

ИЗВѢСТІЯ

Томскаго Технологическаго Института

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

Т. 24. 1911 г. № 4.



Къ вопросу о построении проекцій взаимныхъ пересѣченій поверхностей вращения второго порядка.

С. Л. Ломелля.

Къ вопросу о построении проекцій взаимныхъ пересѣченій поверхностей вращения второго порядка.

Съ таблицей чертежей.

1—9.

Къ вопросу о построении проекцій взаимныхъ пересѣченій поверхностей вращенія второго порядка.

Методы начертательной геометріи, какъ одной изъ отраслей знаній, относящихся къ отдѣлу математическихъ наукъ, должны слѣдовать при рѣшеніи того или другого вопроса твердо установившемуся въ этихъ наукахъ принципу соблюденія возможной математической точности, которая для разнаго рода графическихъ построений изъ области начертательной геометріи сводится къ такъ называемой геометрической точности, т. е. къ опредѣленію выполняемыхъ при помощи циркуля и линейки пересѣченій прямыхъ и окружностей. Такимъ образомъ, методы такого рода, при которыхъ допускаются построения кривыхъ по точкамъ, а затѣмъ уже опредѣляются точки пересѣченія съ этими кривыми другихъ линій, не будучи уже геометрически точными, должны быть исключены при графическихъ рѣшеніяхъ вопросовъ начертательной геометріи, разъ существуютъ точныя рѣшенія ихъ.

Однако, по всей вѣроятности, вслѣдствіе практическаго направленія преподаванія начертательной геометріи, какъ науки, имѣющей широкое примѣненіе въ прикладныхъ знаніяхъ, при изложеніи нѣкоторыхъ ея отдѣловъ не обращается должнаго вниманія на соблюденіе геометрической точности. Подобныя допущенія можно было бы оправдать, если бы, благодаря имъ, были получены нѣкоторыя упрощенія въ рѣшеніяхъ задачъ; къ сожалѣнію не всегда это бываетъ такъ.

Можно указать на цѣлый отдѣлъ начертательной геометріи, относящійся къ вопросу о построении взаимныхъ пересѣченій поверхностей вращенія второго порядка, гдѣ указанные отступленія отъ геометрической точности приобрѣли право гражданства,—между тѣмъ какъ имѣется полная возможность примѣнять болѣе простые и геометрически точные методы рѣшеній, основанные на характерныхъ свойствахъ этихъ поверхностей. Описаніе этихъ способовъ построения проекцій взаимныхъ пересѣченій поверхностей вращенія второго порядка и составляетъ предметъ настоящей статьи.

§ 1. Всѣ задачи о нахожденіи взаимнаго пересѣченія поверхностей вращенія второго порядка можно подраздѣлить на два случая: первый случай,—когда оси вращенія заданныхъ поверхностей лежатъ въ одной плоскости, т. е. когда онѣ пересѣкаются между собою на конечномъ

прежнему параллельно одной изъ плоскостей проекцій—скажемъ, вертикальной,—при этомъ одну ось вращенія ставятъ перпендикулярно другой плоскости проекцій (горизонтальной), а затѣмъ пересѣкаютъ обѣ поверхности вспомогательными плоскостями P'_v (фиг. 3) параллельными этой послѣдней. Отъ переченія заданныхъ поверхностей какою-либо изъ этихъ вспомогательныхъ плоскостей—скажемъ P'_v —получаемъ на горизонтальной плоскости проекцій окружности, взаимно пересѣкающіеся съ другими кривыми второго порядка, общія точки которыхъ x_0 , x и принадлежатъ горизонтальной проекціи искомой линіи пересѣченія заданныхъ поверхностей вращенія. Переносъ эти точки по направленію проектированія на вертикальные слѣды плоскости P'_v , получаемъ соотвѣтствующія имъ вертикальныя проекціи x'_0 , x' . Такимъ же образомъ опредѣляемъ и прочія точки искомой линіи пересѣченія заданныхъ поверхностей.

Такъ какъ только что описанный способъ построенія проекцій линіи пересѣченія поверхностей вращенія второго порядка сводится къ опредѣленію пересѣченія кривой второго порядка съ окружностью, центръ которой не лежитъ на оси первой,—пересѣченія, которое не возможно построить геометрически точно съ помощью циркуля и линейки, —то указанный методъ, вообще говоря, не будетъ геометрически точнымъ, не говоря уже о томъ, что и всѣ построенія при описанномъ способѣ рѣшенія вопроса является въ значительной мѣрѣ сложными.

