0)\ P_0 + {}^1/_2\ \delta\ (l - l_0)}{P_0 + \delta\ (l - l_0)} dl. \tag{92}$$

Интегралъ легко вычисляется, и въ результатѣ получается

$$F(u) - F(u_0) = \gamma i \left[\frac{1}{4}(l - l_0)^2 + \frac{P_0}{2\delta}(l - l_0) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Omega_0}{\delta} - \frac{P_0^2}{2\delta^2} \right) lg \left(\frac{P_0 + \delta\ (l - l_0)}{P_0} \right) \right], \tag{93}$$

гдѣ u_0 и u — скорости частицъ жидкости, расположенныхъ по двумъ какимъ либо изотахамъ;

l_0 и l — разстоянія точекъ изотахъ u_0 и u отъ изотахи, принятой за начальную;

Ω_0 — площадь сѣченія, ограничиваемая изотахой u_0;

P_0 — смачиваемый периметръ, соотвѣтствующій изотахѣ u_0;

δ — уголъ, составляемый нормалями къ концамъ изотахи u (въ случаѣ незамкнутыхъ изотахъ);

F — функція, зависящая отъ характера функціи f, опредѣляющей величину тренія.

Между функціями f и F существуетъ соотношеніе

$$f\ (u) = \frac{dF(u)}{du}. \tag{94}$$

Формула (93), къ которой пришелъ Леви, представляется сложной, пока она дается въ самомъ общемъ видѣ, но она очень упрощается въ примѣненіи къ практикѣ.

Въ случаѣ трубъ кругового сѣченія, если взять за начальную изотаху u_0 центръ трубы, когда, слѣдовательно,

$$\Omega_0 = P_0 = l_0 = \delta_0 = 0, \tag{95}$$

получается, взамѣнъ (93), соотношеніе

$$F\ (u) - F\ (u_0) = \frac{\gamma i r^2}{4}, \tag{96}$$

гдѣ u_0—скорость центральной струи;

r—разстояніе отъ центра изотахи со скоростями u.

Если сравнивать это уравненіе съ результатами опытовъ Дарси, то оказывается, что функція $F\ (u)$, удовлетворяющая лучше всего опытамъ, будетъ

$$F\ (u) = -\alpha u^2. \tag{97}$$

Отсюда предшествующая формула получаетъ видъ

$$\alpha\ (u_0^2 - u^2) = \frac{\gamma i r^2}{4}. \tag{98}$$

Но оказалось при этомъ, что коеффиціентъ α не вполнѣ постоя ненъ, и что никакая функція $F\ (u)$ съ постоянными коеффиціентами не можетъ покрыть достаточно полнымъ образомъ результаты всѣхъ опытовъ. Такъ какъ, однако, формула точна и не обоснована на какой либо гипотезѣ, когда дѣло идетъ о прямолинейномъ движеніи, то отсюда Леви заключилъ, что причиной непостоянства коеффиціента α при движеніи въ трубахъ служатъ отклоненія въ этомъ случаѣ отъ прямолинейнаго движенія.

Формула (98), найденная для прямолинейнаго движенія, тѣмъ не менѣе очень хорошо прилагается къ движенію въ трубахъ, при посредствѣ поправочнаго коеффиціента, значеніе котораго объясняется очень просто.

Измѣненія коеффиціента α происходятъ единственно потому, что движеніе въ трубахъ не совсѣмъ прямолинейно. Если это утвержденіе

правильно, то α должно зависѣть только отъ кривизны траекторій, описываемыхъ частицами жидкости. Но эта кривизна должна уничтожаться по оси трубы и увеличиваться по мѣрѣ удаленія частицъ жидкости отъ оси. Леви пришелъ къ заключенію, что эти измѣненія не зависятъ ни отъ уклона, ни отъ діаметра, ни отъ матеріала трубы, а исключительно отъ разстоянія частицы, движеніе которой разсматривается, отъ центра трубы, т. е. отъ велины r.

Онъ нашелъ, что если положить

$$\alpha=\beta\sqrt{r}, \tag{99}$$

то формула (98) удовлетворяетъ всѣмъ опытамъ Дарси. Изъ этого слѣдуетъ, что законъ распредѣленія скоростей въ трубѣ выражается формулой

$$\beta\sqrt{r}\ (u_0^2-u^2)=\frac{\gamma i r^2}{4} \tag{100}$$

или

$$u_0^2-u^2=\frac{\gamma}{4\beta}ir^{\frac{3}{2}}, \tag{100'}$$

гдѣ коеффиціентъ $\frac{\gamma}{4\beta}$, по мнѣнію Леви, совершенно постояненъ для данной жидкости и характеризуетъ ее съ точки зрѣнія ея плотности. Для воды

$$\frac{\gamma}{4\beta}=2640,$$

и формула (100′) получаетъ видъ

$$u_0^2-u^2=2640\ ir^{\frac{3}{2}}. \tag{100''}$$

Дифференцируя формулы (98) и (100″), Леви пришелъ къ выраженіямъ для закона тренія, съ одной стороны, для движенія совершенно прямолинейнаго, съ другой — для движенія въ трубахъ. Изъ (98) и (100″) получается:

$$-\alpha u\frac{du}{dr}=\frac{\gamma}{4}ri; \tag{101}$$

$$-r^{\frac{1}{2}}u\frac{du}{dr}=\frac{3}{4}.\ 2640\ ri. \tag{102}$$

Такъ какъ ri пропорціонально тренію по поверхности двухъ концентрическихъ цилиндровъ жидкости, то отсюда слѣдуетъ, что:

а) при движеніи жидкости совершенно прямолинейномъ треніе между двумя смежными слоями пропорціонально произведенію абсолютной скорости на скорость относительную;

б) въ трубахъ кругового сѣченія треніе между двумя концентрическими цилиндрами пропорціонально, кромѣ того, корню квадратному изъ радіуса.

Законы, которые Леви формулировалъ такимъ образомъ, такъ же какъ и формулы, изъ которыхъ они выведены, замѣчательны тѣмъ, что они не заключаютъ зависимости отъ діаметра трубы.

Выведя указаннымъ образомъ формулу для внутренняго тренія, Леви выразилъ также законъ тренія о стѣнку. Онъ нашелъ, что это треніе приблизительно пропорціонально квадрату скорости движенія около стѣнки, т. е.

$$w^2 = \alpha' Ri, \tag{103}$$

гдѣ R—радіусъ трубы,

α'—коеффиціентъ, зависящій отъ свойствъ стѣнки.

Но это только первое приближеніе, а болѣе точное выраженіе

$$w^2 = Ri(\alpha' + \beta' \sqrt{R}). \tag{104}$$

Пользуясь, наконецъ, выраженіями (100), (103) и (104), Леви пришелъ къ общему выраженію для средней скорости движенія въ трубѣ.

Принимая значеніе w по (103) или по (104), во всякомъ случаѣ это выраженіе имѣетъ одну и ту же форму, именно

$$v^2 = Ri(p + q\sqrt{R}), \tag{105}$$

гдѣ p и q коеффиціенты, которые зависятъ оба отъ свойствъ стѣнки, если взято для w выраженіе (104); если же принято выраженіе (103) то одинъ изъ нихъ измѣняется въ зависимости отъ свойствъ стѣнки, другой зависитъ исключительно отъ свойствъ жидкости.

На основаніи сравненія съ результатами опытовъ Дарси, Леви далъ значенія p и q для случаевъ новыхъ чугунныхъ трубъ и чугунныхъ трубъ съ осадками. Такимъ образомъ получилась формула Леви, которую авторъ далъ въ слѣдующемъ общемъ видѣ:

$$\left(\frac{v}{n}\right)^2 = Ri\,(a + b\sqrt{R}), \tag{106}$$

гдѣ R—радіусъ (геометрическій) трубы;

n, a, b—числовые коеффиціенты.

Коеффиціенты имѣютъ слѣдующія значенія:
для новыхъ чугунныхъ трубъ

$$n_1=36{,}4,$$
$$a_1=1,$$
$$b_1=1;$$

для трубъ съ осадками

$$n_2=20{,}5,$$
$$a_2=1,$$
$$b_2=3.$$

Такимъ образомъ формула Леви будетъ имѣть числовой видъ по (106):
для новыхъ чугунныхъ трубъ

$$\left(\frac{v}{36{,}4}\right)^2 = Ri\ (1+\sqrt{R}), \tag{106a}$$

для трубъ съ осадками

$$\left(\frac{v}{20{,}5}\right)^2 = Ri\ (1+3\sqrt{R}). \tag{106b}$$

При разсчетѣ водопроводовъ Леви рекомендуетъ употреблять, конечно, формулу, относящуюся къ трубамъ, покрытымъ осадками, т. е. (106b)

Если положить

$$\mu=20{,}5\sqrt{R\ (1+3\sqrt{R})}, \tag{107}$$

то формула (106b) принимаетъ видъ

$$v=\mu\sqrt{i}, \tag{108}$$

гдѣ μ зависить только отъ радіуса R трубы. Поэтому можно вычислить значенія μ заранѣе. Пользуясь этимъ, Леви, въ видахъ удобства вычисленій, составилъ таблицу [1]), которая позволяетъ быстро рѣшать всѣ задачи, относящіяся къ водопроводнымъ трубамъ. Она относится къ трубамъ размѣрами, начиная отъ 1 сантиметра, до 1 метра. Въ таблицѣ даются діаметры, геометрическіе радіусы и площади сѣченій трубъ, значенія величины μ и значенія произведеній πR^2. μ площади на коеффиціентъ μ.

Приводя формулу Леви къ виду выраженія (6), получаемъ:
въ общемъ видѣ

[1]) Maurice Lévy, l. c., p. 254. Имѣется также, въ сокращенномъ видѣ, въ курсѣ Гидравлики Евневича.

$$Ri = \frac{v^2}{n^2(a + b\sqrt{R})}, \tag{107}$$

для новыхъ трубъ

$$Ri = \frac{v^2}{1325(1 + 3\sqrt{R})}, \tag{107a}$$

для старыхъ трубъ

$$Ri = \frac{v^2}{420{,}2(1+3\sqrt{R})}. \tag{107b}$$

Иногда она примѣняется также въ другомъ видѣ, который получается отъ замѣны R черезъ діаметръ D, а именно:
для новыхъ трубъ

$$Di = \frac{v^2}{662{,}5 + 468{,}5\sqrt{D}}. \tag{107'a}$$

для старыхъ трубъ

$$Di = \frac{v^2}{210{,}1 + 445{,}7\sqrt{D}}, \tag{107b'}$$

Приводя же формулу Леви къ виду Шези, получимъ соотвѣтственно общій видъ

$$v = n\sqrt{a + b\sqrt{R}}\sqrt{Ri}, \tag{108}$$

для новыхъ трубъ

$$v = 36{,}4\sqrt{1 + \sqrt{R}}\sqrt{Ri}, \tag{108a}$$

$$v = \sqrt{2650 + 3747\sqrt{\rho}}\sqrt{\rho i}, \tag{108a}$$

гдѣ ρ—гидравлическій радіусъ;
для старыхъ трубъ

$$v = 20{,}5\sqrt{1 + 3\sqrt{R}}\sqrt{Ri}, \tag{108b}$$

$$v = \sqrt{840 + 3566 \sqrt{\rho}} \sqrt{\rho i}. \qquad (108b')$$

Обѣ формулы Леви, для новыхъ и для старыхъ трубъ, были свѣрены имъ съ опытами Дарси. По заявленію автора, онѣ покрываютъ результаты опытовъ самымъ удовлетворительнымъ образомъ, и сходятся съ эмпирическими формулами Дарси въ предѣлахъ опытовъ, но за предѣлами ихъ даютъ нѣсколько иные результаты, которые авторъ считаетъ заслуживающими большаго довѣрія, какъ имѣющіе подъ собою теоретическія основанія [1])

Формула М. Леви въ своемъ первоначальномъ видѣ представляетъ, однако, значительное неудобство для практическаго приложенія, какъ и всѣ другія формулы многочленнаго типа, не пригодныя для логарифмированія.

Вслѣдствіе этого неудобства первоначальной формулы Леви, Анри Валло (Henri Vallot), занимаясь вопросомъ о примѣненіи этой формулы, сталъ искать равнозначущаго ей выраженія одночленнаго вида. Послѣ нѣкоторыхъ пробъ А. Валло остановился на формулѣ:

$$D = 0{,}324 \frac{Q^{3/8}}{i^{5/16}} = 0{,}324 \left(\frac{Q}{\sqrt{i}}\right)^{3/8}. \qquad (109)$$

Эту формулу мы будемъ называть формулой Леви-Валло. Формула Леви-Валло даетъ діаметры нѣсколько высшіе, по сравненію съ первоначальной формулой Леви (для трубъ съ осадками). Но разница очень не велика; она не превышаетъ 2 мм. для діаметровъ между 0,01 м и 1,00 м., достигаетъ 3 мм. при діаметрѣ въ 2,00 м. и 15 мм. при діаметрѣ въ 3,00 м. Такая одночленная формула представляетъ большія удобства, по сравненію съ многочленной, въ отношеніи оперированія съ ней.

Формула Леви-Валло обратила на себя вниманіе гидротехниковъ, въ особенности лицъ, работавшихъ въ службѣ Парижскаго водоснабженія, и получила здѣсь значительное распространеніе. Она нѣкоторое время находилась въ употребленіи въ той формѣ, которая приведена выше. Въ дальнѣйшемъ Г. Даріэсъ (G. Dariès) обратилъ вниманіе на то, что видъ этой формулы, допускающей логарифмированіе, тѣмъ самымъ даетъ возможность представить ее графически, по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія.

[1]) M. Lévy, l. c., p. 245.

Нужно сказать, однако, что при этомъ онъ положилъ въ основу своихъ разсужденій частный случай функціи вида (33), именно линейное уравненіе вида

$$ax + by = c. \tag{110}$$

Въ примѣненіи къ данной узкой цѣли это, конечно, безразлично и даже нѣсколько упрощаетъ дѣло, но такая постановка вопроса безъ нужды исключаетъ представленіе о широтѣ охвата и теоретической важности того метода, которымъ онъ пользуется.

Какъ бы то ни было, дѣло сводится къ тому, что формула Леви-Валло

$$D = 0{,}324 \frac{Q^{3/8}}{i^{3/16}} \tag{109}$$

представляетъ частный случай функціи вида

$$f_1(x) f_2(y) f_3(z), \tag{36}$$

которая, какъ было показано въ своемъ мѣстѣ, допускаетъ преобразованіе въ діаграмму сопряженныхъ масштабовъ по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія.

Выше было указано также, что для возможности графическаго представленія уравненія вида (36) должны быть предварительно приведены къ виду (33) путемъ логарифмированія.

Примѣняя логарифмированіе къ формулѣ (109), получаемъ:

$$\log D = \log 0{,}324 + \frac{3}{8} \log Q - \frac{3}{16} \log i. \tag{109'}$$

Это выраженіе представляетъ уравненіе вида

$$f_1(x) + f_2(y) = f_3(z), \tag{33}$$

и мы можемъ представить его въ видѣ діаграммы, руководствуясь выше изложенными правилами.

Для этого возьмемъ двѣ параллельныя оси Q и I (черт. 16), находящіяся на произвольно выбранномъ разстояніи s другъ отъ друга, и примемъ первую изъ нихъ за масштабъ расходовъ, а вторую за масштабъ уклоновъ. Затѣмъ наносимъ соотвѣтственно на каждой изъ нихъ, при помощи логарифмической линейки, масштабы функцій Q и i.

Для выбора модуля отложенія примемъ въ соображеніе слѣдующее. Если бы мы приняли для обоихъ масштабовъ безъ измѣненія модуль логарифмической линейки, то намъ пришлось бы, для отложенія функцій $\frac{3}{8} \log Q$ и $\frac{3}{16} \log i$ или множить всѣ $\log$ на $\frac{3}{8}$ и $\frac{3}{16}$, или измѣнять масштабъ логарифмической линейки въ отношеніи $\frac{3}{8}$ и $\frac{3}{16}$. Чтобы не дѣлать этого, удобнѣе принять модули для масштаба $Q\, l_1 = \frac{8}{3} l$ и для масштаба $i\, l_2 = \frac{16}{3} l$ (или кратные ихъ, въ зависимости отъ размѣровъ діаграммы и взаимнаго расположенія масштабовъ). Тогда намъ придется откладывать по масштабамъ Q и i, для выраженія функцій $\frac{3}{8} \log Q$ и $\frac{3}{16} \log i$, величины $\log Q$ и $\log i$ въ масштабѣ линейки.

Такъ какъ функція $\frac{3}{16} \log i$ имѣетъ отрицательный знакъ, а $\frac{3}{8} \log Q$ положительный, то увеличеніе числовыхъ значеній дѣленій на масштабахъ Q и I должно идти въ разныя стороны. Это нужно имѣть въ виду при выборѣ начальныхъ точекъ, отъ которыхъ откладываются дѣленія. Въ данномъ случаѣ удобнѣе помѣстить примѣрно по срединѣ діаграммы дѣленія O и O', соотвѣтствующія нѣкоторымъ среднимъ значеніямъ Q и i, и затѣмъ отъ нихъ вести дѣленія въ обѣ стороны.

Такъ какъ, по предыдущему, модули масштабовъ Q и i

$$l_1 = \frac{8}{3} l,$$

$$l_2 = \frac{16}{3} l,$$

то, обозначая разстояніе отъ оси Q до оси D черезъ x, мы должны имѣть по (45)

$$\frac{x}{s-x} = \frac{8}{3} : \frac{16}{3} = \frac{1}{2} : 1, \tag{111}$$

откуда

$$x = \frac{s}{3}. \tag{111'}$$

Модуль масштаба функціи ($\log D - \log 0{,}324$) опредѣлится, на основаніи (47),

$$l_3 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{16}{9} l, \tag{112}$$

гдѣ l, по прежнему, модуль логарифмической линейки.

Для нанесенія дѣленій на масштабѣ діаметровъ, соединяемъ выбранныя ранѣе точки O и O' (или какія нибудь другія) масштабовъ Q и i. Пересѣченіе линіи OO' съ масштабами D дастъ точку O'', отмѣтка которой, соотвѣтствующая значеніямъ Q и i въ точкахъ O и O', опредѣляется разсчетомъ. Построивъ ,затѣмъ логарифмическій масштабъ при модулѣ l_3 и приложивъ его соотвѣтственнымъ дѣленіемъ къ точкѣ O'', размѣчаемъдругія дѣленія масштаба діаметровъ, продолжая его въ обѣ стороны, насколько нужно.

Если, въ видахъ удобства, выбраны другіе модули (кратные l_1 и l_2), то положеніе оси D должно быть соотвѣтственнымъ образомъ измѣнено. Напримѣръ для $s = 0{,}10$ м., при масштабѣ расходовъ въ 3 раза большемъ, чѣмъ масштабъ уклоновъ, изъ уравненія (45) получаемъ:

$$\frac{x}{0{,}10 - x} = 8 : \frac{16}{3} = 3 : 2,$$

откуда $x = 0{,}06$ м. Модуль масштаба діаметровъ въ такомъ случаѣ равенъ

$$\frac{8 . \frac{16}{3}}{8 + \frac{16}{3}} l = \frac{16}{5} l$$

Обыкновенно на діаграммахъ гидравлическихъ формулъ, построенныхъ по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія, проводится еще ось, служащая масштабомъ для опредѣленія скоростей v.

Для опредѣленія положенія и дѣленій масштаба скоростей, на основаніи положенія масштабовъ Q и D, можно было бы поступить такимъ же образомъ, исходя изъ отношенія:

$$v = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2}, \tag{113}$$

логарифмируя это выраженіе и представляя полученное уравненіе въ видѣ системы сопряженныхъ масштабовъ, въ которой масштабы Q и D совпадаютъ съ построенными ранѣе.

