W. L. Nekrasow. Die Konstruktion der Dreiecke auf der Kugel.

В. Л. НЕКРАСОВЪ

ПОСТРОЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ НА СФЕРѢ.

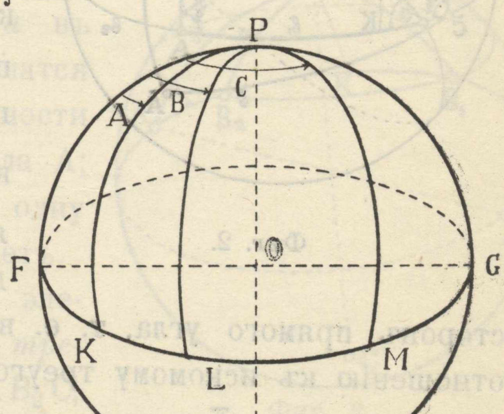
ТОМСКЪ.
Типо-Литографія Сибирскаго Т—ва Печатнаго Дѣла. Уг. Дворянской ул. и Ямского пер. соб. д.
1911.

ПОСТРОЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ НА СФЕРѢ.

Литература по сферической геометріи и сферической тригонометріи необъятна, и трудно въ настоящее время сказать что нибудь такое, что не было бы уже сказано когда либо и кѣмъ либо раньше. Но, не смотря на это, мои поиски въ этомъ отношеніи не дали мнѣ желаемаго результата: того, что я излагаю въ настоящей статьѣ, я не нашелъ у другихъ авторовъ: правда—я, пересмотрѣвъ многое, не видѣлъ большей части литературы; причина этому та, что достать соотвѣтственныя статьи и сочиненія, часто изданныя весьма давно и въ мало распространенныхъ журналахъ, является далеко не легкимъ; даже въ богатыхъ библіотекахъ ихъ нѣтъ. Вотъ тѣ соображенія, которыя даютъ мнѣ поводъ издать настоящую статью.

Задачей ея являются построенія на сферѣ, выполняемыя только съ помощью сферическаго циркуля.

1. Имѣя сферу, мы легко, съ помощью построенія на плоскости, можемъ найти ея радіусъ и сферическій радіусъ, равный квадранту, т. е. четверти окружности большого круга.



Фиг. 1.

Для построенія даннаго угла на поверхности сферы въ данной точкѣ P на данной дугѣ PF мы опишемъ изъ данной точки, какъ полюса, сферическимъ радіусомъ, равнымъ квадранту, окружность большого круга FLG; построивъ на плоскости въ окружности радіуса, равнаго радіусу сферы, при центрѣ данный уголъ A, нанесемъ отвѣчающую ему дугу FK на окружность большого круга отъ точки F; проведя черезъ P и K окружность большого круга, получимъ уголъ FPK, какъ извѣстно, равный дугѣ FK и, слѣдовательно, данному углу A.

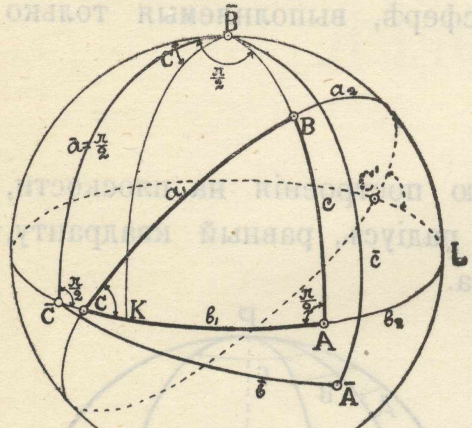
2. Построеніе треугольниковъ на сферѣ производится въ большинствѣ случаевъ аналогично построенію на плоскости; поэтому представляетъ интересъ только построеніе *a*) треугольника по тремъ угламъ, *b*) прямоугольнаго треугольника по катету и противолежащему углу, косоугольнаго треугольника *c*) по двумъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ и *d*) по двумъ угламъ и сторонѣ противъ одного изъ нихъ.

Въ трехъ послѣднихъ случаяхъ возможны два рѣшенія, почему они и называются случаями двойственности.

Первая задача рѣшается весьма просто: строя—согласно § 1—три данныхъ угла A, B, C на сферѣ при точкѣ P, мы получимъ стороны KG, LG, MG полярнаго треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; строя этотъ послѣдній по тремъ сторонамъ, мы получимъ искомый треугольникъ, какъ полярный для $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

3. Переходимъ теперь къ случаямъ двойственности и рѣшимъ сначала задачу:

Построить прямоугольный сферическій треугольникъ по даннымъ катету и противолежащему углу.



Фиг. 2.

Пусть даны катетъ *c* и уголъ C.

Прежде всего, согласно § 2, строимъ дугу $KL = \pi - C$, представляющую собой сторону $\bar{c}$ полярнаго треугольника.