§ 3. Сущность предполагаемаго ниже способа построенія взаимныхъ пересѣченій поверхностей вращенія второго порядка заключается въ томъ, что обѣ заданныя поверхности пересѣкаютъ рядомъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ плоскости осей вращенія (не зависимо отъ того, будутъ ли оси заданныхъ поверхностей въ одной или въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ),—при чемъ *положеніе этихъ вспомогательныхъ плоскостей должно быть таково, чтобы обѣ линіи пересѣченія ихъ съ заданными поверхностями вращенія второго порядка представляли бы подобные эллипсы съ взаимно параллельными осями*. При построеніи задачи одна изъ плоскостей проекцій (положимъ, вертикальная) располагается параллельно плоскости осей вращенія и, слѣдовательно, перпендикулярно къ вспомогательнымъ сѣкущимъ плоскостямъ; другая же плоскость проекцій (въ данномъ случаѣ горизонтальная) располагается такъ, чтобы пересѣченія вспомогательными плоскостями заданныхъ поверхностей проектировались на нее *окружностями*. При такомъ расположеніи плоскостей проекціи и вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей задача сводится къ случаю аналогичному тому случаю, когда оси вращенія заданныхъ поверхностей между собою параллельны. Дѣйствительно, въ обоихъ случаяхъ горизонтальныя проекціи точекъ, принадлежащихъ искомому пересѣченію, получаютъ отъ взаимнаго пересѣченія окружностей, а вертикальныя—путемъ перенесенія горизонтальныхъ проекцій искомыхъ точекъ по направле-

нію проектированія на вертикальные слѣды вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей.

§ 4. Прежде чѣмъ перейти къ опредѣленію наклона сѣкущихъ вспомогательныхъ плоскостей къ осямъ вращенія заданныхъ поверхностей, замѣтимъ, что съ точки зрѣнія подобія плоскихъ сѣченій какой-либо поверхности вращенія второго порядка безразлично, будемъ ли пересѣкать заданная поверхности вращенія или же имъ подобныя, но съ осями вращенія параллельными заданнымъ; такъ что при опредѣленіи наклона сѣкущихъ вспомогательныхъ поверхностей для насъ имѣютъ значеніе лишь относительные размѣры обѣихъ осей каждой изъ поверхностей вращенія и взаимный наклонъ осей вращенія. Поэтому можно вообразить произвольную сферическую поверхность, къ которой касательны двѣ поверхности вращенія, *подобныя* заданнымъ и имѣющія оси вращенія параллельныя заданнымъ; если какая-либо плоскость пересѣкаетъ эти новыя поверхности вращенія по линіямъ между собой подобнымъ, то и всякая плоскость ей параллельная будетъ пересѣкать *заданныя* поверхности по линіямъ тоже подобнымъ этимъ сѣченіямъ.

Предположимъ, что оси вращенія этихъ вспомогательныхъ поверхностей вращенія, касательныхъ къ сферѣ, лежатъ въ плоскости параллельной вертикальной плоскости проекцій; тогда линіи соприкосновенія сферической поверхности съ поверхностями вращенія будутъ проектироваться на вертикальную плоскость проекцій двумя прямыми $a'b'$ и $c'd'$ (фиг. 4). Точки пересѣченія этихъ линій касанія (окружностей), проектирующіяся на вертикальную поверхность совпадающими между собой точками to', t' , въ которыхъ пересѣкаются прямая $a'b'$ и $c'd'$, — будутъ общими точками соприкосновенія для рассматриваемыхъ поверхностей вращенія, такъ что плоскости, проведенныя черезъ эти точки и касательныя къ шару будутъ также касательными плоскостями къ каждой изъ поверхностей вращенія. Если теперь мы возьмемъ еще какую-либо третью точку пересѣченія поверхностей вращенія, напримѣръ, почку n' , лежащую на пересѣченіи ихъ вертикальныхъ очерковъ, то плоскость $to't'n'$ ($totn$), проведенная черезъ эти три точки будетъ заключать въ себѣ два пересѣченія съ рассматриваемыми поверхностями вращенія второго порядка и двѣ къ этимъ пересѣченіямъ касательныя (отъ пересѣченія плоскости $to't'n'$, ($totn$) съ касательными плоскостями). Но такъ какъ эти пересѣченія поверхностей вращенія второго порядка суть кривыя второго порядка, имѣющія три общія точки и двѣ общія касательныя, — то эти кривыя сливаются въ одну и, слѣдовательно, плоскости $to't'n'$, ($totn$) и $to't'm'$, ($totm$), проведенныя черезъ точки касанія $to't'$ поверхностей вращенія и шара, а также черезъ пересѣченіе ихъ очерковъ, совпадаютъ съ линіей взаимнаго пересѣченія поверхностей вращенія, представляющей кривую второго порядка.

Такимъ образомъ, найденное направленіе сѣкущихъ плоскостей и есть то самое искомое направленіе, при которомъ пересѣченія обоихъ

заданныхъ поверхностей вращенія подобны. При принятомъ нами расположеніи вертикальной плоскости проекцій эти вспомогательныя сѣкущія плоскости будутъ вертикальнопроектирующими и, слѣдовательно, направленіе ихъ слѣдовъ опредѣляется точками взаимнаго пересѣченія вертикальныхъ очерковъ касательныхъ къ шару поверхностей вращенія. Не трудно видѣть, что для каждого случая пересѣченія двухъ поверхностей вращенія второго порядка, существуютъ два направленія сѣкущихъ вспомогательныхъ плоскостей, дающихъ по двѣ серіи подобныхъ кривыхъ, при чемъ всегда, хотя при одномъ изъ этихъ направленій, въ сѣченіяхъ получаются замкнутыя кривыя, т. е. эллипсы, которые при надлежащемъ выборѣ направленія горизонтальной плоскости проекцій и спроектируются на нее окружностями.