Но прибѣгать къ этому не приходится, такъ какъ можно опредѣлить искомыя положеніе и дѣленія чисто графическимъ путемъ. Для этого стоитъ только принять во вниманіе, что скорость въ 1,00 м. развивается въ трубопроводѣ діаметромъ 0,30 м. при расходѣ 70,7 литр., а въ трубопроводѣ діаметра 0,60 м. при расходѣ въ 282,7 литр. На основаніи этого мы можемъ провести соотвѣтственныя пересѣкающія прямыя и найти такимъ образомъ точку оси v, помѣчаемую 1,00 метр. Повторяя ту же операцію съ данными $Q=7,07$ литр., $D=0,30$ м. и $Q=28,27$ литр., $D=0,60$ м., получаемъ точку, соотвѣтствующую скорости 0,10 м. Эти двѣ точки должны находиться на линіи, параллельной другимъ масштабамъ. Остается только градуировать разстояніе между 0,10 м. и 1,00 и продолжить дѣленія въ обѣ стороны.

Черт. 17 представляетъ діаграмму сопряженныхъ масштабовъ для графическаго разсчета трубопроводовъ круглаго сѣченія по формулѣ Леви-Валло. Она состоитъ изъ четырехъ масштабовъ, идущихъ въ слѣдующемъ порядкѣ, считая слѣва: масштабъ расходовъ (въ метрахъ въ секунду), масштабъ діаметровъ (въ метрахъ), масштабъ потерь напора (въ видѣ десятичныхъ дробей, опредѣляющихъ отношеніе высоты потери напора къ длинѣ трубопровода) и масштабъ скоростей (въ метрахъ въ секунду). Масштабъ расходовъ включаетъ расходы, начиная съ 1.00 литра до 3000 литровъ въ секунду, причемъ числа идутъ увеличиваясь сни зу вверхъ. Масштабъ діаметровъ охватываетъ діаметры начиная съ 0,01 метра до 3,00 метровъ, причемъ числа увеличиваются также снизу вверхъ. Масштабъ уклоновъ (потерь напора) содержитъ уклоны начиная съ 1:1000000 до 1:1, причемъ числа идутъ увеличиваясь сверху внизъ. Наконецъ масштабъ скоростей заключаетъ скорости въ предѣлахъ отъ 0,05 метр. до 10,00 метровъ.

Эта діаграмма построена слѣдующимъ образомъ. Разстояніе между масштабомъ расходовъ и масштабомъ гидравлическихъ уклоновъ выбрано съ такимъ разсчетомъ, что логарифмы расходовъ откладываются въ масштабѣ въ 3 раза большемъ, нежели логарифмы уклоновъ. Въ этомъ случаѣ, если обозначимъ разстояніе между масштабами расходовъ и уклоновъ черезъ l, а разстояніе между масштабомъ расходовъ и масштабомъ діаметровъ черезъ x, то должно быть соблюдено соотношеніе

$$\frac{x}{l-x}=\frac{3.8}{3}:\frac{16}{3}=3:2,$$

откуда

$$x=0,6\ l.$$

Величина x принята равной 95 мм.

Поэтому

$$l = \frac{95}{0,6} = 158,3 \text{ мм.}$$

Модуль масштаба гидравлическихъ уклоновъ взятъ такимъ образомъ, что единицѣ логарифмовъ соотвѣтствуетъ 30 мм. Масштабъ расходовъ, какъ сказано, въ 3 раза крупнѣе, т. е 90 мм. за единицу логарифмовъ. Исходя изъ такого соотношенія, на размѣщенныхъ въ вышеуказанномъ разстояніи линіяхъ отложены логарифмы чиселъ: для расходовъ отъ 1 до 3000, а для уклоновъ отъ 1 до 0,000001. Такимъ образомъ получены масштабы расходовъ и гидравлическихъ уклоновъ. Для полученія масштаба діаметровъ выбрано такое соотношеніе Q и i, чтобы при немъ D было равно 1,00 м., и точки, соотвѣтствующія этимъ величинамъ Q и i, соединены прямою. Пересѣченіе ея съ линіей масштаба діаметровъ даетъ точку, помѣченную 1,00. Такимъ же образомъ найдена точка для 0,10 м. Разстояніе между этими точками раздѣлено пропорціонально дѣленіямъ логарифмической линейки, и дѣленія продолжены въ обѣ стороны. Такимъ образомъ полученъ масштабъ діаметровъ. Масштабъ скоростей полученъ подобнымъ же образомъ.

Способъ употребленія діаграммы для формулы Леви-Валло, представленной на черт. 17, вытекаетъ естественно изъ предыдущаго. Соотвѣтственныя величины четырехъ элементовъ, опредѣляющихъ теченіе, расхода, діаметра, гидравлическаго уклона и скорости, находятся на одной пересѣкающей масштабы прямой, которую опредѣляютъ двѣ заданныя изъ этихъ величинъ. Двѣ другія неизвѣстныя читаются въ точкахъ встрѣчи сѣкущей линіи съ соотвѣтствующими масштабами.

На практикѣ избѣгаютъ проводить сѣкущія линіи на самомъ чертежѣ, что повлекло бы быстрое загрязненіе и порчу его Вмѣсто этого гораздо проще, скорѣе и удобнѣе употреблять или натянутую нить, или прозрачную полосу изъ бумаги, целлулоида и т. п., на которой предварительно прочерчена прямая линія (называемую транспарантомъ). При этомъ можно передвигать такую полосу или непосредственно, или, что лучше, при помощи прикрѣпляемыхъ на концахъ двухъ штифтовъ съ остріями. Въ послѣднемъ случаѣ удобно, поставивъ одно остріе на извѣстное дѣленіе, вращать прямую около оси острія, безъ опасности скольженія или перемѣщенія.

V. Примѣненіе способа сопряженныхъ масштабовъ къ формулѣ Фламана.

Профессоръ Фламанъ (A. Flamant), занимаясь подробнымъ изученіемъ большого числа результатовъ опытовъ и наблюденій, относя-

щихся къ движенію воды въ трубахъ, обратилъ особое вниманіе на формулы одночленнаго логарифмическаго вида. Работая въ этомъ направленіи, онъ въ концѣ концовъ далъ свою формулу логарифмическаго типа, достоинства которой признаются спеціалистами, и которая нетолько имѣетъ примѣненіе на родинѣ автора, во Франціи, но также, въ переработкѣ на англійскія мѣры, получила распространеніе въ С. Америкѣ.

Фламанъ пришелъ къ заключенію, что, если взять основную формулу движенія воды въ видѣ (3)

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \rho i = \frac{Di}{4} = bv^2, \tag{3}$$

то коэффиціентъ b можетъ быть представленъ въ формѣ

$$b = \frac{n'}{\sqrt[4]{Dv}}. \tag{114}$$

Такимъ образомъ получается общій видъ формулы Фламана

$$\frac{Di}{4} = n' \frac{v^{7/4}}{D^{1/4}}. \tag{115}$$

Эта формула, впрочемъ, чаще примѣняется въ формѣ

$$D^{5/4} = a\ v^{7/4} \tag{115'}$$

или

$$D^5\ i^4 = a^4\ v^7 \tag{115''}$$

гдѣ $a = 4n'$.

Для коеффиціента a Фламанъ даетъ два значенія: для трубъ съ совершенно гладкой внутреннею поверхностью или покрытыхъ внутри составомъ, сглаживающимъ ихъ неровности

$$a_1 = 0{,}00074,$$

а для трубъ, слегка покрытыхъ осадками, каковы обыкновенно послѣ нѣсколькихъ лѣтъ службы трубы водопроводовъ, въ среднемъ

$$a_2 = 0{,}00092.$$

Фламанъ замѣчаетъ при этомъ, что, если трубы сильно покрыты осадками, то никакая формула не является примѣнимой непосредственно такъ какъ приходится считаться съ уменьшеніемъ поперечнаго сѣченія.

Трубы съ совершенно гладкою поверхностью представляются въ практикѣ исключеніемъ, и очень рѣдко случается, чтобы онѣ долго сохраняли свою первоначальную гладкость. Можно думать, сравнивая результаты наблюденій, сдѣланныхъ Дарси, что едва замѣтный осадокъ, при толщинѣ, выражающейся малыми дробями миллиметра, достаточенъ для того, чтобы измѣнить условіе протеканія, увеличивая гидравлическія сопротивленія. Поэтому, конечно, слѣдуетъ примѣнять къ случаямъ практики формулу (115) въ видѣ

$$Di = a_2 \frac{v^{7/4}}{D^{1/4}} = 0{,}00092\sqrt{\frac{v^7}{D}}. \qquad (115''')$$

Для облегченія разсчетовъ по своей формулѣ Фламанъ составилъ особыя таблицы.

Формула Фламана очень близка и по внѣшнему виду, и по значеніямъ показателей и коеффиціентовъ, къ формулѣ Лампе. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ выраженіи (115) діаметръ D черезъ гидравлическій радіусъ ρ, получаемъ

$$\rho i = n \frac{v^{7/4}}{\rho^{1/4}} = n \frac{v^{1,75}}{\rho^{0,25}}. \qquad (119)$$

Коеффиціентъ n въ этой формулѣ оказывается равнымъ:

$$n_1 = 0{,}00013$$

для трубъ съ гладкой внутренней поверхностью,

$$n_2 = 0{,}00016$$

для трубъ съ осадками.

Формула же Лампе, какъ мы видѣли, имѣетъ видъ

$$\rho i = n \frac{v^{1,80}}{\rho^{0,25}}, \qquad (82)$$

т. е. отличается по внѣшнему виду только показателемъ 1,80 вмѣсто 1,75. Соотвѣтствующія значенія коеффиціентовъ формулы Лампе:

$$n_1 = 0{,}00013,$$

$$n_2 = 0{,}00018$$

Формула Фламана близка также и къ формулѣ проф. Анвина

$$i = \frac{n\,v^z}{D^{3-z}}, \tag{17}$$

если принять въ послѣдней

$$z = 1{,}75,$$

(т. е. близко къ низшему предѣлу, указанному Анвиномъ 1,79). Въ самомъ дѣлѣ, подставляя это значеніе для z, получимъ выраженіе

$$i = \frac{a\,v^{1,75}}{D^{1,25}}, \tag{120}$$

которое представляетъ видоизмѣненіе (115).

Сравненіе формулы Фламана съ другими формулами [1]) показываетъ, какъ и слѣдовало ожидать, что величины k, по Фламану при a_2 близки къ значеніямъ, получаемымъ по формулѣ Лампе при значеніи $k_2 = 0{,}00018$, но нѣсколько выше послѣднихъ. Судя по тому, что среднія значенія k (при $i = 0{,}003$) ближе всего подходятъ къ результатамъ, получаемымъ по формулѣ Гангилье-Куттера при коеффиціентѣ шероховатости $n = 0{,}011$, формула Фламана больше всего подходитъ къ водопроводамъ, находящимся въ хорошемъ состояніи.

Формула Фламана для футовыхъ мѣръ примѣняется въ Сѣв. Америкѣ для разсчета водопроводовъ въ слѣдующемъ видѣ[2]):

$$v = 76{,}28\ D^{5/7}\, i^{4/7}. \tag{121}$$

Формула Фламана, въ какомъ бы видѣ она ни была представлена, является частнымъ случаемъ уравненія вида

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = f_3(z), \tag{36}$$

и потому можетъ быть преобразована въ форму діаграммы сопряженныхъ масштабовъ, по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія.

Первый очень интересный опытъ графическаго представленія этой формулы, для метрическихъ мѣръ, былъ сдѣланъ французскимъ воен-

[1]) Такое сравненіе сдѣлано въ моей работѣ «Формулы логарифмическаго вида для разсчета водопроводовъ».

[2]) М. М. Черепашинскій. Водоснабженіе.

нымъ инженеромъ Бертраномъ (L. Bertrand). Затѣмъ тотъ же методъ былъ примѣненъ къ формулѣ Фламана также и для футовыхъ мѣръ.

Способъ обращенія этой формулы (а также и производныхъ отъ нея, съ которыми придется имѣть дѣло при описаніи преобразованія исполненнаго Бертраномъ), совершенно тотъ же, который былъ разъ ясненъ нами болѣе подробно въ общемъ видѣ и въ примѣненіи къ формулѣ Леви-Валло.

Взявъ, напримѣръ, основную формулу

$$D^{5/4} i = a v^{7/4} \tag{115}$$

(или подобную основной производную), логарифмируемъ ее. Получается въ данномъ случаѣ

$$\frac{5}{4} \log D \log a = \frac{7}{4} \log v . \log i . \tag{123}$$

Строя параллельные логарифмическіе масштабы функцій $\left(\frac{5}{4} \log D - \log a\right)$ и $\frac{7}{4} \log v$ на произвольномъ разстояніи другъ отъ друга, при соотвѣтственно выбранныхъ модуляхъ, опредѣляя затѣмъ, по извѣстнымъ правиламъ, положеніе и модуль масштаба функціи $\log i$ и выстраивая его, получимъ въ концѣ концовъ систему трехъ сопряженныхъ масштабовъ, примѣняемую соотвѣтственно основному свойству пересѣкающихъ ихъ прямыхъ.

Такая система можетъ быть дополнена масштабами другихъ функцій, которыя связаны съ вошедшими въ діаграмму при посредствѣ уравненій одночленнаго вида.

Такъ, напримѣръ, пользуясь соотношеніемъ

$$Q = \frac{\pi D^2 v}{4}, \tag{124}$$

можемъ построить еще масштабъ расходовъ Q. Для этого, логарифмируя уравненіе (124) и получивъ

$$\log Q - \log \frac{\pi}{4} = 2 \log D + \log v, \tag{124'}$$

строимъ систему сопряженныхъ масштабовъ функцій $\left(\log Q - \log \frac{\pi}{4}\right)$, $2 \log D$ и $\log v$, принимая расположеніе и градуировку масштабовъ D и v (путемъ соотвѣтственнаго выбора модулей), которыя уже имѣются

на діаграммѣ. Тогда въ результатѣ построенія получимъ четвертый сопряженный масштабъ Q.

Подобнымъ образомъ число сопряженныхъ масштабовъ діаграммы можетъ быть еще увеличено, въ зависимости отъ числа соотношеній, которыя желательно представить и разрѣшить графическимъ образомъ.

Наиболѣе интересной изъ діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ является діаграмма, построенная Бертраномъ для графическаго разсчета по формулѣ Фламана въ метрическихъ мѣрахъ[1]).

Бертранъ взялъ формулу, предложенную Фламаномъ въ видѣ

$$D^5 i^4 = a^4 v^7 \qquad (115'')$$

и примѣнилъ ее прежде всего для построенія діаграммы изъ трехъ сопряженныхъ масштабовъ, которая даетъ одну изъ трехъ величинъ D, i или v по заданнымъ двумъ другимъ.

Но Бертранъ замѣтилъ при этомъ съ полнымъ основаніемъ, что и другія величины, зависящія отъ указанныхъ, желательно и возможно опредѣлять одновременно путемъ того же графическаго метода.

Эти новыя перемѣнныя, прежде всего, слѣдующія.

1) *Расходъ* Q. Онъ связанъ со скоростью v и діаметромъ D соотношеніемъ

$$4\,Q = \pi\, D^2 v, \qquad (124')$$

которое позволяетъ представить предшествующую формулу (115'') подъ видомъ

$$D^{19} i^4 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 Q^7. \qquad (125)$$

Чтобы упростить это выраженіе, можно замѣнить одной буквой c постоянное произведеніе

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 = c \qquad (126)$$

и написать

$$D^{19} i^4 = c\, Q^7. \qquad (125)$$

Это выраженіе опредѣляетъ связь между D, i и Q и даетъ возможность построить на той же діаграммѣ, по масштабамъ D и i, масштабъ Q.

[1]) Flamant. Hydraulique.

2) *Полная длина трубопровода* L и *полная потеря напора* H. Онѣ связаны съ единичной потерей напора i соотношеніемъ

$$H = Li. \tag{127}$$

Въ отношеніи этихъ новыхъ величинъ формула (125′) приметъ видъ

$$D^{19} H^4 = c L^4 Q^7, \tag{128}$$

или

$$H = c^{\frac{1}{4}} L Q^{\frac{7}{4}} D^{-\frac{19}{4}} \tag{128'}$$

Величины L и H, будучи представлены подобнымъ же образомъ въ видѣ логарифмическихъ масштабовъ, вмѣстѣ съ предшествующими, даютъ діаграмму изъ шести сопряженныхъ масштабовъ, составляющихъ двѣ самостоятельно работающія системы:

1) Q, D, i, v;

2) L, i, H.

Нужно замѣтить, что нерѣдко масштабы градуируются съ двухъ сторонъ. Такъ, напримѣръ, на масштабѣ расходовъ съ одной стороны наносятъ дѣленія, соотвѣтствующія литрамъ въ секунду, съ другой литрамъ въ минуту; на масштабѣ діаметровъ—съ одной стороны діаметры, съ другой живыя сѣченія; на масштабѣ скоростей—съ одной стороны скорости, а на другой—значенія $\frac{v^2}{2g}$.

При составленіи діаграммы Бертранъ стремился къ тому, чтобы примѣнить формулу Фламана и ея графическое преобразованіе ко всѣмъ величинамъ, характеризующимъ трубопроводъ. При этомъ ему пришла мысль, по аналогіи съ элементами, которые опредѣляютъ не внѣшніе размѣры трубопровода, а характеризуетъ его, такъ сказать, внутреннюю сущность, какъ гидравлическій уклонъ и скорость движенія, ввести новыя понятія о другихъ элементахъ, могущихъ характеризовать трубопроводъ въ различныхъ отношеніяхъ и представляющихъ функціи величинъ, обычно опредѣляющихъ трубопроводъ. Исходя изъ этого, онъ вводитъ понятіе о четырехъ элементахъ такого рода, которые называетъ *сопротивленіемъ* (la résistance), *проводною способностью* (le débouché), *мощностью* (la puissance) *и коеффиціентомъ измѣненія стоимости* (la variation du prix) трубопровода. Эти элементы, помимо дѣйствительной полезности ихъ въ извѣстныхъ случаяхъ разсчета,

представляютъ значительный интересъ съ точки зрѣнія, если можно такъ выразиться, философіи водопроводной гидравлики. Значеніе ихъ будетъ ясно изъ послѣдующаго изложенія.

Величины сопротивленія, проводной способности, мощности и коэффиціента измѣненія стоимости, на основаніи уравненій, выражающихъ ихъ въ видѣ функцій другихъ величинъ, опредѣляющихъ трубопроводъ, также представлены на діаграммѣ Бертрана въ формѣ еще трехъ сопряженныхъ масштабовъ, изъ которыхъ одинъ общій для сопротивленія и проводной способности. Такимъ образомъ діаграмма Бертрана состоитъ изъ девяти сопряженныхъ масштабовъ.

3) *Сопротивленіе* трубопровода. Такимъ терминомъ (la résistance) Бертранъ называетъ функцію $\frac{H}{Q^{7/4}}$, которую мы обозначимъ буквой r.

Такимъ образомъ

$$r = HQ^{-\frac{7}{4}} = c^{\frac{1}{4}} L D^{-\frac{19}{4}} \tag{129}$$

или

$$H^4 = r^4 Q^7, \tag{129'}$$

$$c L^4 = r^4 D^{19}. \tag{129''}$$

Если взять трубопроводъ, составленный изъ нѣсколькихъ трубъ, имѣющихъ различные діаметры D_1, D_2... и длины соотвѣтственно L_1, L_2..., которыя положены одна за другой и пропускаютъ одинъ и тотъ же расходъ Q, то полная потеря напора будетъ, по (128'),

$$H = c^{\frac{1}{4}} Q^{\frac{7}{4}} \left(L_1 D_1^{\frac{19}{4}} + L_2 D_2^{-\frac{19}{4}} + .. \right) \tag{130}$$

отсюда

$$\frac{H}{Q^{7/4}} = c^{\frac{1}{4}} \left(L_1 D_2^{-\frac{19}{4}} + L_2 D_2^{-\frac{19}{4}} + .. \right) \tag{130'}$$

и по (129)

$$r = r_1 + r_2 + \ldots \tag{131}$$

Полное сопротивленіе будетъ такимъ образомъ суммой сопротивленій $r_1 + r_2 + \ldots$ отдѣльныхъ частей трубопровода. Изъ этого видно, что то, что мы въ данномъ случаѣ разумѣемъ подъ терминомъ *сопротивленіе*, аналогично электрическому сопротивленію въ проводникахъ.