Послѣднее не представляетъ какихъ-либо затрудненій, такъ какъ большія оси эллипсовъ $n'k'$, $l'm'$, получаемыхъ отъ пересѣченія заданныхъ поверхностей вращенія, указанными выше вспомогательными плоскостями, въ силу принятаго нами расположенія проекцій будутъ параллельны вертикальной плоскости проекцій и проектируются на нее въ натуральную величину. А такъ какъ возможно для любого сѣченія опредѣлить и величину малой оси эллипса, то тѣмъ самымъ опредѣляется равная ей искомая *проекція* большой оси эллипса на горизонтальную плоскость, при которой этотъ эллипсъ проектируется кругомъ. Зная вертикальную проекцію большой оси эллипса, параллельной вертикальной плоскости, и ея горизонтальную проекцію, — *направленіе проектированія* на горизонтальную плоскость проекцій получаемъ, какъ направленіе катета прямоугольнаго треугольника, у котораго даны: положенія шпотенузы и длина другого катета.

§ 5., Итакъ, задача объ отысканіи направленія сѣкущихъ вспомогательныхъ плоскостей можетъ быть сведена къ опредѣленію пересѣченія двухъ очерковъ поверхностей вращенія второго порядка. Такими очерками могутъ служить: 1) двѣ параллельныя прямыя, 2) двѣ пересѣкающіяся прямыя, 3) окружность, 4) парабола, 5) гипербола, и 6) эллипсъ соотвѣтственно слѣдующимъ поверхностямъ вращенія: цилиндръ, конусъ, сфера, параболоидъ, гиперболоидъ и эллипсоидъ*).

Разсмотримъ всевозможные случаи взаимнаго пересѣченія поверхностей вращенія второго порядка и укажемъ простѣйшіе способы опредѣленія направленія сѣкущихъ плоскостей.

а) Если въ числѣ пересѣкающихся поверхностей вращенія будетъ цилиндрическая или коническая поверхность, то пересѣченіе очерковъ ихъ сводится къ пересѣченію кривой второго порядка съ прямою — задача рѣшающаяся точно съ помощью циркуля и линейки; такъ какъ способы построения пересѣченій этихъ линій общеизвѣстны, то приводить ихъ здѣсь нѣтъ необходимости.

*) Осью вращенія котораго служитъ большая ось образующаго эллипса.

б) Если въ числѣ пересѣкающихся поверхностей вращенія будетъ сферическая, или же оси вращенія обѣихъ поверхностей будутъ между собою параллельны,—то, совмѣщая центръ или ось этой поверхности съ осью вращенія другой заданной поверхности, увидимъ, что точки пересѣченія ихъ всегда будутъ лежать въ плоскости перпендикулярной къ осямъ вращенія; слѣдовательно, направление вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей при пересѣченіяхъ поверхностей вращенія второго порядка, имѣющихъ параллельныя оси, а также при пересѣченіяхъ со сферою всегда должно быть перпендикулярно къ осямъ вращенія заданныхъ поверхностей.

в) Если въ числѣ пересѣкающихся поверхностей вращенія второго порядка имѣется параболоидъ вращенія, то для опредѣленія линіи пересѣченія нѣтъ нужды отыскивать пересѣченіе очерковъ, такъ какъ можно гораздо проще рѣшить вопросъ о направленіи сѣкущихъ плоскостей, если принять во вниманіе свойство параболоида вращенія, заключающееся въ томъ, что проекція любого плоскаго сѣченія параболоида вращенія на плоскость нормальную къ оси его есть окружность *) Такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ необходимо проводить вспомогательныя сѣкущія плоскости такъ, чтобы только отъ пересѣченія ихъ съ другой заданной поверхностью получить проекціями на горизонтальную плоскость (перпендикулярную къ оси вращенія параболоида) окружности,—при чемъ, когда оси вращенія заданныхъ поверхностей параллельны вертикальной плоскости проекцій, то для опредѣленія направленія вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей, строимъ на горизонтальной плоскости проекцій (фиг. 5) окружность касательную къ горизонтальному очерку другой изъ заданныхъ поверхностей и имѣющую свой центръ s, s' гдѣ-либо на горизонтальной проекціи оси вращенія ея. Принявъ эту окружность за горизонтальную проекцію пересѣченія второй изъ заданныхъ поверхности вращенія съ искомою вспомогательной сѣкущей плоскостью,—проводимъ къ окружности двѣ касательныя mm' и kk' горизонтальнопроектирующія линіи, на направленіи которыхъ и находимъ тѣ точки вертикальнаго очерка поверхности вращенія l', m', k' и n' , черезъ которыя проходятъ слѣды сѣкущихъ искомыхъ плоскостей P'_v . Такъ что и въ этомъ случаѣ задача сводится къ пересѣченію прямыхъ съ двумя прямыми или же прямыхъ съ кривою второго порядка.

г) Если второй изъ заданныхъ поверхностей вращенія будетъ тоже параболоидъ вращенія,—то, какъ не трудно видѣть, изъ свойства этихъ поверхностей вытекаетъ, что слѣды вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей на вертикальной плоскости проекцій должны быть параллельны или перпендикулярны биссектрисѣ, которая дѣлитъ по поламъ

*) Такъ какъ тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и цилиндръ вращенія, то все сказанное здѣсь о параболоидѣ вращенія имѣетъ силу и для цилиндра вращенія.

уголъ между вертикальными проекціями осей заданныхъ поверхностей вращенія.

д) Если въ числѣ взаимно пересѣкающихся поверхностей имѣется гиперboloидъ вращенія,—то при нахожденіи направленія вспомогательныхъ сѣкущихъ поверхностей можно воспользоваться извѣстнымъ свойствомъ его ассимптотическаго конуса, заключающимся въ томъ, что при пересѣченіи гиперboloида вращенія (однополаго или двуполаго) и его ассимптотическаго конуса какою-либо плоскостью въ сѣченіяхъ получаются кривыя подобныя между собою. Такимъ образомъ, при нахожденіи направленія вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей всегда можемъ вмѣсто гиперboloида вращенія пользоваться его ассимптотическимъ конусомъ вращенія, что значительно упрощаетъ задачу.

е) Остается теперь разсмотрѣть случай пересѣченія двухъ эллипсоидовъ вращенія; въ этомъ случаѣ задача сводится къ построенію пересѣченія двухъ эллипсовъ имѣющихъ общій центръ и равныя малыя оси.

Задача эта рѣшается довольно просто, если эти эллипсы разсматривать, какъ кривыя, происшедшія отъ пересѣченія двухъ равныхъ цилиндровъ вращенія съ вертикальной плоскостью проекцій,—при чемъ діаметры этихъ цилиндровъ равны малой оси эллипсовъ, и оси вращенія ихъ пересѣкаются въ точкѣ, лежащей, на вертикальной плоскости проекцій. Не трудно замѣтить, что точки пересѣченія эллипсовъ при подобномъ ихъ расположеніи лежатъ въ биссекторіальныхъ плоскостяхъ по отношенію къ осямъ цилиндровъ, и, слѣдовательно, направленіе слѣдовъ вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей опредѣляется линіями пересѣченія этихъ биссекторіальныхъ плоскостей съ вертикальною плоскостью проекцій.

Итакъ, какія бы ни были даны поверхности вращенія второго порядка, всегда можно найти геометрически точно, не вычерчивая даже очерковъ ихъ, необходимое направленіе вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей; всегда можно опредѣлить по отношенію осей вращенія заданныхъ поверхностей положеніе горизонтальной плоскости проекцій и получить геометрически точно сначала горизонтальныя, а затѣмъ и вертикальныя проекціи точекъ пересѣченія заданныхъ поверхностей вращенія.

При этомъ одинъ и тотъ же методъ примѣняется какъ для поверхностей вращенія, оси которыхъ лежатъ въ одной плоскости, такъ и для поверхностей, оси которыхъ лежатъ въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ *).

§ 6., Разсмотримъ теперь нѣсколько примѣровъ.

а) Найти линію пересѣченія конуса вращенія и эллипсоида вращенія, оси которыхъ расположены въ двухъ плоскостяхъ, параллельныхъ

*) Исключеніе представляетъ эллипсоидъ вращенія, осью вращенія которому служитъ малая ось образующаго эллипса.

вертикальной плоскости проекцій (фиг. 6), при чемъ даны оси образующаго эллипса, уголь образующей конуса съ его осью и положеніе осей вращенія.

Построеніе. На вертикальной проекціи малой оси эллипсоида описываемъ, какъ на діаметрѣ, окружность, къ которой проводимъ двѣ касательныя, параллельныя образующимъ вертикальнаго очерка конуса; опредѣливши геометрическимъ построеніемъ четыре точки пересѣченія очерка эллипсоида съ этими прямыми, соединяемъ эти точки попарно прямыми (между собой пересѣкающимися), которыя и дадутъ направленіе слѣдовъ вертикально проектирующихъ вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей. Если теперь изъ концовъ діаметровъ эллипса, параллельныхъ сѣкущей плоскости, проведемъ касательныя къ построенной нами окружности, то ими опредѣляется направленія проектированія. Дальнѣйшее построеніе будетъ заключаться въ томъ что, проведя рядъ параллельныхъ найденному направленію вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей, сносимъ на горизонтальную плоскость центры хордъ эллипса, полученныхъ отъ пересѣченія очерка эллипсоида слѣдами этихъ плоскостей; затѣмъ строимъ на ней окружности, діаметры которыхъ соотвѣтственно равны горизонтальнымъ проекціямъ хордъ. Точно такимъ же образомъ строимъ горизонтальныя проекціи сѣченій конуса вспомогательными плоскостями, и получаемъ вторую систему окружностей; пересѣченія этихъ окружностей съ соотвѣтственными окружностями, полученными раньше, дадутъ рядъ точекъ, принадлежащихъ горизонтальной проекціи искомой линіи пересѣченія заданныхъ поверхностей. Перенеся эти точки по направленію проектированія на слѣды вспомогательныхъ сѣкущихъ плоскостей, получимъ соотвѣтствующія имъ вертикальныя проекціи искомой линіи.