4) *Проводная способность* трубопровода. Подъ этимъ терминомъ (le débouché) Бертранъ понимаетъ свойство, обратное сопротивленію. Онъ обозначаетъ этимъ именемъ функцію

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{4}{7}} = \frac{Q}{H^{4/7}}, \tag{132}$$

которую мы назовемъ буквой d:

$$d = Q H^{-\frac{4}{7}} = c^{-\frac{1}{7}} L^{-\frac{4}{7}} D^{\frac{19}{7}} \tag{133}$$

или

$$Q^7 = d^7 H^4 \tag{133'}$$

и

$$D^{19} = c^4 d^7 L^4. \tag{133''}$$

Если два резервуара соединены между собою извѣстнымъ количествомъ трубъ, которыя имѣютъ діаметры D_1, D_2... и соотвѣтственно длины L_1, L_2.., такимъ образомъ, что полная потеря напора H для всѣхъ одна и та же, то полный расходъ Q (по 128') будетъ имѣть выраженіе

$$Q = c^{-\frac{1}{7}} H^{\frac{4}{7}} \left(L_1^{-\frac{7}{4}} D_1^{\frac{19}{7}} + L_2^{-\frac{4}{7}} D_2^{\frac{19}{7}} + ..\right) \tag{134}$$

$$\frac{Q}{H^{4/7}} = c^{-\frac{1}{7}} \left(L_1^{-\frac{4}{7}} D_1^{\frac{19}{7}} + L_2^{-\frac{7}{4}} D_2^{\frac{19}{7}} + ..\right) \tag{134'}$$

$$d = d_1 + d_2 \ldots \tag{135}$$

Такимъ образомъ полная пропускная способность d будетъ равна суммѣ пропускныхъ способностей d_1, d_2, ... отдѣльныхъ трубъ. Итакъ пропускная способность оказывается аналогичной электропроводности проводниковъ.

5) *Мощность* трубопровода. Если приходится изучать различныя комбинаціи діаметра и потери напора, могущія быть на подлежащемъ устройству трубопроводѣ, въ которомъ извѣстна только общая длина L и расходъ Q, то, по мнѣнію Бертрана, полезно опредѣлить заранѣе функцію

$$f = Q^{\frac{7}{4}} L. \tag{136}$$

Эта функція названа имъ мощностью (la puissance) трубопровода, и мы обозначимъ ее буквой f. На основаніи (128')

$$f = Q^{\frac{7}{4}} L = c^{-\frac{1}{4}} D^{\frac{19}{4}} H \tag{137}$$

6) *Коеффиціентъ измѣненія стоимости.* Бертранъ обозначаетъ этимъ именемъ (variation du prix) выраженіе $\frac{4}{19}\frac{i}{D}$, и вотъ почему.

Если данъ трубопроводъ опредѣленной длины, можно, оставляя его расходъ постояннымъ, варьировать въ противоположныя стороны между извѣстными предѣлами діаметръ и потерю напора, другими словами, стоимость и потерю напора, такъ какъ для данной длины стоимость приблизительно пропорціональна діаметру.

Выше приведенное уравненіе

$$D^{19} H^4 = c L^1 Q^7 \tag{121}$$

легко приводится, путемъ логарифмированія и дифференцированія, принимая второй членъ за постоянное, къ виду

$$\frac{dD}{D} = -\frac{4}{19}\frac{dH}{H} \tag{138}$$

или

$$d(LD) = -\frac{4}{19}\frac{LD}{H} dH = -\frac{4}{19}\frac{D}{i} dH. \tag{137}$$

Такимъ образомъ измѣненіе стоимости, пропорціональное измѣненію произведенія LD, равно измѣненію потери напора, умноженному на функцію $\frac{4}{19}\frac{D}{i}$. Она положительна, если потеря напора уменьшается, и отрицательна, если послѣдняя увеличивается.

Мы обозначимъ эту функцію, названную коеффиціентомъ измѣненія стоимости, черезъ ε.

Такимъ образомъ

$$\varepsilon = \frac{4}{19}\frac{D}{i}, \tag{140}$$

или

$$19\,\varepsilon\, i = 4\,D. \tag{140'}$$

Изъ предшествующаго видно, что всѣ величины, которыя въ какомъ бы то ни было случаѣ могутъ фигурировать при разсчетѣ водоснабженія, исходя изъ формулы Фламана, связаны между собою одночленными выраженіями, что и дало возможность Бертрану представить ихъ графически въ видѣ общей діаграммы сопряженныхъ масштабовъ.

Діаграмма Бертрана представлена на черт. 18.

Она заключаетъ девять параллельныхъ масштабовъ съ логарифмическими дѣленіями, соотвѣтствующихъ величинамъ, въ послѣдовательномъ порядкѣ слѣва, Q, r (и d), H, D, f, ε, i, v и L. Эти масштабы имѣютъ въ заголовкѣ обозначенія количествъ, которыя они представляютъ, и которыхъ опредѣленія и алгебраическія выраженія мы дали выше. Принимая во вниманіе эти опредѣленія и общую теорію сопряженныхъ масштабовъ, изложенную въ началѣ, можно видѣть, что діаграмма представляетъ нѣсколько самостоятельныхъ системъ сопряженныхъ масштабовъ, причемъ линіи прямолинейнаго пересѣченія могутъ служить для опредѣленія слѣдующихъ группъ величинъ:

1) расходъ Q, діаметръ D, гидравлическій уклонъ i, скорость v и коеффиціентъ измѣненія стоимости ε;

2) діаметръ D, длина L, сопротивленіе r и проводная способность d;

3) расходъ Q, сопротивленіе r, проводная способность d и полная потеря напора H;

4) длина L, расходъ Q и мощность D;

5) діаметръ D, потеря напора H и мощность D;

6) потеря напора H, длина L и уклонъ i.

Изъ этого слѣдуетъ, что если извѣстно двѣ величины, соотвѣтственная сѣкущая является опредѣленной и опредѣляетъ въ свою очередь остающійся элементъ или другіе элементы тойже группы. Если извѣстны два элемента одной группы и третій элементъ изъ другой группы, то могутъ быть получены всѣ остальные элементы [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, многоугольникъ, вычерченный вверху діаграммы, является опредѣленнымъ, когда извѣстны три изъ его угловъ, не находящіеся на одной прямой. Предположимъ для примѣра, что извѣстны Q, r, D.

Q и r дадутъ H.

Q и D дадутъ i.

H и D дадутъ f.

r и D или H и i, или Q и f дадутъ L.

---

[1]) Однако предполагается, что между данными двумя элементами первой группы нельзя считать скорость и коеффиціентъ измѣненія стоимости.

Многоугольникъ, начерченный надъ масштабами діаграммы, есть графическое выраженіе соотношеній, о которыхъ было упомянуто.

Принятые масштабы слѣдующіе. Для длины L, потери напора H, діаметра D—метръ со своими подраздѣленіями. Скорость v выражена въ метрахъ въ секунду. На той же оси другой масштабъ даетъ значенія $\frac{v^2}{2g}$, также въ метрическихъ мѣрахъ. Расходъ Q выражается двумя масштабами, налѣво расходъ въ секунду, направо расходъ въ минуту, въ литрахъ, для большихъ расходовъ въ куб. метрахъ. Уклонъ i есть отношеніе двухъ длинъ H и L и потому число отвлеченное, выражаемое въ единицахъ или десятичныхъ дробяхъ единицы. Тоже самое въ отношеніи другихъ величинъ, сопротивленія, пропускной способности, мощности и измѣненія стоимости. За единицу сопротивленія принято такое сопротивленіе, которое соотвѣтствуетъ расходу въ 1 куб. метръ въ секунду при потерѣ напора въ 1 метръ; за единицу проводной способности—проводная способность такой трубы, которая даетъ 1 куб. метръ въ секунду при потерѣ напора въ 1 метръ; для коеффиціента измѣненія стоимости единица соотвѣтствуетъ такимъ значеніямъ D и i, при которыхъ функція $\frac{4}{19}\frac{D}{i}$ равна 1.

Нѣкоторое неудобство діаграммы Бертрана составляетъ ея сложность, которая проистекаетъ отъ большого количества масштабовъ и можетъ затруднять чтеніе. Это обстоятельство очень важно, такъ какъ главное преимущество діаграммъ въ ихъ практическомъ употребленіи составляетъ простота. Поэтому слѣдуетъ уменьшать въ нихъ количество линій и вообще удалять все, что не очень нужно и что можетъ усложнять чтеніе, утомлять глазъ и тѣмъ повлечь ошибки при ослабленіи вниманія. Исходя изъ этой мысли, Г. Даріэсъ сократилъ діаграмму Бертрана, оставивъ въ ней только тѣ элементы, которые необходимы съ точки зрѣнія повседневной практики, т. е. расходъ, діаметръ, гидравлическій уклонъ и скорость. Въ такомъ видѣ діаграмма воспроизведена на черт. 19. Способъ употребленія ея понятенъ изъ предыдущаго.

Чертежъ 20 представляетъ діаграмму сопряженныхъ масштабовъ для разсчета водопроводныхъ трубъ по формулѣ Фламана, переработанной въ примѣненіи къ мѣрамъ, употребляемымъ въ сѣв. Америкѣ, именно

$$v = 76{,}28\, D^{\frac{5}{7}} i^{\frac{4}{7}}. \qquad (122)$$

Діаграмма построена по методу точекъ прямолинейнаго пересѣченія для величинъ діаметровъ D, уклоновъ i, скоростей v и расходовъ Q. Построеніе ея произведено въ изложенномъ выше порядкѣ, въ отношеніи величинъ D, i и v на основаніи выраженія (122), а въ отношеніи Q на основаніи также соотношенія

$$Q = \frac{\pi D^2 v}{4}. \qquad (124)$$

Діаграмма черт. 20, подобно діаграммѣ формулы Леви-Валло, состоитъ изъ 4 масштабовъ. На первомъ масштабѣ представлены слѣва расходы Q въ куб. футахъ въ секунду, а справа въ американскихъ галлонахъ въ минуту (1 галлонъ=0,1605 куб. ф.=231 куб. дм.), на второмъ масштабѣ діаметры D въ дюймахъ, на третьемъ потери напора i въ футахъ на разстояніи 1000 фут., и на четвертомъ скорости v въ футахъ въ секунду. Масштабъ Q включаетъ расходы, начиная съ 0,10 куб. фут. до 20 куб. фут. въ секунду и съ 50 галлоновъ до 9000 галлоновъ въ минуту. Масштабъ D заключаетъ діаметры отъ 1,5 дюйма до 72 дюйм.=6 фут. Масштабъ потерь напора i начинается съ уклона въ 0,03 фута на 1000 фут. и идетъ до 400 ф. на 1000 фут. Наконецъ, масштабъ v включаетъ скорости въ предѣлахъ отъ 0,7 до 10 фут. въ секунду.

Пользованіе этой діаграммой производится такъ же, какъ и діаграммой формулы Леви-Валло. По свойству діаграммы, если провести произвольную прямую, то она засѣкаетъ на масштабахъ отвѣчающія другъ другу значенія для величинъ Q, D, v и i. Когда поэтому двѣ изъ нихъ даны, то прямая, проведенная черезъ соотвѣтственныя точки масштабовъ, даетъ въ пересѣченіи съ другими двумя масштабами искомыя остальныя двѣ величины.

VI. Предѣлы и особенности примѣненія способа сопряженныхъ масштабовъ и его общая оцѣнка.

Обращаясь къ оцѣнкѣ способа гидравлическаго разсчета санитарно-техническихъ сооруженій при помощи діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ, съ точки зрѣнія широты и удобства его примѣненія, по сравненію съ другими методами разсчета, мы должны остановиться прежде всего на вопросѣ о предѣлахъ примѣненія этого способа въ отношеніи къ различнымъ размѣрамъ водоводовъ при разныхъ условіяхъ ихъ службы, къ сѣченіямъ некруговой формы, къ различнымъ ко-

еффиціентамъ шероховатости и, наконецъ, къ разнымъ степенямъ заполненія водоводовъ.

Предѣлы примѣненія способа сопряженныхъ масштабовъ къ трубопроводамъ разныхъ размѣровъ и условіямъ ихъ службы зависятъ, конечно, отъ характера и широты примѣненія тѣхъ гидравлическихъ формулъ, которыя представлены графически по этому способу. Такимъ образомъ вопросъ сводится къ опредѣленію наиболѣе подходящихъ предѣловъ примѣненія формулъ Лампе, Леви-Валло и Фламана, путемъ сравненія съ формулами, характеръ которыхъ представляется достаточно извѣстнымъ. Такое сравненіе сдѣлано въ другой моей работѣ [1]), гдѣ приведены соотвѣтственныя таблицы и свѣдѣнія, относящіяся къ отдѣльнымъ формуламъ логарифмическаго вида. Эти данныя указываютъ, что всѣ три формулы даютъ результаты, достаточно близкіе, при опредѣленныхъ условіяхъ работы трубопроводовъ, къ формуламъ Дарси-Базена и ГангильеКуттера, имѣющими за собою заслуженный авторитетъ, что онѣ пользуются, съ возрастающимъ успѣхомъ, болѣе или менѣе широкимъ практическимъ примѣненіемъ, и вообще онѣ могутъ быть причислены къ формуламъ, заслуживающимъ вниманія спеціалистовъ, даже сами по себѣ, независимо отъ особыхъ удобствъ обращенія съ ними. Къ этому можно прибавить только еще одну справку.

Проф. Ф. Е. Максименко въ своемъ курсѣ Гидравлики приводитъ, на основаніи работъ Смита, сравнительныя таблицы скоростей для трубъ разнаго діаметра, вычисленныя по различнымъ формуламъ. При этомъ оказывается, что изъ формулъ, вошедшихъ въ употребленіе, наилучшіе, въ смыслѣ согласованія съ дѣйствительностью, результаты дали, для новыхъ асфальтированныхъ трубъ, формулы Лампе, Гангилье-Куттера, Вейсбаха и Леви, для старыхъ трубъ, формулы Франка, Дарси-Базена и Леви. Формула Фламана не входитъ въ обѣ эти сравнительныя таблицы, а формула Лампе—въ послѣднюю.

Не говоря уже о многихъ менѣе совершенныхъ формулахъ, предѣлы примѣненія которыхъ очень узки, даже формула Дарси, напримѣръ, въ отношеніи къ трубамъ съ отложеніями даетъ правильные діаметры только между 0,05 и 0,50 м; ниже 0,04 м. она замѣтно неточна, а выше 0,50 м. даетъ результаты преувеличенные, и это преувеличеніе особенно замѣтно, начиная съ 0,80 м. Формулы Лампе, Леви Валло и Фламана, въ зависимости отъ тѣхъ теоретическихъ и практическихъ основъ, изъ которыхъ онѣ исходятъ, также являются особенно подходящими каждая для опредѣленныхъ условій движенія воды, которыя и указываютъ предѣлы ихъ примѣнимости. Эти условія выясняются довольно рельефно на основаніи составленной мною для этой цѣли сравнительной

[1]) „Формулы логарифмическаго вида для разсчета водопроводовъ".

таблицы I. Эта таблица содержитъ значенія коеффиціента скорости k, которыя получаются по разсматриваемымъ формуламъ (по преобразованіи ихъ по типу Шези) въ примѣненіи къ случаю движенія воды въ водопроводныхъ трубахъ, покрытыхъ осадками, а по формулѣ Лампе также къ случаю обыкновенныхъ водостоковъ. Для сравненія добавлены значенія коеффиціента k по формуламъ Дарси-Базена и Гангилье-Куттера при такихъ величинахъ шероховатости, при которыхъ получаются значенія, подходящія къ интересующимъ насъ формуламъ. Значенія k относятся къ шести діаметрамъ (3, 6, 12, 18, 30 и 48 дм.) и расположены, по возможности, въ порядкѣ убыванія этихъ значеній. Такой порядокъ даетъ возможность легко установить положеніе изучаемыхъ формулъ въ отношеніи формулъ Дарси-Базена и Гангилье-Куттера при разныхъ условіяхъ и опредѣлить ихъ характеръ.

ТАБЛИЦА I.

Сравнительныя значенія коеффиціента скорости k по формуламъ Лампе Фламана, Леви-Валло, Дарси-Базена и Гангилье-Куттера.

Діаметры трубъ.	Гангилье Куттеръ $n=0,011$.	Фламанъ $a_2=0,00092$ $i=0,003$	Гангилье-Куттеръ. $n=0,012$	Лампе $n_2=0,00018$ $i=0,003$	Дарси-Базенъ. $\alpha=0,00019$ $\beta=0,0000133$.	Гангилье-Куттеръ $n=0,013$	Лампе $n_3=0,00025$ $i=0,003$	Гангилье-Куттеръ $n=0,014$	Леви-Валло.
3″	40,2	40,7	35,3	40,5	33,6	31,6	33,9	28,2	36,5
6″	49,6	47,8	43,9	46,0	43,1	39,9	38,4	35,4	39,2
12″	59,5	55,7	53,0	52,8	52,1	48,0	44,0	43,4	42,6
18″	65,2	60,8	58,3	57,1	57,1	53,0	47,6	47,4	45,2
30″	72,2	67,9	64,9	63,1	62,1	59,3	52,5	54,1	49,0
48″	78,9	74,9	70,7	69,3	65,4	64,9	57,7	59,4	53,1

Разсмотрѣніе приведенной таблицы приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ относительно предѣловъ примѣнимости разсматриваемыхъ логарифмическихъ формулъ и представляющихъ ихъ діаграммъ.

Формула Лампе съ коеффиціентомъ для водопроводныхъ трубъ 0,00018, при среднемъ значеніи уклона, для большинства калибровъ городского водоснабженія почти совпадаетъ съ формулой Дарси-Базена для трубъ съ осадками и Гангилье-Куттера при коеффиціентѣ 0,012, которыя очень близки между собою. Для трубъ малаго діаметра (3″) коеффиціентъ k по формулѣ Лампе нѣсколько выше, что въ общемъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Такимъ образомъ формула Лампе и діаграмма Лампе-Чижова являются очень подходящими для разсчета

трубъ городского и домоваго водоснабженія по всей скалѣ діаметровъ такихъ трубъ, въ предположеніи вполнѣ удовлетворительнаго ихъ внутренняго состоянія.

Формула Лампе съ коеффиціентомъ для обыкновенныхъ водостоковъ 0,00025 даетъ коеффиціенты, находящіеся въ промежуткѣ между результатами, получаемыми по формулѣ Гангилье-Куттера при коеффиціентахъ шероховатости 0,013 и 0,014. Это показываетъ, что въ примѣненіи къ водостокамъ формула Лампе разсчитана на условія не особенно исправнаго содержанія ихъ.

Формула Фламана, при коеффиціентѣ для трубъ съ осадками, въ таблицѣ I занимаетъ мѣсто между столбцами для формулы Гангилье-Куттера при коеффиціентахъ 0,011 и 0,012, въ общемъ (за исключеніемъ калибра 3″) ближе къ значеніямъ при $n = 0{,}012$. При этомъ значенія k по формулѣ Фламана близки къ соотвѣтственнымъ значеніямъ по Лампе, но нѣсколько выше ихъ. Такимъ образомъ въ отношеніи формулы Фламана и діаграммы Фламанъ-Бертрана приходится сказать почти то же, что и объ формулѣ Лампе. Онѣ являются вполне пригодными для разсчета трубъ городского водоснабженія въ предположеніи хорошаго внутренняго состоянія трубъ и воды, дающей мало осадковъ. Въ случаяхъ, когда ожидается проведеніе воды нефильтрованной или съ большимъ количествомъ известковыхъ солей, вообще, когда предполагается образованіе значительнаго количества осадковъ, Фламанъ рекомендуетъ прибавку прямо къ размѣрамъ діаметровъ, полученнымъ по разсчету. Такой совѣтъ, въ виду недостаточной опредѣленности размѣровъ прибавки, является неудобнымъ для осуществленія, и съ этой точки зрѣнія формула Лампе, принимающая большій запасъ на коеффиціентѣ шероховатости, представляется болѣе практичной. По мнѣнію Даріэса, формула Фламана даетъ прекрасные результаты, начиная съ 0,01 м. до 1,30 м.; для 0,05 м. цифры еще удовлетворительны; тоже самое и сверхъ 1,30 м., хотя здѣсь размѣры діаметровъ получаются нѣсколько малыми. Коеффиціентовъ для иныхъ случаевъ практики Фламанъ, какъ было указано, не даетъ, а коеффиціентъ его для трубъ съ гладкими поверхностями не имѣетъ большого практическаго значенія.

Формула Леви-Валло даетъ для малыхъ діаметровъ значенія k, близкія къ формулѣ Дарси-Базена. Для калибровъ же, соотвѣтствующихъ городскимъ водоснабженіямъ, по этой формулѣ получаются результаты приближающіеся къ формулѣ Гангилье-Куттера при коеффиціентѣ 0,014. Такимъ образомъ формула Леви-Валло и ея діаграмма въ примѣненіи къ задачамъ городского водоснабженія являются подходящи-

ми для тѣхъ случаевъ, когда ожидаются значительные осадки и загрязненія трубопровода. Таковъ, напримѣръ, разсчетъ большихъ загородныхъ магистралей, проводящихъ нефильтрованную воду.

Для разсчета городской сѣти данная формула примѣнима въ предположеніи долговременной службы при большомъ количествѣ отложеній и вообще не вполнѣ удовлетворительнаго состоянія внутренней поверхности трубъ. Французскіе спеціалисты считаютъ формулу Леви Валло подходящей для всей скалы діаметровъ, начиная съ 0,05 до 3,00 метр., (нужно думать, при упомянутыхъ предположеніяхъ) въ особенности же для большихъ діаметровъ, начиная съ 1,30 метр., т. е. именно для загородныхъ магистралей. Эта формула также не имѣетъ коеффиціента, относящагося къ водостокамъ, коеффиціентъ же для новыхъ и чистыхъ трубъ не имѣетъ практическаго примѣненія.

Переходя къ вопросу о предѣлахъ примѣнимости описанныхъ выше діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ въ отношеніи различныхъ коеффиціентовъ шероховатости, мы видимъ прежде всего, что діаграмма Лампе-Чижова заключаетъ въ своей конструкціи, между прочимъ, и масштабъ коеффиціентовъ шероховатости и тѣмъ самымъ допускаетъ свободное измѣненіе этихъ коеффиціентовъ путемъ самаго метода пользованія діаграммой. Діаграмма Фламанъ-Бертрана построена для одного опредѣленнаго коеффиціента шероховатости, именно $n_2 = 0{,}00092$. Практически говоря, вопросъ о примѣненіи къ этой діаграммѣ другихъ коеффиціентовъ шероховатости не имѣетъ значенія, такъ какъ эти коеффиціенты не выработаны для самой формулы (не считая коеффиціента для трубъ съ гладкой внутренней поверхностью), и она предназначена для рѣшенія вопросовъ въ примѣненіи къ одному опредѣленному случаю движенія воды. Однако діаграмма Фламанъ-Бертрана (и ей подобныя) сама по себѣ допускаетъ совершенно свободно примѣненіе другихъ коеффиціентовъ шероховатости. Покажемъ это, напримѣръ, въ примѣненіи къ сокращенной діаграммѣ Фламанъ-Бертрана съ четырьмя масштабами.

Общій видъ формулы Фламана съ коеффиціентомъ шероховатости a_1 будетъ

$$D^{\alpha} i = a_1 v^{\beta} . \qquad (141)$$

Для представленія ея въ графическую форму мы логарифмируемъ формулу и получаемъ

$$\alpha \log D - \log a_1 = \beta \log v - \log i \qquad (141')$$

и затѣмъ строимъ, по извѣстнымъ правиламъ, въ видѣ масштабовъ

функціи $(\alpha \log D - \log a_1)$, $\beta \log v$ и $\log i$. При такомъ способѣ построенія ясно, что переходъ отъ коеффиціента шероховатости a_1 къ a_2 не вноситъ въ діаграмму никакихъ измѣненій въ отношеніи масштабовъ уклона i и скорости v, измѣненіе же въ масштабѣ діаметровъ сводится къ тому, что вмѣсто функціи $(\alpha \log D - \log a_1)$ откладывается отъ прежней начальной точки и при томъ же модулѣ функція $(\alpha \log D - \log a_2)$.

Не трудно видѣть (черт. 21), въ чемъ выразится такое измѣненіе графически. Благодаря сохраненію модуля, дѣленія масштаба останутся тѣ же самыя, но весь масштабъ передвинется на длину, изображающую $(\log a_2 - \log a_1)$, въ сторону начала. Вслѣдствіе этого числовая отмѣтка, соотвѣтствующая любой точкѣ оси масштаба, должна измѣниться, именно увеличиться съ увеличеніемъ коеффиціента шероховатости, т. е. когда

$$\frac{a_2}{a_1} > 1, \log a_2 - \log a, > 0,$$

и уменьшиться въ обратномъ случаѣ. При этомъ измѣненіе происходитъ такимъ образомъ, что разстояніе между точками, которыя отвѣчаютъ одному и тому же чтенію на масштабахъ діаметровъ, построенныхъ при коеффиціентѣ a_1 и при коеффиціентѣ a_2, остается постояннымъ и равно $\pm(\log a_2 - \log a_1)$.

Такимъ образомъ, имѣя масштабъ діаметровъ для одной степени шероховатости, можно легко опредѣлить чтеніе любой точки оси масштаба, соотвѣтствующее масштабу для другой степени шероховатости. Для этого стоитъ только отложить отъ этой точки въ соотвѣтственную сторону длину, соотвѣтствующую при модулѣ масштаба величинѣ $\pm(\log a_2 - \log a_1)$, и отмѣтка полученной новой точки, прочитанная по существующему масштабу, будетъ искомой. Итакъ одинъ и тотъ же масштабъ діаметровъ и одна діаграмма Фламанъ-Бертрана, при желаніи, могли бы служить для разсчетовъ въ предположеніи разныхъ степеней шероховатости. Такъ, напримѣръ, съ этой діаграммой можно рѣшать задачи о движеніи воды въ трубахъ съ гладкой внутренней поверхностью, когда коеффиціентъ $n = 0{,}00074$. Для этого, оперируя обычнымъ образомъ со всѣми масштабами діаграммы, нужно только помнить, что отмѣтки точекъ масштаба діаметровъ въ данномъ случаѣ нужно читать ниже самыхъ точекъ въ разстояніи, соотвѣтствующемъ

$$\log a_1 - \log a_2 = 0{,}09456$$

при модулѣ масштаба діаметровъ.

Чтеніе въ подобныхъ случаяхъ удобнѣе производить при посредствѣ изготовленнаго заранѣе *переходнаго масштаба*, дающаго нужныя длины для разныхъ коеффиціентовъ шероховатости.

Ясно, что указанная операція могла бы быть замѣнена также рѣшеніемъ задачи въ примѣненіи къ основному коеффиціенту, съ измѣненіемъ затѣмъ результата пропорціонально отношенію a_2 къ a_1.

Въ томъ случаѣ, когда число коеффиціентовъ шероховатости, съ которыми приходится имѣть дѣло, не превышаетъ двухъ, возможно построить два масштаба діаметровъ съ двухъ сторонъ одной и той же оси, одинъ для одного, другой для другого коеффиціента шероховатости, и пользоваться тѣмъ или другимъ масштабомъ, въ зависимости отъ условій задачи.

Можно было бы, теоретически говоря, распространить сдѣланный нами выводъ и на полную діаграмму Фламанъ-Бертрана, примѣняя тѣ же соображенія и методъ къ отдѣльнымъ системамъ составляющихъ ее сопряженныхъ масштабовъ. Но вполнѣ опредѣленное назначеніе и притомъ сложность этой діаграммы, конечно, исключаютъ примѣненіе къ ней такой операціи.

Діаграмма Леви-Даріэса, по построенію совершенно подобная сокращенной діаграммѣ Фламанъ-Бертрана, конечно, допускаетъ рѣшеніе вопросовъ въ примѣненіи къ разнымъ степенямъ шероховатости въ той-же мѣрѣ и такимъ же способомъ.

Всѣ указанныя выше діаграммы сопряженныхъ масштабовъ, построенныя по методу д'Оканя, какъ было указано неоднократно, предназначены для разсчета водоводовъ круглаго сѣченія. Но предѣлы примѣненія ихъ вовсе не ограничены только этимъ видомъ поперечныхъ сѣченій. Напротивъ, всѣ онѣ могутъ быть также примѣняемы и для разсчета водоводовъ какого угодно поперечнаго сѣченія.

Начиная съ діаграммы Лампе-Чижова, мы видимъ, что ея основные масштабы уклоновъ, коеффиціентовъ шероховатости, гидравлическихъ радіусовъ и скоростей пригодны для разсчета всякихъ сѣченій, и только масштабы расходовъ для разныхъ діаметровъ служатъ исключительно для круглыхъ трубопроводовъ Поэтому діаграмма Лампе Чижова допускаетъ непосредственно рѣшеніе всякихъ задачъ, относящихся къ водоводамъ какого угодно сѣченія, причемъ операція ведется при посредствѣ только основныхъ масштабовъ, и элементомъ, опредѣляющимъразмѣръ сѣченія, является, конечно, гидравлическій радіусъ, по которому, въ зависимости отъ формы сѣченія, опредѣляется пролетъ или высота послѣдняго.

Діаграммы Леви-Даріэса и Фламанъ-Бертрана по своему построенію приспособлены непосредственно къ разсчету трубопроводовъ. Вопросъ о примѣненіи къ разсчету водоводовъ произвольнаго сѣченія, конечно, можетъ возникнуть только въ отношеніи діаграммъ съ четырьмя масштабами, такъ какъ часть дополнительныхъ масштабовъ полной діа-

граммы Фламанъ-Бертрана по существу относятся только къ напорнымъ трубопроводамъ, да и сложность діаграммы дѣлаетъ практически не удобнымъ введеніе еще дополнительныхъ манипуляцій Что же касается діаграммъ съ четырьмя масштабами, діаграммы Леви-Валло и сокращенной діаграммы Фламанъ Бертрана, то онѣ допускаютъ примѣненіе къ разсчету водоводовъ какого угодно сѣченія при помощи способа, который сводится, конечно, къ переходу къ эквивалентной діаграммѣ, построенной на основѣ гидравлическаго радіуса. Такой способъ въ отношеніи діаграммы Фламанъ-Бертрана (сокращенной) предложенъ мною въ особой работѣ[1]).

Здѣсь нужно оговориться, что этотъ способъ, простой и практичный, но всетаки нѣсколько осложняющій чтеніе, можно рекомендовать лишь для спорадическихъ случаевъ разсчета другихъ сѣченій; въ случаѣ же необходимости рѣшенія цѣлаго ряда задачъ, относящихся къ сѣченію того или другого типа, удобнѣе построить или имѣть спеціальную діаграмму для этого типа сѣченій.

Въ предшествующемъ мы говорили все время относительно разсчета трубъ, работающихъ при совершенномъ заполненіи. Такой случай является преобладающимъ при разсчетѣ водоснабженій. Совершенно обратное мы видимъ при разсчетѣ канализаціи: здѣсь совершенное заполненіе является случаемъ исключительнымъ, а неполное нормальнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, основной разсчетъ канализаціонной сѣти ведется на половинное заполненіе. Кромѣ того, количество сточныхъ водъ, поступающихъ въ канализацію, подвержено значительнымъ колебаніямъ, и потому водостокъ, разсчитанный на максимальное количество жидкости при заполненіи на всю высоту, будетъ при меньшемъ ея поступленіи наполненъ только частью, и въ немъ будетъ имѣть мѣсто такъ называемое несовершенное заполненіе. Степень этого заполненія опредѣляется обыкновенно отношеніемъ глубины потока жидкости въ средней ея части къ полной внутренней высотѣ водостока въ той же части.

Такимъ образомъ въ практикѣ очень часто приходится разсчитывать водостоки при несовершенномъ ихъ заполненіи, а также опредѣлять глубину протока въ трубахъ.

Здѣсь приходится различать два случая, именно половинное заполненіе и заполненіе произвольной степени.

Задачи, относящіяся къ первому, легко сводятся къ совершенному заполненію на основаніи того соображенія, что при одномъ и томъ же діаметрѣ D и уклонѣ i въ водостокѣ при половинномъ заполненіи скорость v та же ,какъ и при совершенномъ заполненіи, а расходъ въ два раза меньше.

[1]) „Переходный масштабъ и его примѣненія къ разсчету водоводовъ". (Будетъ напечатана въ „Извѣстіяхъ Томскаго Технологическаго Института" за 1911 годъ).

Задачи, касающіяся всякихъ вообще степеней заполненія, сводятся къ опредѣленію соотношенія между расходомъ и скоростью при совершенномъ заполненіи и расходомъ и скоростью при различныхъ степеняхъ заполненія.

Разсмотримъ этотъ вопросъ, для примѣра, въ отношеніи водостоковъ круглаго сѣченія.

Представимъ себѣ (черт. 22) водостокъ круглаго сѣченія съ діаметромъ D. Раздѣлимъ вертикальный діаметръ его на 10 равныхъ частей и проведемъ черезъ точки дѣленія горизонтальныя прямыя, представляющія поверхности протекающей по водостоку жидкости при соотвѣтствующихъ его заполненіяхъ.

Вычисляя для каждой степени заполненія величину гидравлическаго радіуса ρ и задаваясь какимъ нибудь уклономъ i, опредѣлимъ расходъ Q.

Имѣя величину Q для совершеннаго заполненія и Q_1, Q_2, Q_3 ... Q_9 для заполненій отъ 0,1 до 0,9, можно построить кривую, показывающую, какъ при данномъ діаметрѣ и уклонѣ измѣняется Q съ измѣненіемъ заполненія. Для построенія этой кривой примемъ Q за единицу и отложимъ его въ какомъ нибудь масштабѣ вправо отъ линіи A B по горизонтальной прямой A C, соотвѣтствующей совершенному заполненію. Разъ мы приняли Q, отвѣчающее совершенному заполненію, за 1, то вмѣсто величинъ Q_1, Q_2... надо на линіяхъ, отвѣчающихъ другимъ заполненіямъ, отложить величины отношеній

$$\mu_1 = \frac{Q_1}{Q},$$

$$\mu_2 = \frac{Q_2}{Q}, \qquad (154)$$

. . . . . .

Полученныя путемъ отложенія точки соединимъ кривой линіей.

Если возьмемъ другой діаметръ D_1 и другой уклонъ i_1, то получимъ другую кривую Q. Произведя построеніе для различныхъ D и i_1, мы можемъ убѣдиться, что всѣ кривыя Q настолько близко совпадаютъ одна съ другой, что для цѣлей практики можно принять одну общую кривую Q одинаковую для всѣхъ D и i.

Имѣя такую кривую измѣненія расходовъ въ зависимости отъ степени заполненія, легко по количеству Q, отвѣчающему совершенному заполненію водостока для данныхъ D и i, найти Q_m для любого заполненія. Для этого надо только, опредѣливши величину μ, соотвѣтствующую желаемому заполненію, умножить Q на μ или раздѣлить его на $\frac{1}{\mu}$.

Въ случаѣ рѣшенія задачъ, относящихся къ несовершенному заполненію, такой же переходъ отъ расхода при совершенномъ заполненіи къ расходу при разныхъ степеняхъ заполненія можетъ производиться непосредственно по масштабу расходовъ. Въ самомъ дѣлѣ, равенства (154) можно представить въ видѣ

$$Q_1 = \frac{Q}{\frac{1}{\mu_1}},$$

$$Q_2 = \frac{Q}{\frac{1}{\mu_2}}, \qquad (154')$$

. . . .

Логарифмируя отдѣльныя равенства (154'), получаемъ

$$\log Q_1 = \log Q - \log \frac{1}{\mu_1},$$

$$\log Q_2 = \log Q - \log \frac{1}{\mu_2}, \qquad (155)$$

. . . . . .

Выраженіе $\frac{1}{\mu_m}$ вводится потому, что $\log$ его для большинства случаевъ положителенъ. Уравненія (155) показываютъ, что для полученія, по масштабу расходовъ діаграммы, величины расходовъ Q_1, $Q_2 \cdots$ при разныхъ степеняхъ заполненія сѣченія, нужно отъ дѣленія, соотвѣтствующаго расходу Q при совершенномъ заполненіи, отступить въ сторону начала масштабовъ на длину, изображающую при модулѣ масштаба $\log \frac{1}{\mu_1}$, $\log \frac{1}{\mu_2} \ldots$, и чтеніе въ полученной точкѣ дастъ искомое значеніе расхода при несовершенномъ заполненіи.

Въ видахъ удобства такой операціи, можно нанести величины $\log \frac{1}{\mu_1}$, $\log \frac{1}{\mu_2} \ldots$ въ масштабѣ принятомъ для величины Q, на особомъ переходномъ масштабѣ, отдѣльномъ или общемъ съ другими переходными величинами (такой масштабъ будетъ представлять далѣе), надписавъ противъ дѣленій соотвѣтствующія имъ степени заполненія. Необходимыя для построенія масштаба значенія μ и $\frac{1}{\mu}$ даны въ таблицѣ II, въ примѣненіи къ круглому, обыкновенному овоидальному и лотковому сѣченію (о двухъ центрахъ, такого типа, что если пролетъ назовемъ черезъ D, то радіусъ лотка равенъ также D, а радіусъ перекрывающаго полуциркульнаго свода $= \frac{D}{2}$).

Кривая Q показываетъ, что количество жидкости, протекающее по водостоку любого сѣченія при данномъ уклонѣ, будетъ наибольшимъ при степени заполненія, приблизительно равной 0,9. Количество это больше, чѣмъ при совершенномъ заполненіи. При заполненіи около 0,8 расходъ одинаковъ съ расходомъ, отвѣчающимъ совершенному заполненію, а при низшихъ степеняхъ заполненія меньше этого послѣдняго. Поэтому на переходномъ масштабѣ отмѣтка заполненія 0,8 совпадетъ съ отмѣткой 1,0, отмѣтка 0,9 ляжетъ выше, остальныя же ниже единицы. Понятно, что для степеней заполненія, при которыхъ $\mu > 1, log \frac{1}{\mu_m}$ будетъ отрицателенъ, и потому приходится откладывать по масштабу расходовъ величину $- log \frac{1}{\mu_m}$ въ сторону увеличенія дѣленій. При построеніи переходнаго масштаба, это происходитъ само собой.

Имѣя такой масштабъ вырѣзаннымъ и накладывая его на діаграмму такъ, чтобы точка съ отмѣткою $\frac{H}{D} = 1,0$ и 0,8 совпадала съ точкою отвѣчающею условіямъ совершеннаго заполненія, у точки съ надписью заданнаго заполненія найдемъ Q_m для этого заполненія. Обратно по Q_m, i и D можно найти отвѣчающую имъ степень заполненія $\frac{H}{D}$.