б) Найти пересѣченіе двухъ эллипсоидовъ вращенія, оси которыхъ между собою не пересѣкаются и не параллельны (фиг. 7).

Построеніе. Располагаемъ вертикальную плоскость проекцій параллельно плоскостямъ осей вращенія заданныхъ эллипсоидовъ. На вертикальной плоскости проекцій, изъ точки u' , которою проектируется центръ одного изъ эллипсоидовъ, какъ около центра, строимъ оси эллипса, подобнаго вертикальному очерку другого заданнаго эллипсоида, такъ чтобы малая ось этого эллипса равнялась малой оси очерка перваго эллипсоида, а большая ось $u't'$ была параллельна оси вращенія другого эллипсоида. Чтобы найти точки пересѣченія этихъ соцентричныхъ эллипсовъ, строимъ оси двухъ взаимно пересѣкающихся равнаго діаметра цилиндровъ вращенія, имѣющихъ своими слѣдами на вертикальной плоскости проекцій указанную выше пару соцентричныхъ эллипсовъ. Вертикальныя проекціи осей этихъ цилиндровъ совпадаютъ съ большими осями эллипсовъ $e'u'$ и $u't'$, горизонтальныя же могутъ быть легко построены, если приведемъ каждую ось цилиндра путемъ вращенія около центра эллипсовъ uu' въ плоскость параллельную вер-

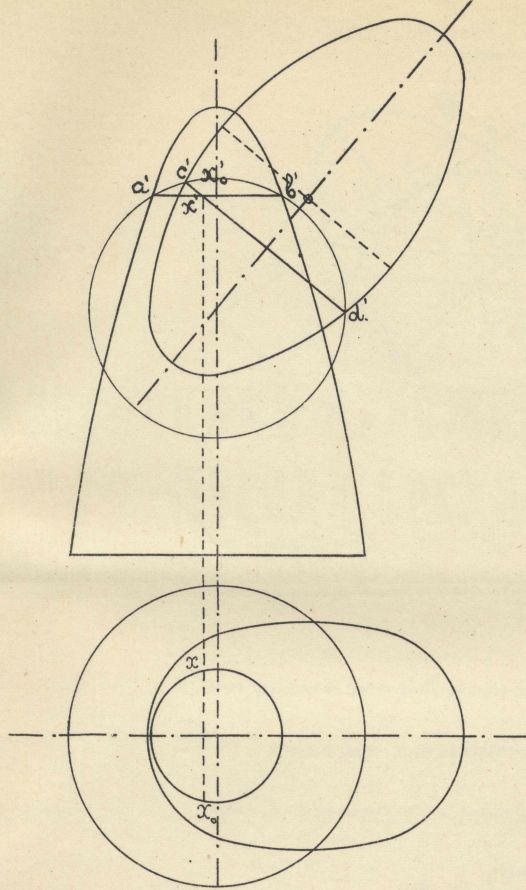
тикальной плоскости проекцій. Въ этомъ положеніи уголъ наклона горизонтальной проекціи оси какого-либо цилиндра d опредѣляется изъ условія: $\text{Sina} = \frac{a}{b}$, гдѣ a и b —оси эллипса; такъ что, построивъ проекціи для смѣщеннаго положенія осей, приводимъ ихъ въ прежнее положеніе, соотвѣтствующее построеннымъ нами осямъ соцентричныхъ эллипсовъ. Построивши плоскости, дѣлящія углы между осями вспомогательныхъ цилиндровъ $e'u'eu$, $t'u'tu$ пополамъ, находимъ вертикальные ихъ слѣды P'_v , которые и будутъ параллельны слѣдамъ вспомогательныхъ вертикально-проектирующихъ плоскостей, пересѣкающихъ заданные эллипсоиды вращенія по кривымъ, проектирующимся на горизонтальную плоскость проекцій окружностями. Въ остальномъ построение идетъ аналогично построению, указанному въ первомъ примѣрѣ.

в) Найти пересѣченіе параболоида вращенія и однополаго гиперболоида вращенія, оси которыхъ расположены въ двухъ плоскостяхъ, параллельныхъ горизонтальной плоскости проекцій (фиг. 8).

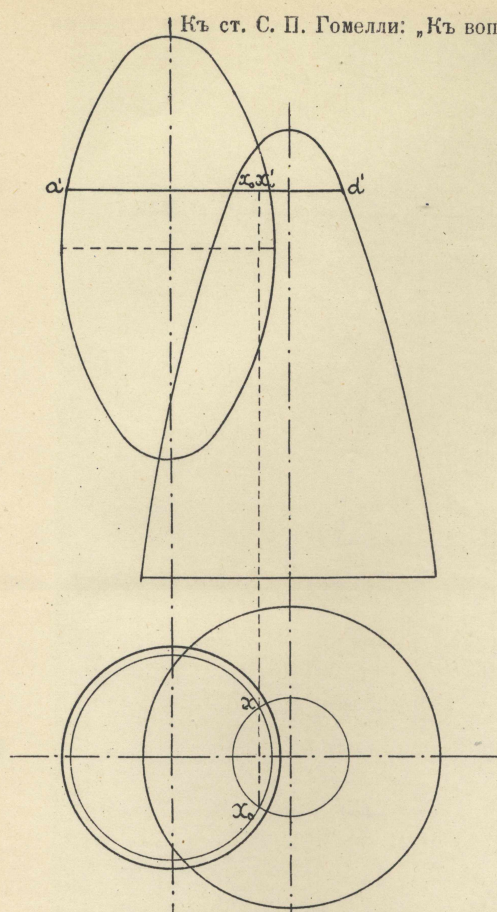
Построеніе. Строимъ на горизонтальной плоскости проекцій очеркъ асимптотическаго конуса гиперболоида вращенія, а затѣмъ и вертикальную его проекцію на плоскости перпендикулярной къ оси заданнаго параболоида. На вертикальной проекціи конуса описываемъ произвольную окружность, касательную къ образующимъ очерка его и сносимъ точки пересѣченія ея l' и k' съ вертикальными проекціями горизонтальнаго очерка конуса на образующія горизонтальнаго очерка послѣдняго по направленію проектированія. Діагонали, соединяющіе противоположныя вершины, полученнаго такимъ образомъ четырехугольника и дадутъ направленіе вспомогательныхъ горизонтальнопроектирующихъ плоскостей P_h , пересѣченія которыхъ съ заданными поверхностями вращенія проектируются на вертикальную плоскость проекцій окружностями.

Въ дальнѣйшемъ построенія для нахождения проекціи линіи пересѣченія заданныхъ поверхностей аналогичны построеніямъ, приведеннымъ въ первомъ примѣрѣ.—

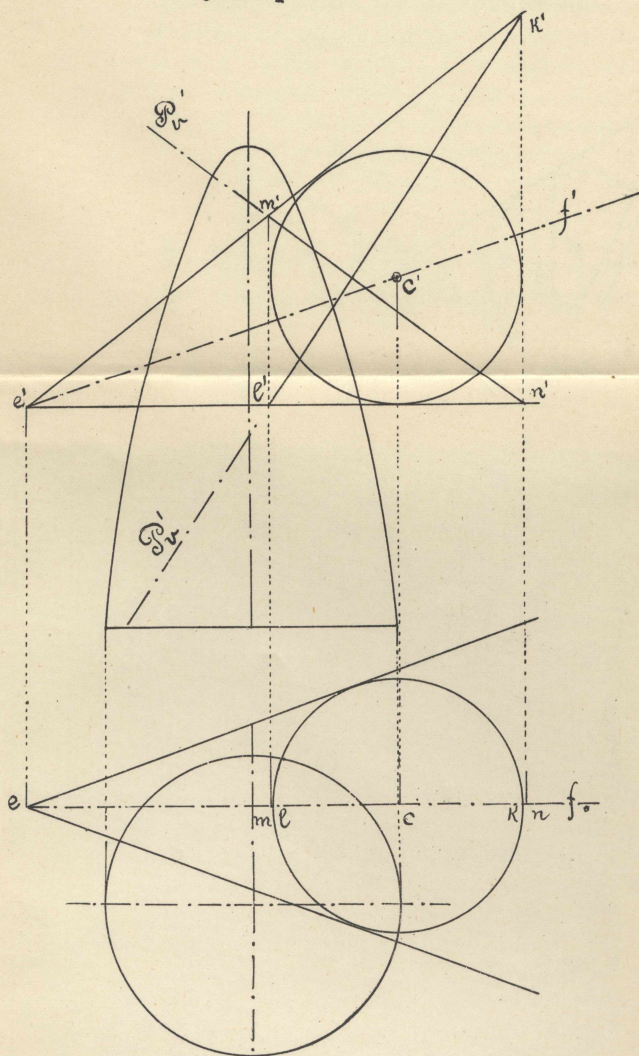
Такимъ образомъ описанный выше способъ построенія проекцій взаимнаго пересѣченія поверхностей вращенія второго порядка не только что даетъ возможность получить геометрически точное рѣшеніе вопроса въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ при обыкновенномъ способѣ построенія получается не точное рѣшеніе,—но въ тоже время является и упрощеніемъ въ смыслѣ выполненія задачи, такъ какъ сущность предлагаемаго построенія сводится къ опредѣленію пересѣченія двухъ окружностей въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ при обычномъ рѣшеніи приходится находить пересѣченія окружностей съ другими кривыми второго порядка, построенными по точкамъ.