Скорость теченія v, какъ извѣстно, также измѣняется въ зависимости отъ степени заполненія, и при разсчетѣ канализацій иногда приходится опредѣлять скорости при разныхъ степеняхъ заполненія. Такъ же, какъ и въ отношеніи расхода, вопросъ сводится здѣсь къ переходу отъ скорости при совершенномъ заполненіи къ скорости при различныхъ степеняхъ заполненія, на основаніи заранѣе опредѣленнаго отношенія между этими скоростями. Возьмемъ для примѣра опять круглое сѣченіе и примемъ по прежнему 10 степеней заполненія, соотвѣтствующія черт. 22. Опредѣляя для каждой степени заполненія при среднемъ значеніи діаметра и уклона скорости теченія v_1, v_2... и сравнивая ихъ со скоростью при совершенномъ заполненіи, мы получимъ отношенія

$$\nu_1 = \frac{v_1}{v},$$

$$\nu_2 = \frac{v_2}{v}, \qquad (156)$$

. . . . .

которыя, подобно предыдущему, можно считать практически соотвѣтствующими для всякихъ діаметровъ и уклоновъ.

Откладывая величины ν_1, ν_2... на тѣхъ же линіяхъ, гдѣ μ_1, μ_2... мы получаемъ кривую, опредѣляющую измѣненіе скоростей въ зависи-

мости отъ степеней заполненія. Эта кривая даетъ возможность, по извѣстной скорости при совершенномъ заполненіи, опредѣлять скорости при разныхъ степеняхъ заполненія, на основаніи соотношенія

$$v_m = \nu_m\, v. \qquad (156')$$

Для примѣненія того же способа въ діаграммѣ сопряженныхъ масштабовъ, беремъ логарифмы равенствъ типа (156'):

$$log\, v_m = log\, v - log\, \frac{1}{\nu_m}. \qquad (157)$$

Уравненіе (157) показываетъ, что скорость теченія при любой степени заполненія v_m можетъ быть получена по масштабу скоростей діаграммы, если взять чтеніе на разстояніи, соотвѣтствующемъ $log\frac{1}{\nu_m}$, въ сторону начала масштаба отъ дѣленія, опредѣляющаго скорость v при совершенномъ заполненіи.

Удобнѣе всего и здѣсь величины $log\,\frac{1}{\nu_1}$, $log\,\frac{1}{\nu_2}$ ... нанести на переходный масштабъ. Необходимыя для этого значенія ν и $\frac{1}{\nu}$ даны также въ таблицѣ II. въ примѣненіи къ сѣченіямъ трехъ типовъ. Примѣненіе масштаба во всемъ сходно съ примѣненіемъ выше упомянутаго переходнаго масштаба для расходовъ.

ТАБЛИЦА II.

Значенія μ, $\frac{1}{\mu}$, ν, $\frac{1}{\nu}$ для разныхъ степеней заполненія.

Степень заполненія.		1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Круглое сѣченіе	μ	1,00	1,07	1,00	0,85	0,67	0,50	0,33	0,19	0,09	0,02
	$log\,\frac{1}{\mu}$	0	—0,03	0	0,07	0,17	0,30	0,48	0,72,	1,05	1,70
	ν	1,00	1.14	1,15	1,13	1,08	1,00	0,90	0,77	0,59	0,35
	$log\,\frac{1}{v}$	0	—0.05	—0,06	—0.05	—0,03	0	0,05	0,11	0,23	0,46
Овоидальное сѣченіе . . .	μ	1,00	1,05	0,90	0,75	0,58	0,42	0,26	0,15	0,07	0,02
	$log\,\frac{1}{\mu}$	0	—0,02	0,05	0,13	0,24	0.38	0,59	0,82	1,20	1,70
	ν	1,00	1,12	1,12	1,08	1,03	0,94	0,85	0,75	0.61	0,41
	$log\,\frac{1}{\nu}$	0	—0.05	—0,05	0.03	—0,01	0,03	0,07	0,13	0,23	0,39
Лотковое сѣченіе	μ	1,00	1,07	1,00	0,88	0,70	0,52	0,35	0,19	0,07	0,01
	$log\,\frac{1}{\mu}$	0	—0,03	0	0,06	0.16	0,30	0,46	0,72	1,16	2,00
	ν	1,00	1,15	1.16	1,13	1,07	1,00	0,89	0,73	0,54	0,28
	$log\,\frac{1}{\nu}$	0	—0,06	—0,06	—0,05	0,03	0	0,05	0,14	029	0,44

По виду кривой измѣненія скоростей при разныхъ степеняхъ заполненія можно заключить, что наибольшая скорость получается примѣрно при $\frac{H}{D} = 0,8$; при степени заполненія 0,5 скорость такая же, какъ и при совершенномъ заполненіи; при $\frac{H}{D}$ большемъ 0,5 она больше, а при $\frac{H}{D}$ меньшемъ 0 5 меньше, чѣмъ при совершенномъ заполненіи Этому будетъ соотвѣтствовать и размѣщеніе дѣленій на переходномъ масштабѣ относительно $\frac{H}{D} = 1,0$

Изъ предшествующаго видно, что діаграммы сопряженныхъ масштабовъ, построенныя ли для каждой формы сѣченія спеціально, или даже предназначенныя для разсчета одной только формы сѣченія, одинаково даютъ возможность рѣшать всѣ задачи, относящіяся ко всякимъ сѣченіямъ, поперечнымъ размѣрамъ, степенямъ заполненія и коеффиціентамъ шероховатости. Предѣлы примѣнимости каждой такой діаграммы охватываютъ, въ сущности говоря, всѣ случаи, которые могутъ представиться въ практикѣ разсчета водоснабженія и канализаціи, и даже введеніе отдѣльныхъ діаграммъ для различныхъ сѣченій диктуется не необходимостью, а только соображеніями практическаго удобства.

Всѣ операціи, относящіяся къ разсчету, представляютъ, какъ мы знаемъ, очень простыя манипуляціи съ масштабами діаграммы, а въ случаѣ измѣненія тѣхъ основныхъ условій, для которыхъ предназначена отдѣльная діаграмма, дѣло сводится къ перенесенію чтеній при помощи переходнаго масштаба.

Зная теперь всѣ случаи и задачи, для которыхъ можетъ служить этотъ, неоднократно нами упомянутый, переходный масштабъ, мы можемъ, наконецъ, остановиться на его составѣ и формѣ. Составъ такого масштаба зависитъ отъ состава и числа діаграммъ. Мы будемъ разсматривать переходный масштабъ въ формѣ, соотвѣтствующей предшествующему изложенію, т. е. масштабъ, предназначенный для перехода отъ діаграммы для опредѣленной формы сѣченія (именно круглой, что по преимуществу можетъ встрѣчаться на практикѣ) при одной степени шероховатости и совершенномъ наполненіи, къ другимъ коеффиціентамъ шероховатости и степенямъ наполненія. Такимъ могъ бы быть, напримѣръ, переходный масштабъ къ діаграммѣ сопряженныхъ масштабовъ Фламанъ-Бертрана о четырехъ масштабахъ, который мы и построимъ.

Резюмируя, на основаніи предшествующаго, случаи примѣненія переходнаго масштаба, мы видимъ, что онъ долженъ давать слѣдующія разстоянія:

1) разстоянія, служащія для перехода отъ коеффиціента шероховатости, при которомъ построена діаграмма, къ разсчету при иныхъ коеффиціентахъ шероховатости; они соотвѣтствуютъ $(log\, a_m - log\, a)$, при модулѣ масштаба діаметровъ, гдѣ a — основной коеффиціентъ шероховатости, a_m — общее обозначеніе другихъ коеффиціентовъ шероховатости, переходъ къ которымъ можетъ потребоваться;

2) разстоянія, служащія для перехода отъ скорости v при совершенномъ заполненіи къ скоростямъ v_1, v_2... при разныхъ степеняхъ заполненія, которыя представляютъ величины $log \frac{1}{\nu_1}$, $log \frac{1}{\nu_2}$..., отложенныя при модулѣ масштаба скоростей;

3) разстоянія, служащія для перехода отъ расхода Q при совершенномъ заполненіи къ расходамъ при другихъ степеняхъ заполненія Q_1, Q_2..., которыя соотвѣтствуютъ величинамъ $log \frac{1}{\mu_1}$, $log \frac{1}{\mu_2}$... при модулѣ масштаба расходовъ.

Эти четыре элемента переходнаго масштаба являются наиболѣе важными. Къ нимъ можно было бы присоединить еще:

1) разстояніе, служащее для перехода отъ разсчета съ параметромъ D и системы масштабовъ v, i, D къ параметру ρ, т. е. къ діаграммѣ v, i, ρ;

2) разстоянія для опредѣленія по гидравлическимъ радіусамъ параметровъ сѣченій иной формы, кромѣ круглой, т. е. пролета D или высоты H;

3) разстоянія для перехода отъ разсчета расходовъ при параметрѣ D къ разсчету расходовъ при параметрѣ ρ для различныхъ формъ сѣченія.

Эти послѣднія величины нужны только для перехода отъ діаграммы круглаго сѣченія къ разсчету поперечныхъ сѣченій иныхъ формъ. Относящіяся къ нимъ данныя, вмѣстѣ съ соотвѣтственно измѣненнымъ переходнымъ масштабомъ, служатъ предметомъ упомянутой выше особой статьи. Поэтому я считаю возможнымъ здѣсь исключить эти величины изъ разсмотрѣнія.

Чертежъ 26 представляетъ переходный масштабъ, составленный нами, въ видѣ примѣра, для діаграммы сопряженныхъ масштабовъ Фламанъ-Бертрана. Онъ состоитъ изъ двухъ скалъ. На лѣвой скалѣ отъ точки D внизъ отложено прежде всего разстояніе для перехода отъ коеффиціента шероховатости $a = 0{,}00092$ къ $a_1 = 0{,}00074$. Это разстояніе при модулѣ масштаба діаметровъ діаграммы, представленной на чертежѣ 19, оказывается равнымъ 6,8 мм., и конецъ его помѣченъ буквой D'. Далѣе отъ той же точки D отложено внизъ разстояніе для

перехода отъ масштаба діаметровъ къ масштабу гидравлическихъ радіусовъ. Длина его равна въ данномъ случаѣ 54,2 мм., и конецъ обозначенъ буквой ρ. Черта, соотвѣтствующая ρ, обозначена также буквой v и служитъ началомъ разстояній для перехода отъ скорости при совершенномъ заполненіи къ скоростямъ при степеняхъ заполненія 0,1, 0,2...0,9, причемъ концы такихъ разстояній обозначены соотвѣтственно цифрами 1,2,3...9. На правой скалѣ масштаба отъ начальной черты, обозначенной буквой Q, отложены вверхъ и внизъ разстоянія для перехода отъ расхода при совершенномъ заполненіи къ расходамъ при степеняхъ заполненія 0,1—0,9, концы которыхъ обозначены цифрами 1—9, и, въ видахъ наглядности, соединены съ дѣленіями для скоростей при соотвѣтственныхъ степеняхъ заполненія.

Примѣненіе такого переходнаго масштаба извѣстно изъ предшествующаго. Пользоваться имъ можно при помощи циркуля или еще лучше, наклеивши на картонъ и прикладывая каждый разъ къ соотвѣтственному масштабу діаграммы.

Заканчивая этимъ изложеніе вопросовъ, относящихся къ гидравлическому разсчету при помощи діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ и отдѣльнымъ примѣненіямъ этого способа, мы имѣемъ достаточный матеріалъ для сопоставленія его съ другими методами разсчета и сравнительной оцѣнки его достоинствъ. Изъ предшествующаго видно, что способъ сопряженныхъ масштабовъ представляетъ цѣнное средство для облегченія разсчета санитарно-техническихъ сооруженій. Сравнительная оцѣнка его должна намъ указать его мѣсто среди другихъ средствъ, служащихъ для той же цѣли.

Цѣнность всякихъ средствъ, ускоряющихъ и облегчающихъ веденіе многочисленныхъ и сложныхъ вычисленій, связанныхъ съ техническими разсчетами, является общепризнанной. Всѣ пособія, направленныя къ этой цѣли въ области гидравлическаго разсчета, стремятся совершенно устранить потребность въ производствѣ какихъ либо выкладокъ и достигнуть того, чтобы весь разсчетъ сѣти трубъ возможно было вести, имѣя подъ рукой лишь это пособіе и бланкъ для записыванія получаемыхъ результатовъ. Такими пособіями служатъ разнаго рода таблицы, числовыя или графическія. Способъ сопряженныхъ масштабовъ, достигая въ совершенствѣ цѣли, которая ставится всѣми вообще методами, направленными къ упрощенію гидравлическаго разсчета, доводитъ процессъ разсчета, можно сказать, до идеальной простоты и скорости, безъ всякаго ущерба для практической точности.

Эти достоинства способа происходятъ отъ удачнаго совмѣщенія преимуществъ, которыя свойственны графическимъ таблицамъ по существу, и которыя получаются, благодаря введенію логарифмическаго характера подраздѣленія таблицъ, а также свойствамъ метода, лежащаго въ основѣ даннаго способа. Въ самомъ дѣлѣ, сравнивая способъ разсчета при помощи діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ съ разсчетомъ при помощи числовыхъ таблицъ, мы можемъ указать рядъ особенностей, подчеркивающихъ преимущества графическихъ таблицъ и въ частности діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ.

Числовыя таблицы, допуская возможность имѣть лишь двѣ входящихъ перемѣнныхъ величины, по двумъ координатамъ, заставляютъ разбивать разсчетную формулу, обыкновенно заключающую большее количество перемѣнныхъ, на составныя части, составлять для каждой такой части отдѣльную таблицу и пользоваться нѣсколькими таблицами совмѣстно. Такимъ образомъ увеличивается и число таблицъ, и время работы, и возможность ошибки при пользованіи ими. Въ діаграммахъ сопряженныхъ масштабовъ на одномъ и томъ же листѣ помѣщаются масштабы для всѣхъ перемѣнныхъ, въ видѣ одной или нѣсколькихъ системъ. При этомъ, даже въ случаѣ перехода отъ одной системы къ другой, операція производится весьма легко, безъ запоминанія сложныхъ чиселъ, лишь простымъ перемѣщеніемъ линейки или транспаранта.

Числовыя таблицы даютъ при разсчетѣ рядъ чиселъ, мало говорящихъ уму, и кромѣ того не допускаютъ увѣренности въ ихъ безошибочности, если принять во вниманіе трудность корректуры цифровыхъ таблицъ всѣхъ сортовъ. Такимъ образомъ при пользованіи ими приходится полагаться на счастливую случайность, что ни въ одной изъ взятыхъ цифръ не встрѣтится какой либо ошибки, безо всякой возможности легко почувствовать ошибку. Для графической таблицы, дающей результаты въ явномъ закономѣрномъ порядкѣ, къ которому быстро привыкаетъ глазъ, ошибка ограничивается лишь предѣлами точности отсчета (если не считать возможности ошибки при записываніи полученнаго результата). Грубой же ошибки при правильномъ пользованіи діаграммой получиться не можетъ.

Числовыя таблицы, предлагая прямой отвѣтъ лишь для чиселъ, надписанныхъ по координатамъ и неизбѣжно разнящихся другъ отъ друга на большія или меньшія величины, требуютъ для значеній промежуточныхъ или интерполированія (при крупныхъ промежуткахъ не всегда точнаго) или веденія лишь приблизительнаго разсчета, что, при формулахъ, разбитыхъ на нѣсколько частей, нежелательно, особенно при

подсчетѣ первыхъ изъ этихъ частей, служащихъ основаніемъ для вычисленія слѣдующихъ. Графическая таблица, давая непрерывный рядъ значеній, олицетворяющій зависимость между перемѣнными величинами, предлагаетъ непосредственный отвѣтъ для какихъ угодно заданныхъ величинъ.

Только что перечисленныя достоинства свойственны всѣмъ вообще графическимъ таблицамъ. Но, какъ мы упоминали въ самомъ началѣ среди графическихъ таблицъ нужно различать два типа. Въ однихъ для построенія линій, выражающихъ уравненія разсчета, производится отложеніе по осямъ координатъ самихъ перемѣнныхъ (діаграммы изоплетныхъ кривыхъ), въ другихъ же по осямъ, такъ или иначе расположеннымъ, откладываются логарифмы перемѣнныхъ (логарифмическія таблицы и діаграммы сопряженныхъ масштабовъ). Нужно сказать, что способъ сопряженныхъ масштабовъ, принимая логарифмическій характеръ дѣленій, тѣмъ самымъ обезпечиваетъ новыя преимущества, отличающія его отъ діаграммъ съ нормальной градуировкой осей. Преимущества эти заключаются, главнымъ образомъ, въ слѣдующемъ.

Благодаря закону измѣненія логарифмовъ послѣдовательныхъ чиселъ, охватъ таблицы, т. е. предѣлы входящихъ въ нее значеній, можетъ быть весьма широкъ, при достаточной точности раздѣленій. Дѣйствительно, чтобы въ нормальный масштабъ вмѣстить величины отъ 0,00001 до 1 при условіи возможности ихъ отсчета, или потребовался бы громадный размѣръ чертежа, или получились бы очень сильно разнящіяся отмѣтки дѣленій, или дѣленія, неуловимыя простымъ глазомъ. Въ діаграммахъ логарифмическаго типа для той же цѣли требуются крайне ограниченные размѣры чертежа, при вполнѣ достаточной ясности и точности. Въ этомъ заключается драгоцѣнное качество логарифмическихъ діаграммъ.

Далѣе, процентъ точности вычисленій при отсчетѣ по діаграммамъ съ логарифмическимъ подраздѣленіемъ всегда одинъ и тотъ же. При дѣйствіяхъ съ малыми числами точность абсолютная больше, при дѣйствіяхъ съ большими она меньше, но величина возможной ошибки въ отношеніи къ отсчету остается одинаковой. Это было доказано въ своемъ мѣстѣ, и теперь мы повторимъ только, что такое свойство нашихъ діаграммъ вполнѣ соотвѣтствуетъ требованіямъ практики.

Наконецъ, графическое представленіе всякихъ формулъ, въ которыя входятъ дѣйствія умноженія и дѣленія перемѣнныхъ и возвышенія ихъ въ любую, цѣлую или дробную, положительную или отрицательную степень, на діаграммахъ логарифмическаго типа сводится къ перемѣщенію прямыхъ параллельныхъ линій или точекъ на то или

другое разстояніе, что крайне облегчаетъ построеніе діаграммъ, легко допускаетъ дополненіе ихъ новыми перемѣнными и переходы отъ однихъ перемѣнныхъ къ другимъ.

Можно было бы указать только на одну невыгодную сторону діаграммъ логарифмическаго вида. Онѣ очень сложно выражаютъ формулы, въ составъ которыхъ входятъ дѣйствія сложенія и вычитанія. Однако въ приложеніи къ разсчету водоснабженія и канализаціи и эта невыгода отпадаетъ, такъ какъ мы имѣемъ для этой цѣли формулы одночленнаго логарифмическаго вида, представляющія не меньшую гарантію точности разсчета, нежели формулы многочленныя.

Если сравнивать два вида логарифмо-графическаго разсчета, именно способъ логарифмо-графическихъ таблицъ и способъ сопряженныхъ масштабовъ, то нужно сказать прежде всего, что оба эти вида отличаются такими общими достоинствами и доводятъ гидравлическій разсчетъ до такой простоты и удобства, что трудно проводить серьезную разницу между ними. Однако можно отмѣтить въ способѣ логарифмо-графическихъ таблицъ нѣкоторые недостатки, которые избѣгнуты въ способѣ сопряженныхъ масштабовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, способъ пользованія логарифмо-графическими таблицами сводится каждый разъ къ тому, чтобы взять точку встрѣчи двухъ линій и прочесть отмѣтку прямой, проходящей черезъ эту точку. Такъ какъ отмѣтки, по необходимости, пишутся или по концамъ линій, или, во всякомъ случаѣ, на нѣкоторомъ, обыкновенно значительномъ разстояніи одна отъ другой, то приходится, начиная ли отъ отмѣтки и разыскивая точку встрѣчи, или наоборотъ, слѣдить за линіей на извѣстномъ протяженіи. Когда эта операція примѣняется къ тремъ линіямъ при каждомъ чтеніи, всегда является опасность, при малѣйшей невнимательности, перейти съ данной линіи на сосѣднюю и такимъ образомъ допустить ошибку въ отсчетѣ. Это неудобство парализуется, при составленіи логарифмо-графическихъ таблицъ, разными мѣрами, но не можетъ быть избѣгнуто въ полной мѣрѣ. Въ этомъ отношеніи пользованіе діаграммой сопряженныхъ масштабовъ, гдѣ искомая точка и ея отсчетъ указываются пересѣченіемъ линейки или линіи транспаранта съ соотвѣтственнымъ масштабомъ, представляется нѣсколько проще.

Далѣе, если значенія перемѣнныхъ, съ которыми приходится имѣть дѣло, не тѣ, которымъ соотвѣтствуютъ линіи, дѣйствительно проведенныя на чертежѣ, при употребленіи логарифмо-графической таблицы приходится дѣлать мысленно интерполяцію между этими линіями. Эта операція, при всей ея легкости, всетаки не такъ проста, какъ если нужно

намѣтить на глазъ промежуточную точку между дѣленіями, нанесенными на одномъ изъ масштабовъ нашихъ діаграммъ.

Количество и взаимное переплетеніе линій въ логарифмо-графическихъ таблицахъ не представляютъ, конечно, особенно серьезнаго неудобства, такъ какъ глазъ быстро привыкаетъ къ этому. Однако это обстоятельство, а также необходимое при работѣ довольно значительное вниманіе, могутъ, въ концѣ концовъ, утомлять глазъ, и тѣмъ скорѣе, чѣмъ больше системъ линій заключаетъ таблица. Въ діаграммѣ сопряженныхъ масштабовъ, при обычномъ составѣ ея, не можетъ быть и рѣчи о помѣхѣ одной системы масштабовъ другой, и даже при нѣсколькихъ системахъ масштабовъ не приходится говорить о затемненіи, что вполнѣ возможно для логарифмо-графической таблицы. Нужно думать также, что, благодаря этому, пользованіе діаграммой сопряженныхъ масштабовъ менѣе утомительно.

Наконецъ, въ связи съ только что указаннымъ, нужно добавить, что въ случаѣ необходимости ввести въ діаграмму новыя перемѣнныя, которыя при составленіи почему либо не были приняты во вниманіе, хотя это дѣлается одинаково легко въ діаграммахъ обоихъ видовъ, но каждая новая перемѣнная содѣйствуетъ затемнѣнію логарифмо-графической таблицы, чего не приходится бояться въ отношеніи діаграммы сопряженныхъ масштабовъ.

Здѣсь кстати нужно подчеркнуть, въ отношеніи обоихъ видовъ діаграммъ, что главное ихъ преимущество заключается въ простотѣ. Поэтому слѣдуетъ избѣгать въ нихъ всего, что можетъ быть излишнимъ и что можетъ затруднять чтеніе. Кромѣ того необходимо вычерчивать ихъ въ достаточно большомъ масштабѣ, иначе приближеніе можетъ быть недостаточнымъ.

Предшествующее не мѣшаетъ намъ, рекомендуя вниманію читателей способъ сопряженныхъ масштабовъ, считать разсчетъ при помощи логарифмо-графическихъ таблицъ весьма удобнымъ и цѣннымъ.

О сравненіи достоинствъ отдѣльныхъ примѣненій способа сопряженныхъ масштабовъ между собою не приходится много говорить послѣ того, что было сказано раньше. Мы видѣли, что всѣ указанныя нами діаграммы, Лампе-Чижова, Фламанъ-Бертрана и Леви-Даріэса, вполнѣ приспособлены къ рѣшенію гидравлическихъ задачъ, относящихся къ тѣмъ размѣрамъ сѣченій и условіямъ движенія воды, которыя охватываются формулами, лежащими въ ихъ основѣ. Мы видѣли также, что всѣ эти діаграммы примѣнимы или непосредственно, или при помощи переходныхъ масштабовъ, ко всякимъ степенямъ заполненія, коеффиціентамъ шероховатости и формамъ сѣченія. Такая широта примѣненій ограничивается однако тѣмъ условіемъ, что для этихъ примѣненій

должны быть выработаны коеффиціенты шероховатости, относящіеся къ соотвѣтственнымъ условіямъ движенія воды. Если принять во вниманіе это обстоятельство, то широкая примѣнимость діаграммъ Фламанъ-Бертрана и Леви-Даріэса является только теоретической, такъ какъ отсутствіе коеффиціентовъ шероховатости, относящихся къ движенію сточныхъ водъ, дѣлаетъ практически возможнымъ примѣненіе ихъ только къ круглымъ сѣченіямъ. Впрочемъ коеффиціенты шероховатости для формулы Фламана могутъ быть опредѣлены по соотношенію съ формулой Лампе и ея коеффиціентами.

Здѣсь же кстати замѣтимъ, что діаграмма Лампе-Чижова можетъ быть сравниваема съ логарифмической линейкой для гидравлическаго разсчета, построенной по той же формулѣ Лампе. Нужно сказать, что хотя діаграмма Лампе-Чижова не имѣетъ подвижныхъ частей, подобно линейкѣ, тѣмъ не менѣе пользованіе ею съ помощью циркуля столь же удобно, какъ и линейкой. Эта діаграмма очень удобна по своей портативности, а также вслѣдствіе возможности пользоваться непосредственно разными коеффиціентами шероховатости.

Только что приведенныя данныя о достоинствахъ способа разсчета при посредствѣ діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ показываютъ съ достаточной ясностью, что въ этомъ способѣ мы имѣемъ крайне цѣнное средство для гидравлическаго разсчета водоснабженій и канализацій. Съ этой точки зрѣнія является полезнымъ и желательнымъ возможно широкое примѣненіе у насъ, по примѣру другихъ странъ, способа сопряженныхъ масштабовъ въ практикѣ санитарно-техническаго дѣла.

Желательно также вообще примѣненіе къ разсчету санитарно-техническихъ сооруженій формулъ логарифмическаго вида, разсмотрѣніе которыхъ посвящена часть настоящаго выпуска, ввиду большей простоты обращенія съ ними, ихъ достаточной практической точности и возможности преобразованія въ графическую форму, еще болѣе облегчающей процессъ разсчета. Если же техническая жизнь выдвинетъ новыя формулы для разсчета трубопроводовъ, идущія далѣе упомянутыхъ логарифмическихъ формулъ по своему соотвѣтствію дѣйствительности и широтѣ предѣловъ примѣненія (такъ какъ въ отношеніи практичности ихъ превзойти нельзя), то можно пожелать, чтобы онѣ вылились въ логарифмической же формѣ и были примѣняемы къ практикѣ въ формѣ діаграммъ логарифмическаго типа, въ частности діаграммъ сопряженныхъ масштабовъ.

1908.

ЛИТЕРАТУРА.

Акуловъ. Служба старыхъ водопроводныхъ трубъ и примѣненія графическаго метода къ рѣшенію гидравлическихъ задачъ (Труды V Водопр. Съѣзда, 1901).

D'Aubrive et Villerupt. L'album des abaques pour le calcul des conduites d'eau 1891.

Baumeister. Städtische Strassenwesen und Städtereinigung. 1887.

Bechmann. Salubrité urbaine. II. Assainissement. 1899.

Wehner. Ein Betrag zur Berechnung des Rohrwiederstandes in der Praxis. (Gesundheits-Ingenieur, 1897).

Врублевскій. Графическій способъ разсчета водостоковъ (Изв. Общ. Гражд. Инженеровъ, 1907).

Hobrecht. Die Kanalisation von Berlin. 1882.

Горбачевъ П. Ф. О разсчетѣ скоростей теченія и отводоспособности въ водопроводахъ и водостокахъ. 1904.

Dariès. Calcul des conduites d'eau. 1900.

Евневичъ И. А. Курсъ гидравлики. 1897.

Coffin. The graphical solution of hydraulic problems. 1900.

Collignon. Cours de mechanique. II. Hydraulique.

Lalanne. Mémoire sur les tables graphiques et sur la géometrie anamorphose appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur (Annales des Ponts et Chaussées, 1846).

Lévy. Théorie d' un courant liquide à filets rectilignes et parallèles de forme traversale quelconque. Applications aux tuyaux de conduites. (Annales des Ponts et Chaussées, 1867.)

Lampe. Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren (Civil-Ing , 1873. Bd., XIX.)

Максименко Ф. Е. Курсъ гидравлики. 1902.

Van-Muyden. Abaque logarithmique pour le calcul des conduites d'eau sous pression. 1905.

D'Ocagne. Coordonnées paralleles et axiales. 1885.

D'Ocagne. Nomographie. 1891.

D'Ocagne. Traité de Nomographie. 1899.

D'Ocagne. Exposé synthétique des principes fondamenteaux de la Nomographie. 1903.

Саткевичъ А. А. Разсчетъ системъ центральнаго отопленія и вентиляціи при помощи графическихъ таблицъ съ логариѳмической сѣтью. 1906

Саткевичъ В. А. Разсчетъ водопроводной сѣти трубъ при помощи логариѳмо-графической таблицы (Строитель, 1898).

Schilling. Ueber die Nomographie de M. d'Ocagne.

E. B. and G. M. Taylor's diagrams of the discharge of pipes in accordance with Kutter's formula. 1891.

Thiem. Ueber graphische Durchmesserbestimmung bei Wasserleitung (Journ. für Gasbeleucht. und Wasserversorg., 1885).

Флиннъ. Движеніе воды въ оросительныхъ каналахъ, канавахъ, желобахъ, водопроводныхъ трубахъ, водостокахъ и пр. 1893.

Flamant. Hydraulique. 1900.

Frank. Die Formeln über die Bewegung des Wassers in Röhren (Civil—Ingenieur, 1881).

Frank. Berechnung der Kanäle und Rohrleitungen.

Черепашинскій М. М. Водоснабженіе городовъ. 1905.

Чижовъ Н. К. Водопроводы (Литогр. курсъ).

Чижовъ Н. К. Механическій способъ вычисленія потери напора (Строитель, 1897).

Ясюковичъ М. Разсчетъ водостоковъ съ помощью логариѳмографическихъ таблицъ. 1906.

Ясюковичъ М. Графическій методъ разсчета сѣти водопроводныхъ трубъ. 1905.

Черт. 1. Діаграмма изоплетныхъ кривыхъ для разсчета водопроводныхъ трубъ (формула Ганнье-Кутнера).

Діаметры отъ 5-до 12 дюймовъ

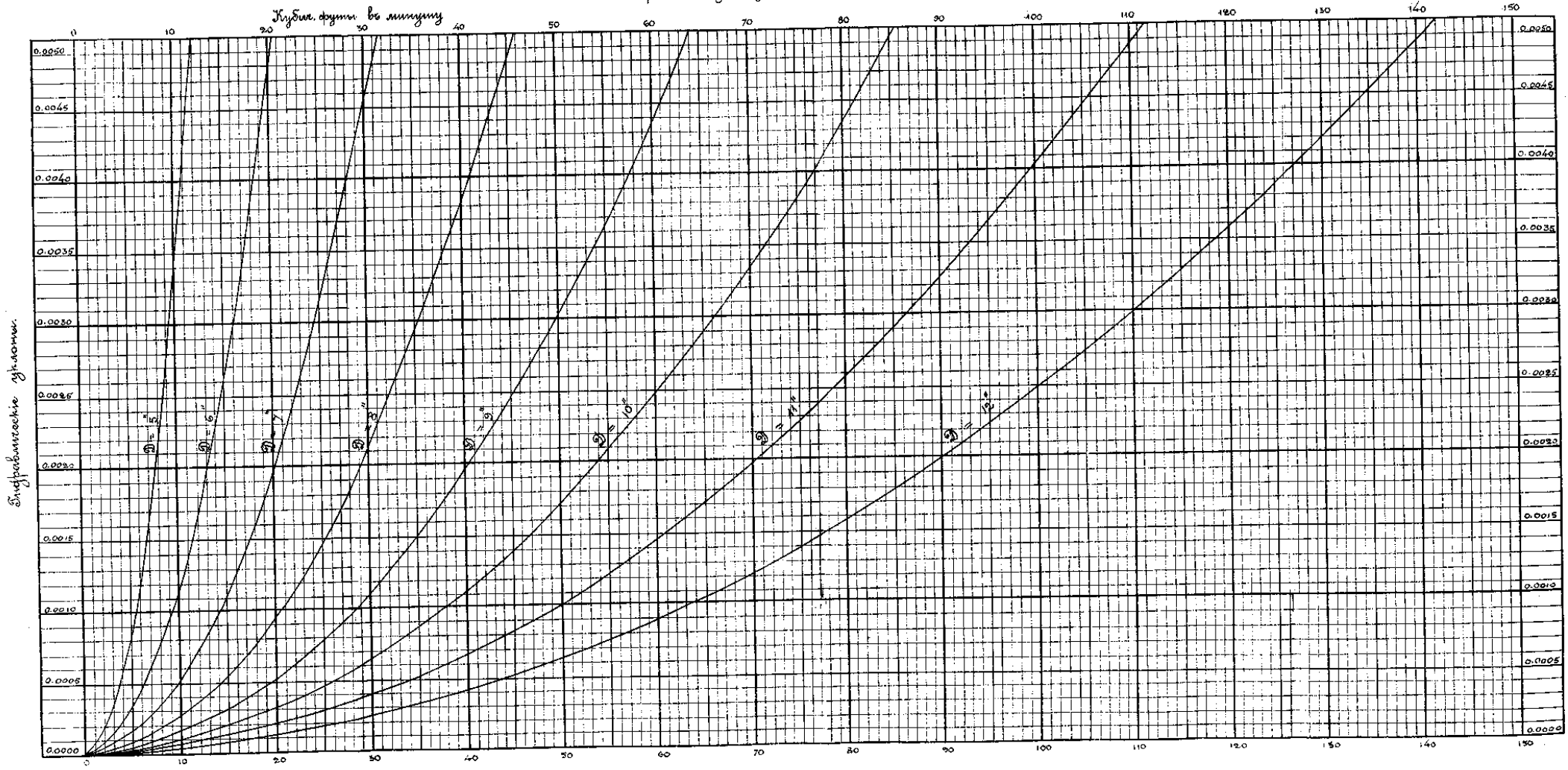
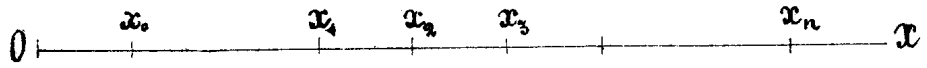


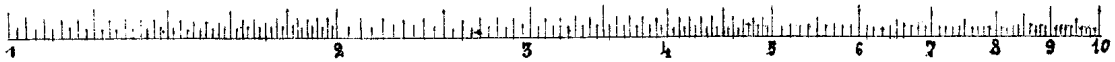
Таблица II.

Черт. 4. Логарифмо-графическая таблица для расчета водопроводных труб (формулы Дюпе).

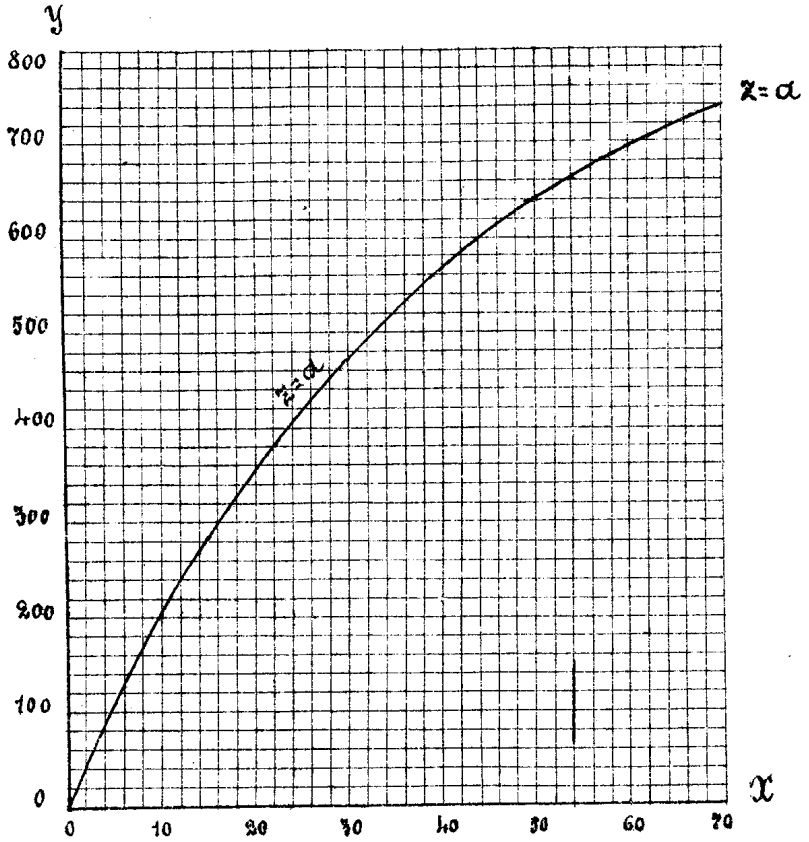
Aufgabe 3.



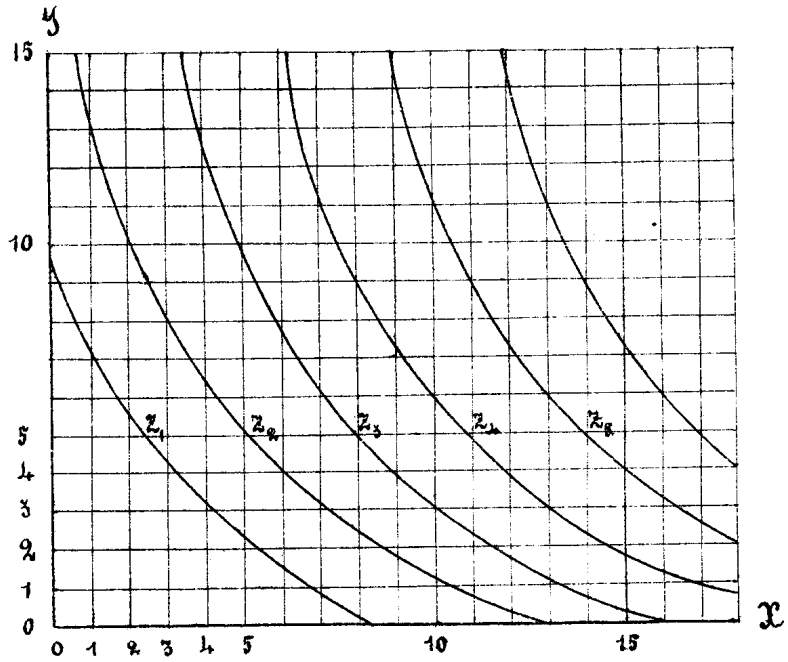
Aufgabe 4.



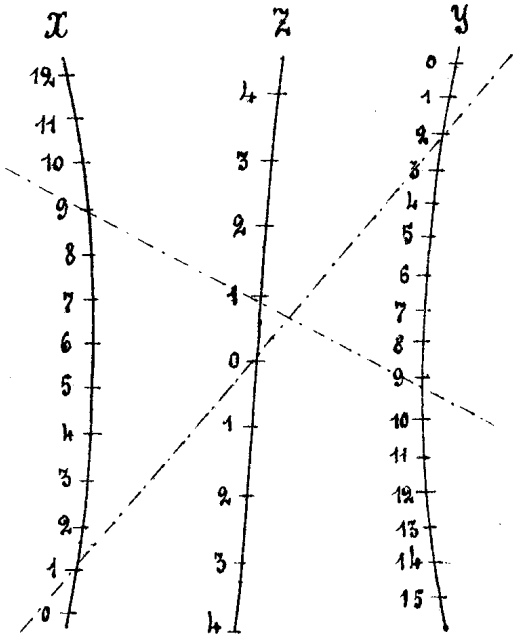
Aufgabe 5.