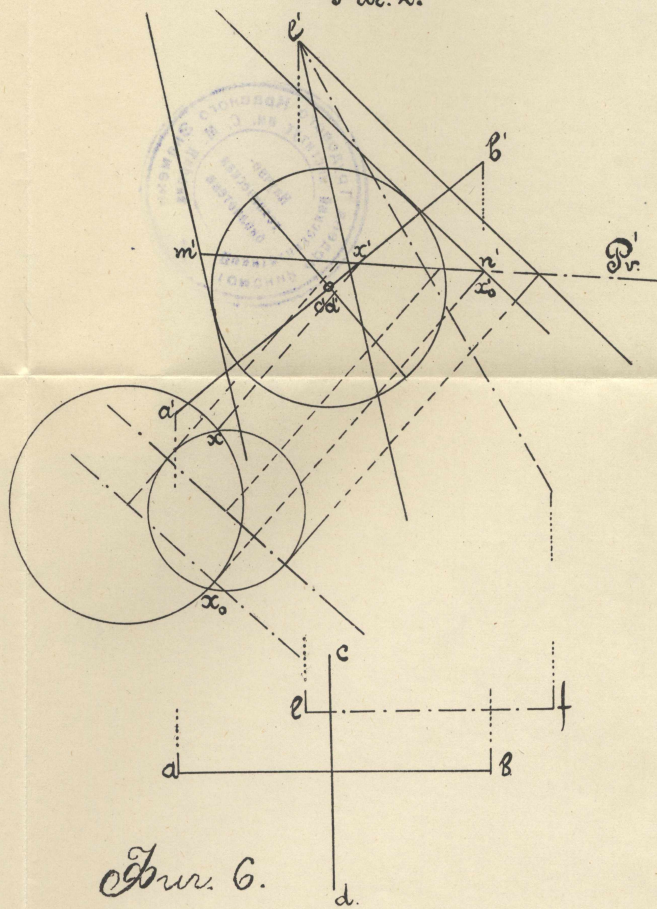
Фиг. 1.



Фиг. 2.

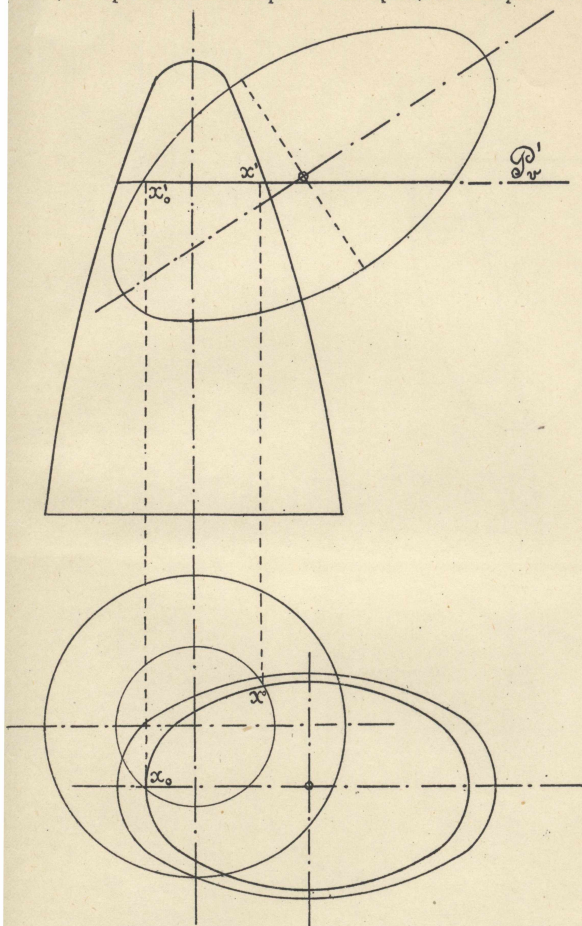


Фиг. 5.

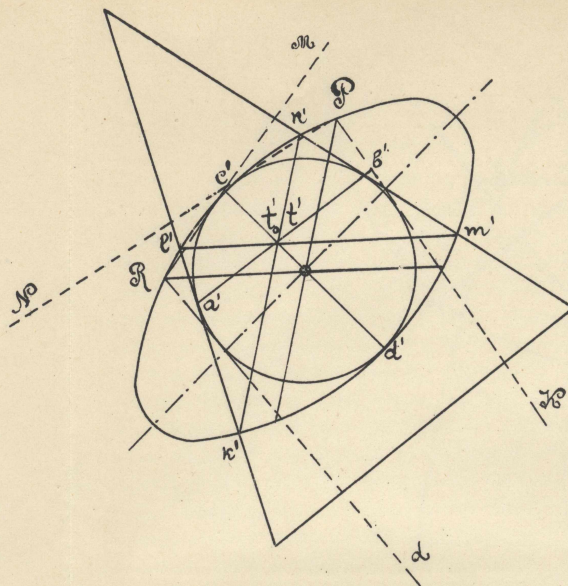


Фиг. 6.