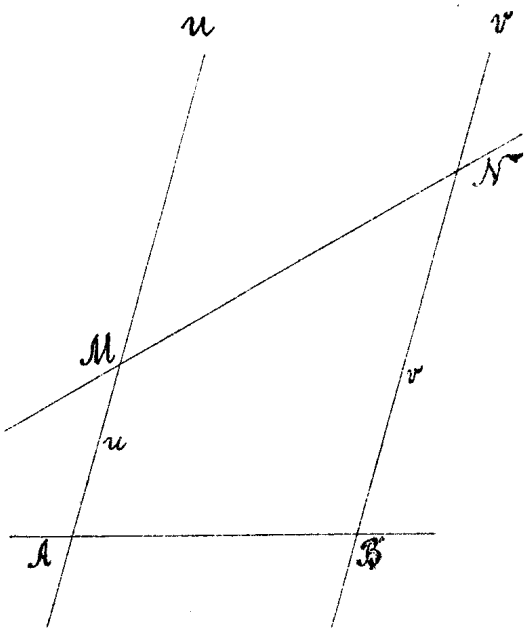
Nefm. 6.



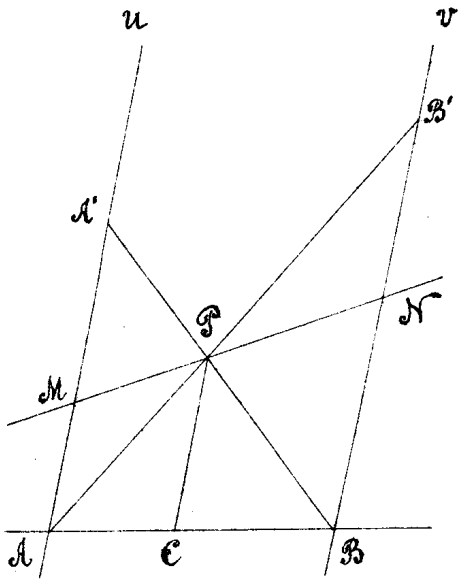
Nefm. 7.



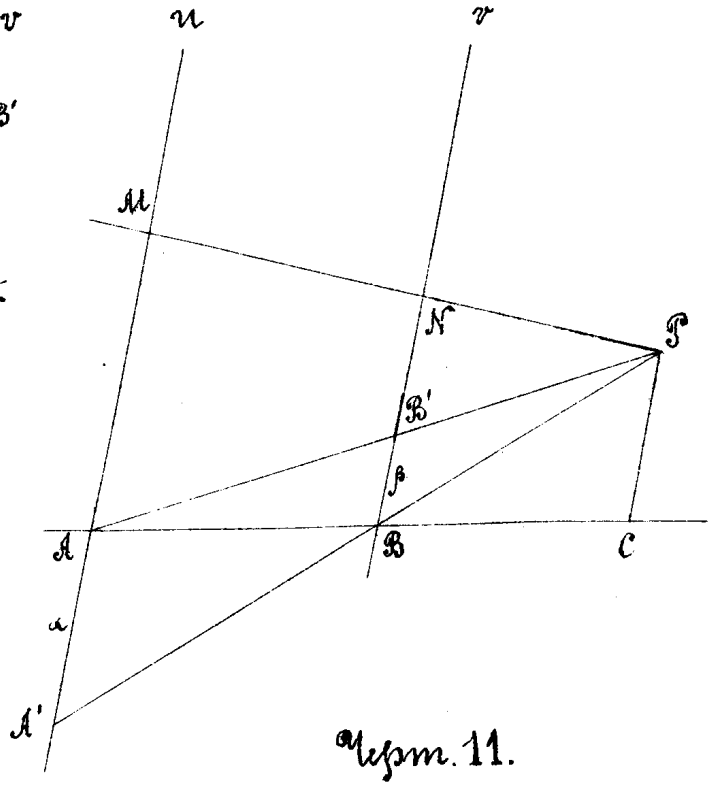
Nefm. 8.



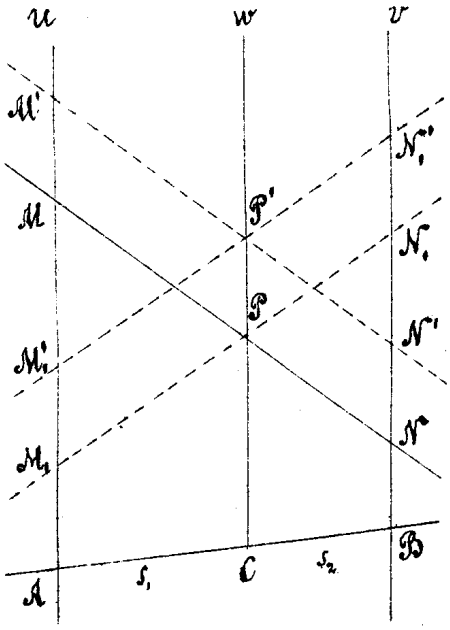
Figur. 9.



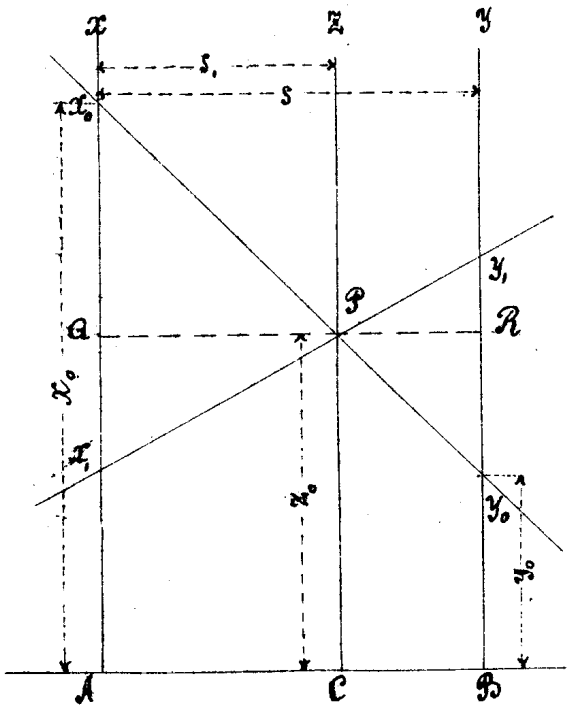
Figur. 9a.



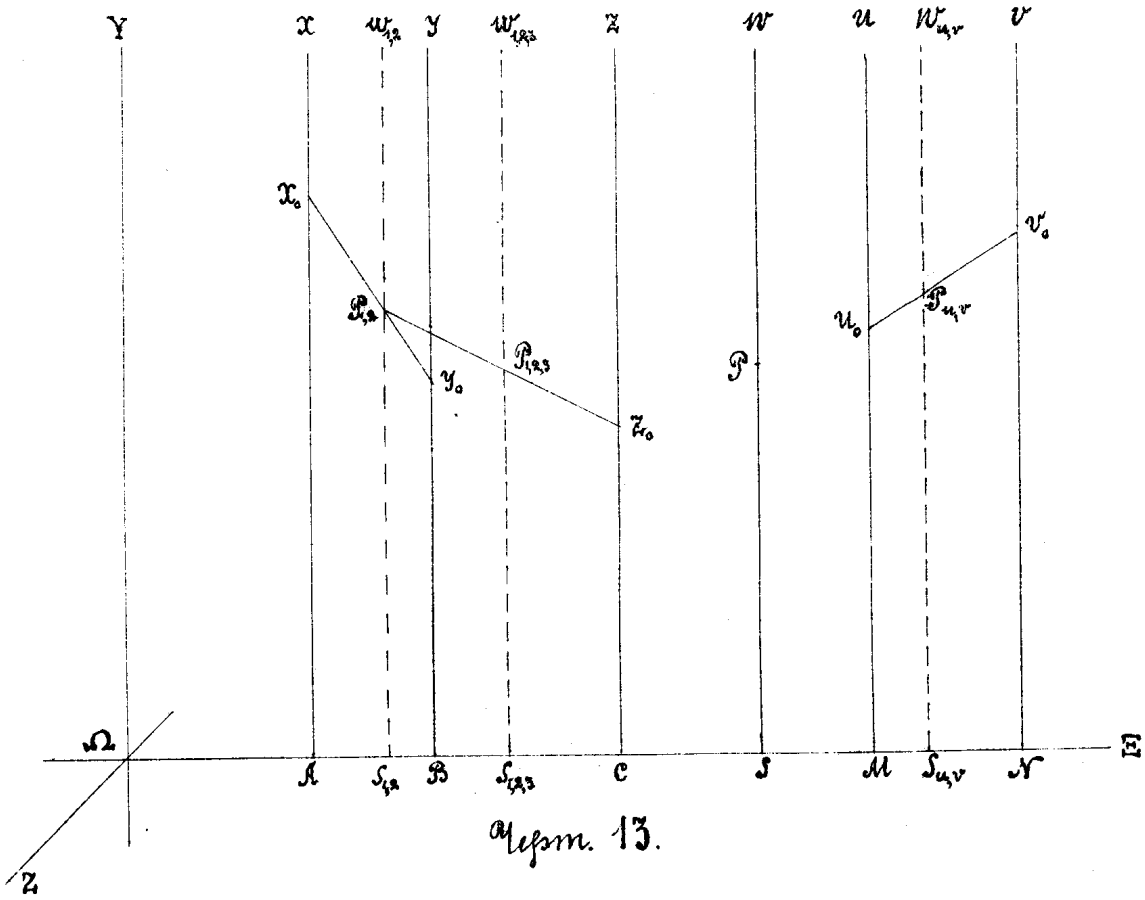
Figur. 10



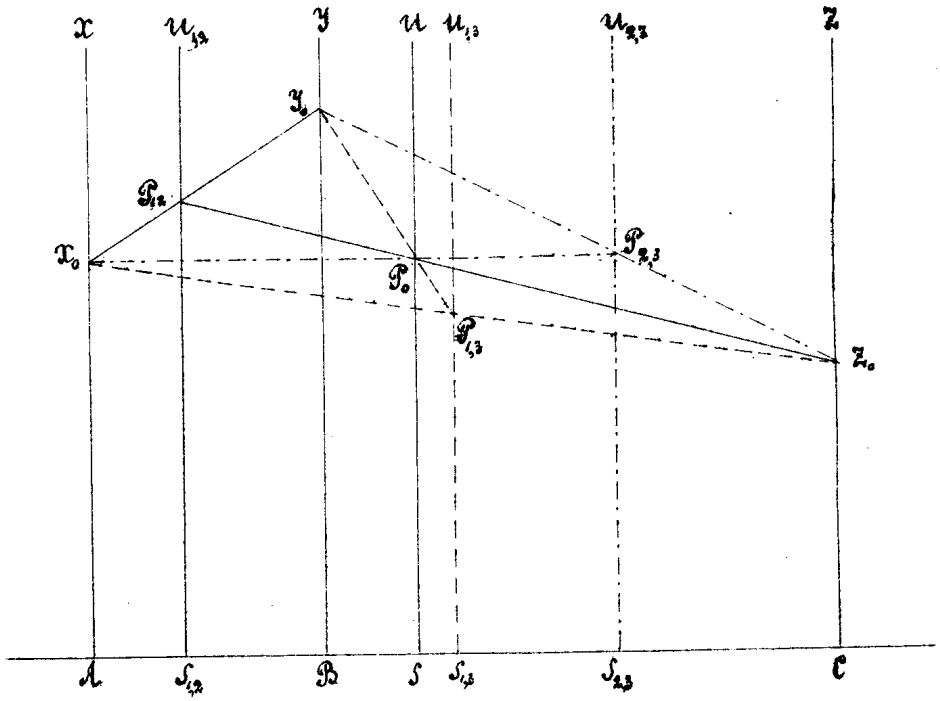
Figur. 11.



Aufgabe 12.



Aufgabe 13.



Черт. 15. Діаграмма проф. Н. К. Чижова для разсчета водопроводныхъ трубъ (формула Лампе).

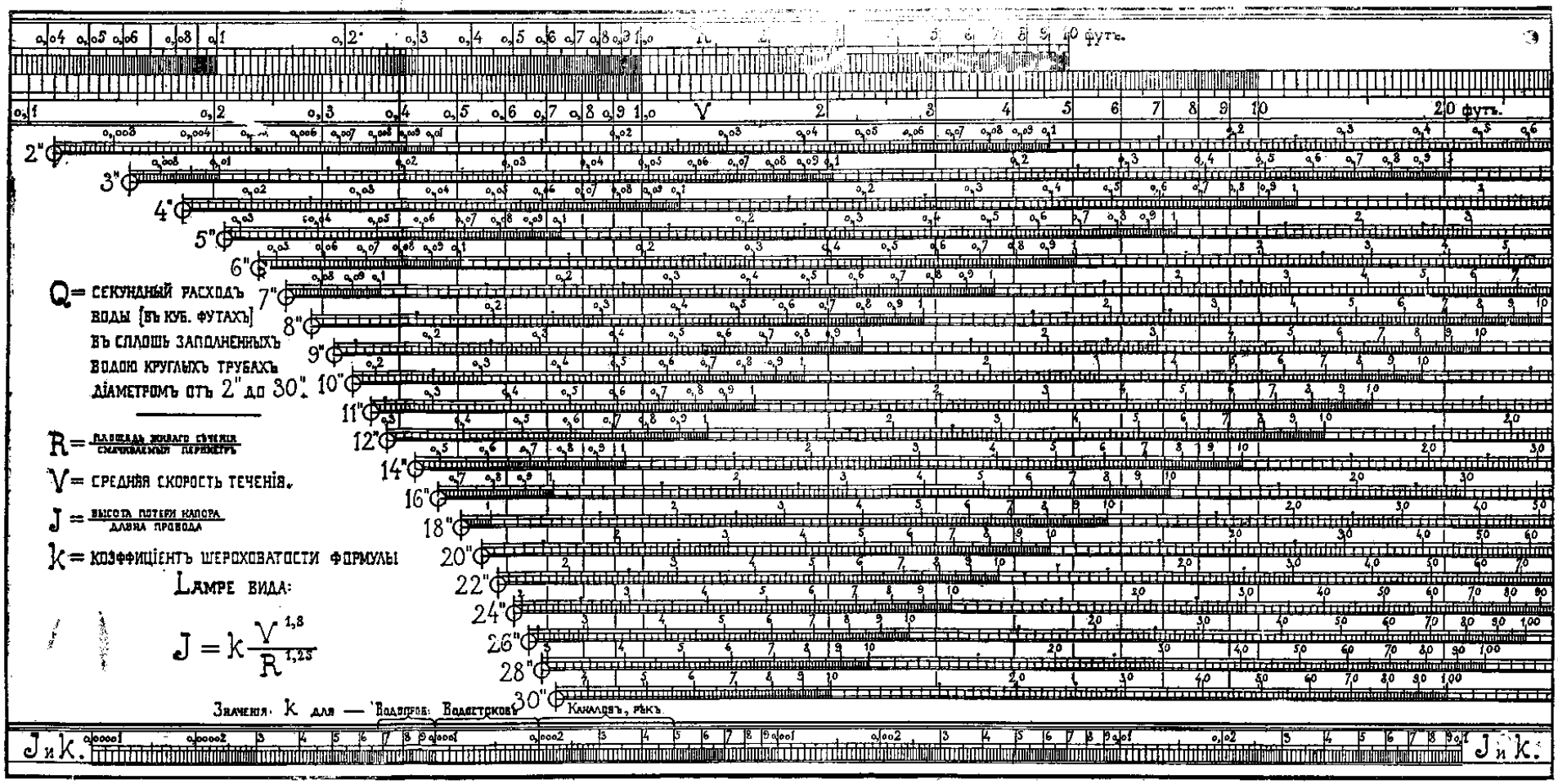


Таблица VII.

Черт. 15а. Діаграмма Венера для разсчета водопроводныхъ трубъ (формула Лампе).

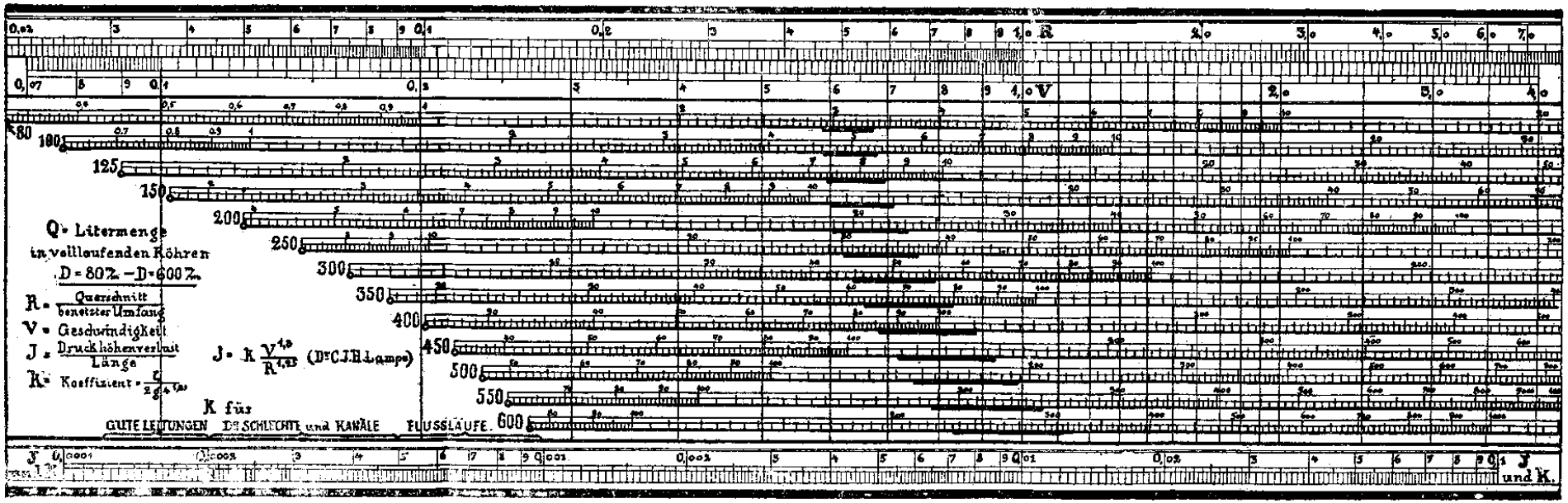
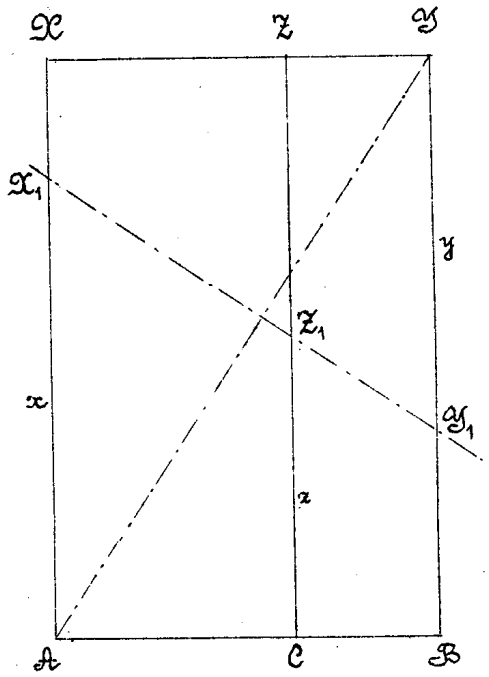
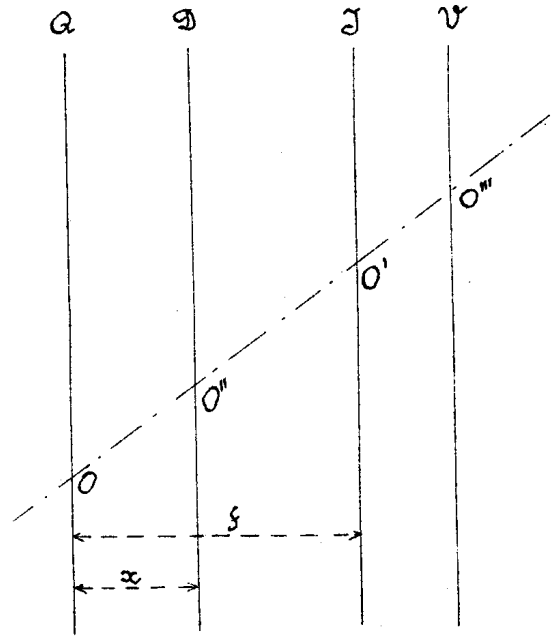


Таблица VIII.

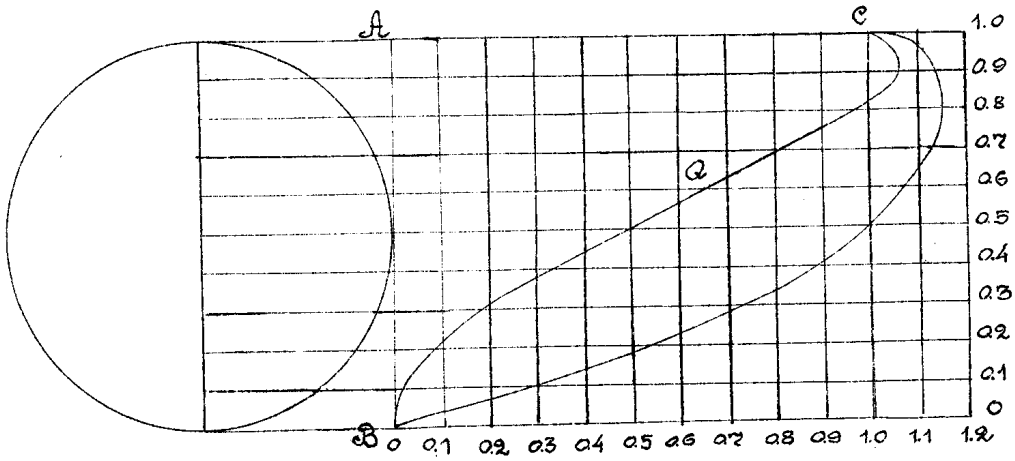
Черт. 14



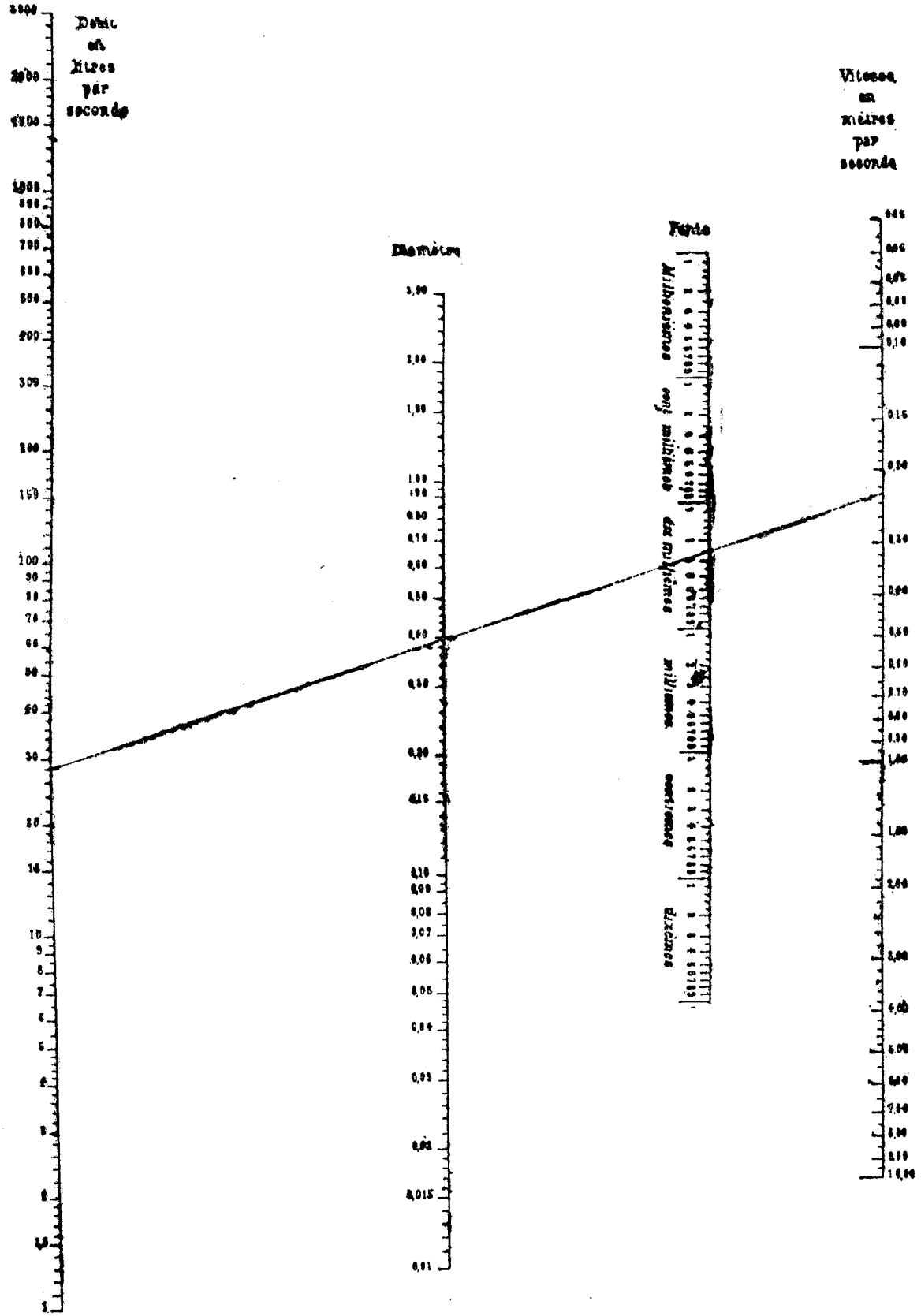
Черт. 16.



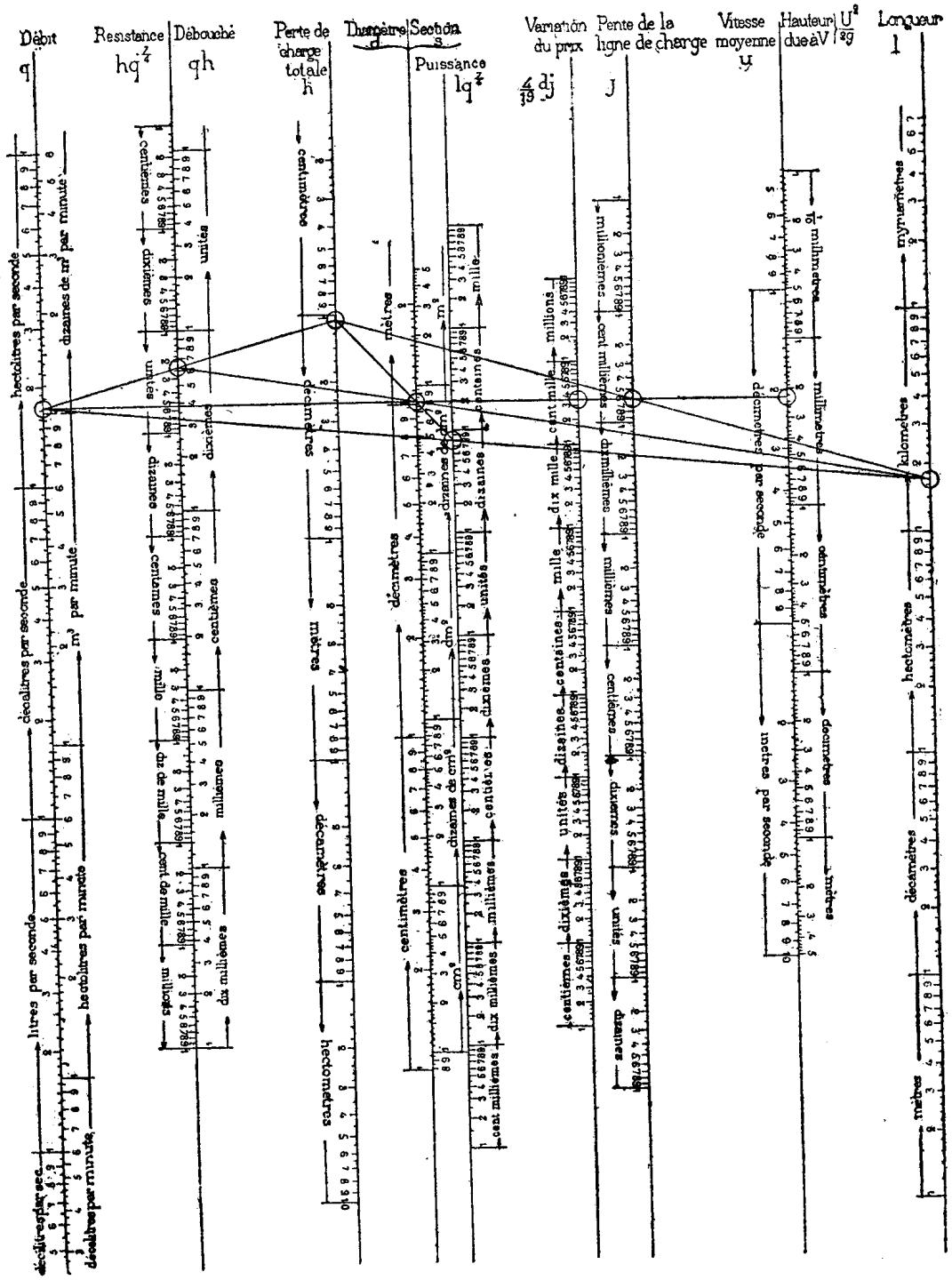
Черт. 22.



Черт. 17. Діаграмма для разсчета водопроводныхъ трубъ Даріэса (формула Леви-Валло).



Черт. 18. Діаграмма для разсчета водопроводныхъ трубъ Бертрана (формула Фламана).



Черт. 19. Сокращенная діаграмма Бертрана для разсчета водопроводныхъ трубъ (формула Фламана).

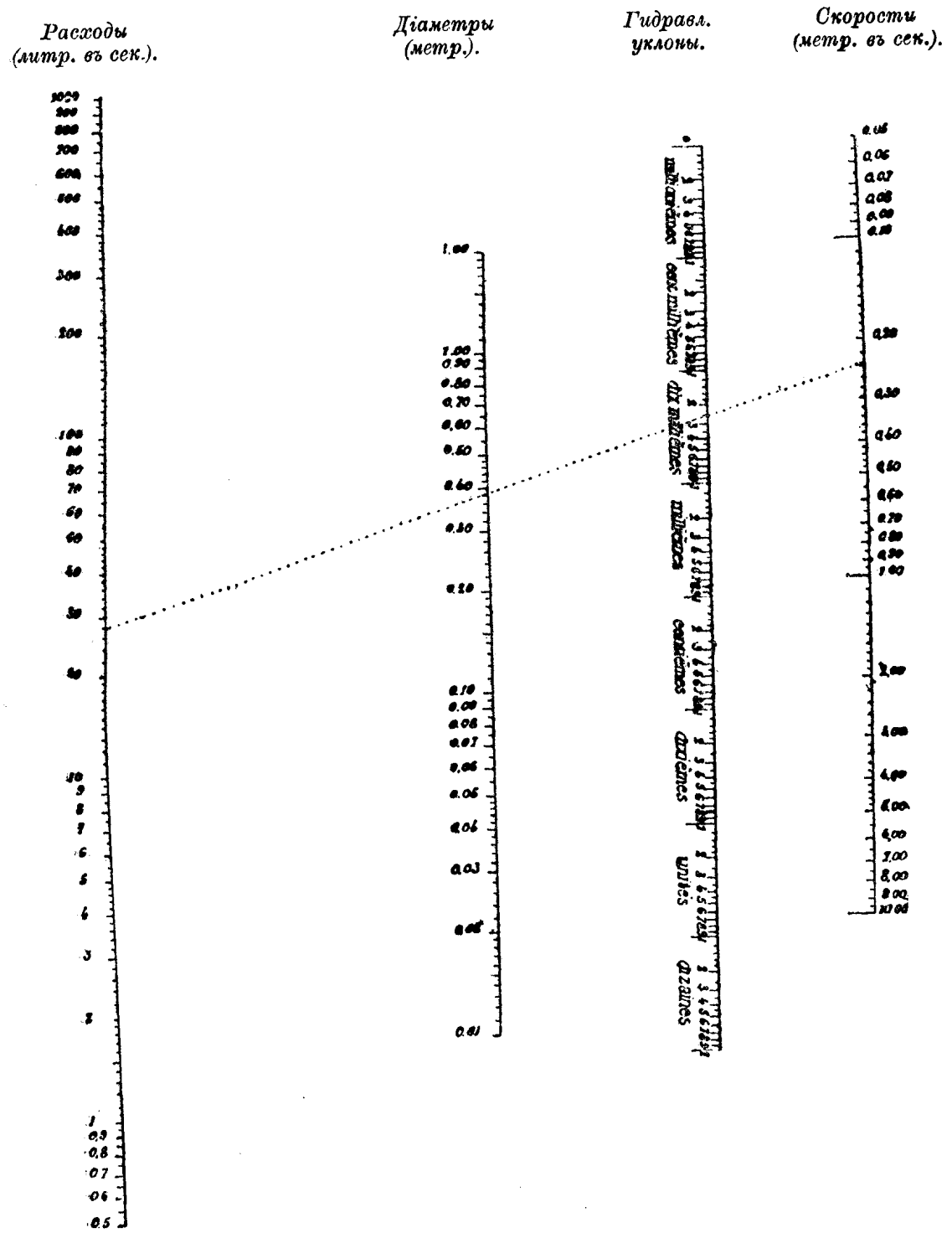


Таблица XIII.

Черт. 20. Діаграмма для разсчета водопроводныхъ трубъ по форм. Фламмана (фут. мѣры).

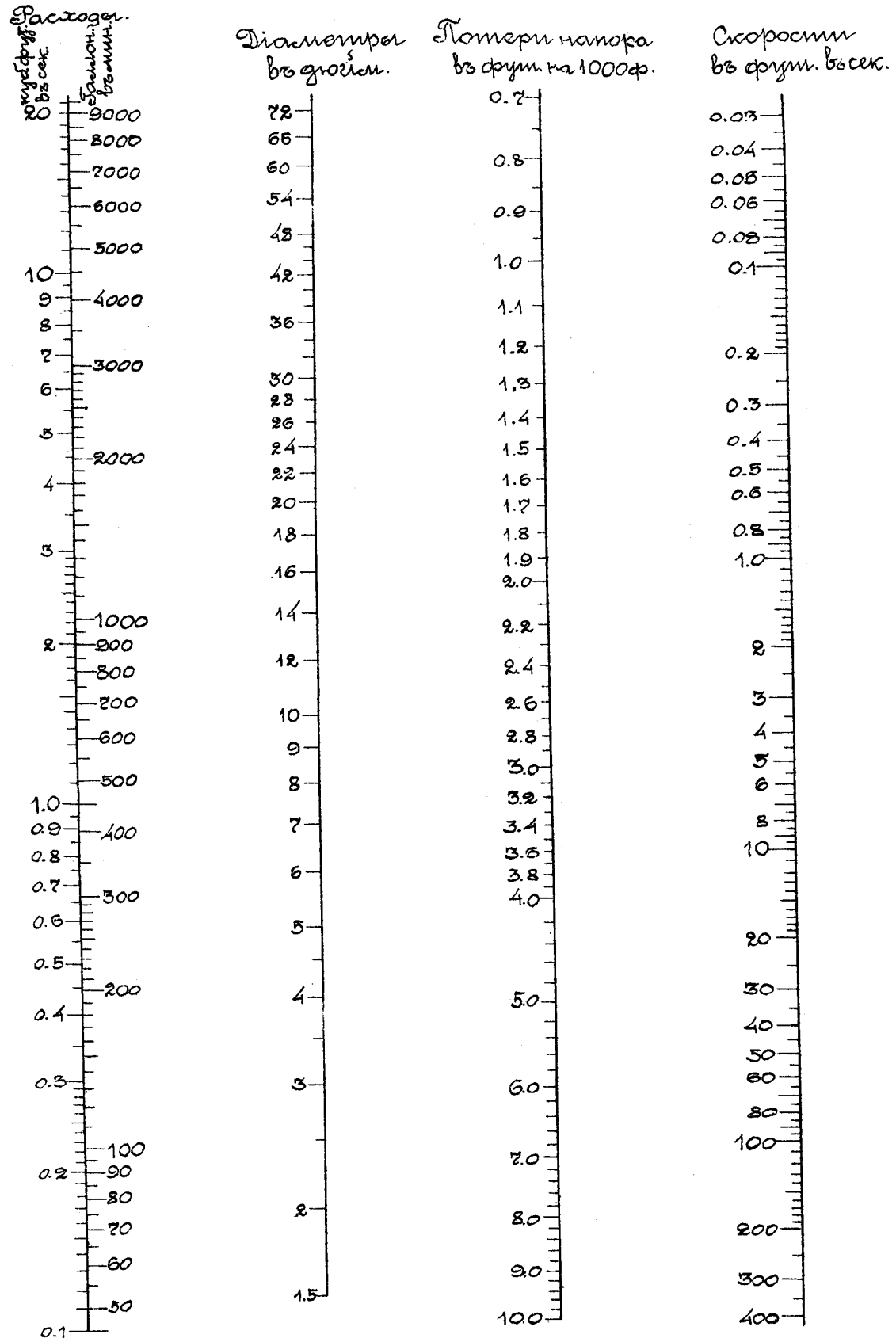
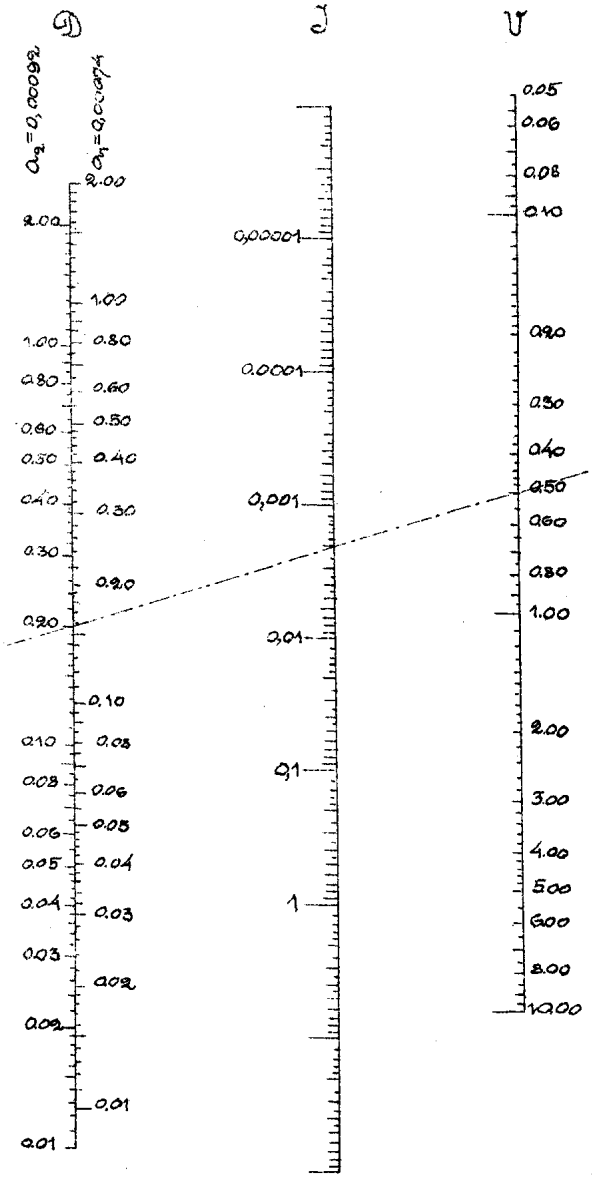


Таблица XIV.

Черт. 21.



Черт. 23.