$ab, a'b', cd, c'd'$ - оси заданного эллипсоида.
 $fe, f'e'$ - ось заданного конуса.
 x, x' и x_0, x_0' - искомыми точками пересечения.

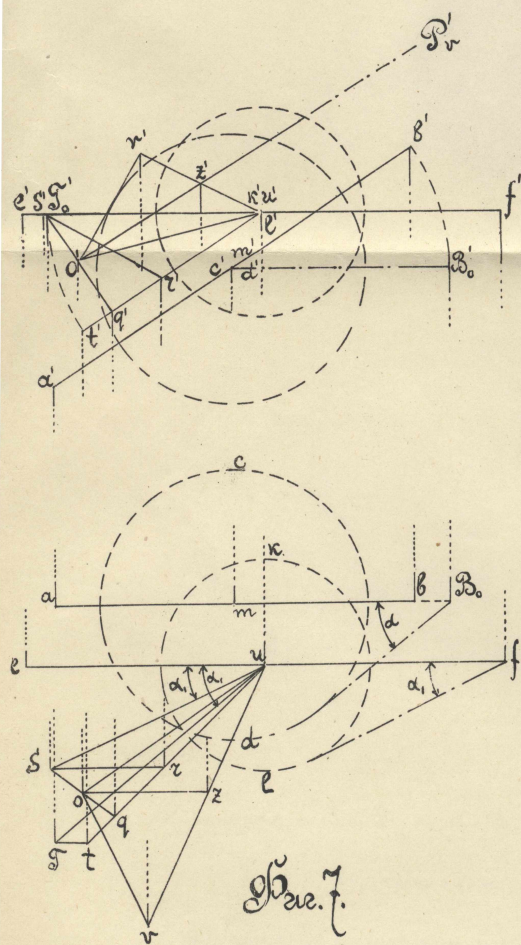


Фиг. 3.

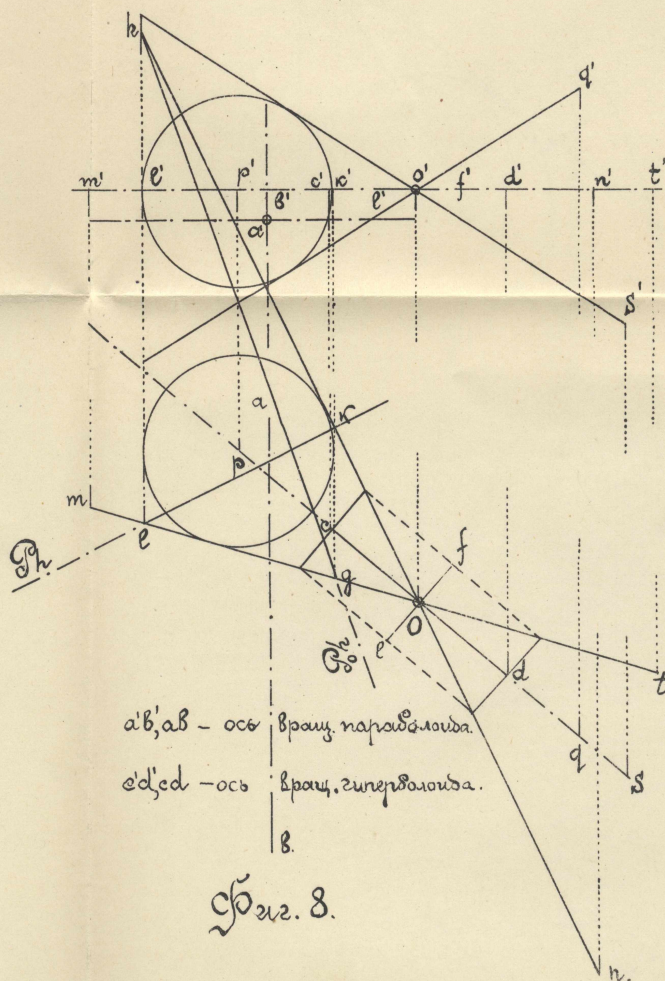


$PN, P'N'$ — направл. проектир. для сѣк. плоск. $\parallel n'k'$.
 $PM, P'M'$ — направл. проектир. для сѣк. плоск. $\parallel m'l'$.
 Горизонтальныя проеціи на чертежѣ не показаны.

Фиг. 4.



Фиг. 7.



$a'b', ab$ — ось вращ. параболоида.
 $a'd', ad$ — ось вращ. гиперболоида.

Фиг. 8.