На сторонѣ прямого угла A откладываемъ дугу $AB = c$; затѣмъ изъ A, какъ полюса, сферическимъ радіусомъ $\frac{\pi}{2}$ проводимъ дугу, пересѣкающую стороны прямого угла въ точкахъ B и C; такъ какъ $\bar{B}\bar{C} = A = \frac{\pi}{2}$, треугольникъ $A\bar{B}\bar{C}$ является октантомъ, и точки $\bar{B}, \bar{C}$ будутъ поэтому соотвѣтственно полюсами сторонъ прямого угла, т. е. вершинами треугольника, полярнаго по отношенію къ искомому треугольнику. Проводя изъ точки B, какъ полюса, радіусомъ $\frac{\pi}{2}$ дугу, мы получимъ сторону $\bar{b}$ полярнаго треугольника; эта дуга пересѣчется съ стороной *a* въ полюсѣ дуги AB, т. е. —въ точкѣ $\bar{C}$. Если мы радіусомъ KL изъ точки $\bar{B}$ засѣчемъ сторону $\bar{b}$, мы получимъ третью вершину $\bar{A}$ полярнаго треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Точка $\bar{A}$ есть полюсъ искомой гипотенузы *a*; слѣдовательно, если изъ $\bar{A}$, какъ полюса, радіусомъ $\frac{\pi}{2}$ провести дугу, то эта дуга пройдетъ черезъ точку В и дастъ на АС точку С—вершину искомаго треугольника; уголъ при точкѣ С, равный $\pi - AB = \pi - KL$, будетъ данный.

Треугольники АВС и смежный ему ABC' удовлетворяютъ такимъ образомъ требованіямъ задачи.

4. Переходимъ теперь къ рѣшенію и изслѣдованію задачи:

Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ.

Пусть даны стороны a, b и уголъ А.

Строимъ на сферѣ уголъ А и на одной изъ его сторонъ откладываемъ дугу $AC = b$; изъ точки С, какъ полюса, сферическимъ радіусомъ a описываемъ окружность малаго круга; пересѣченіе ея со второй стороной угла опредѣлитъ вершину В искомаго треугольника; его мы получимъ, проводя черезъ С и В дугу большого круга.

Таковъ общій ходъ построенія, которое при разныхъ заданіяхъ видоизмѣняется въ деталяхъ, какъ это мы сейчасъ увидимъ. Кромѣ того въ иныхъ случаяхъ приходится проводить дугу СК, перпендикулярную второй сторонѣ угла А, при чемъ, какъ извѣстно, эта дуга окажется меньше или больше $\frac{\pi}{2}$ въ зависимости отъ того, будетъ ли уголъ А острый или тупой.

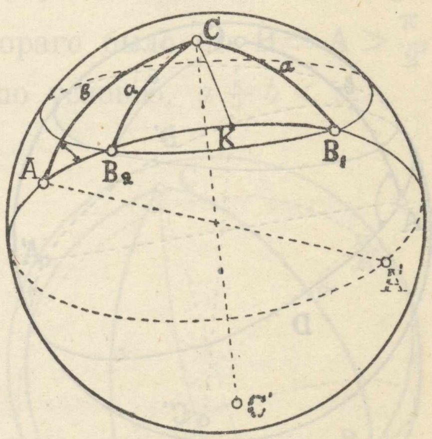
А. Пусть обѣ стороны a и b меньше четверти окружности.

I. Положимъ сначала, что $a < b$, и разсмотримъ то предположеніе, когда

1) Уголъ А—острый.

Въ зависимости отъ величины a въ сравненіи съ СК, при $a > CK$ получатся двѣ точки пересѣченія B_1, B_2 окружности малаго круга со второй стороной угла А; при $a = CK$ обѣ точки совпадутъ въ одну К, и при $a < CK$ пересѣченія не будетъ.

Въ первомъ случаѣ по даннымъ элементамъ (a, b, А) мы опредѣляемъ *два треугольника*, одинъ—AB_1C и другой—AB_2C; при этомъ треугольникъ B_1CB_2—равнобедренный, вслѣдствіе чего $B_1 + B_2 = \pi$.



Фиг. 3.

Во второмъ случаѣ обѣ точки B_1 и B_2 совпадутъ въ одну К, и искомый треугольникъ АКС, опредѣляемый элементами ($a = CK$, b, А), будетъ—*прямоугольный*, при чемъ у него

$$c = AK, \quad B = K = \frac{\pi}{2}, \quad C = ACK.$$

Наконецъ въ третьемъ случаѣ *треугольникъ построить нельзя*.

Не трудно видѣть, что играющія здѣсь рѣшающую роль соотношенія

$$(1) \qquad a > \mathrm{CK}, \quad a = \mathrm{CK}, \quad a < \mathrm{CK}$$

совпадаютъ соотвѣтственно съ обычными соотношеніями

$$(2) \qquad \frac{\sin b}{\sin a}\sin \mathrm{A} < 1, \quad \frac{\sin b}{\sin a}\sin \mathrm{A} = 1, \quad \frac{\sin b}{\sin a}\sin \mathrm{A} > 1;$$

дѣйствительно: здѣсь по условію a и CK меньше $\frac{\pi}{2}$; поэтому съ (1) взаимной зависимостью связаны условія

$$(3) \qquad \sin a > \sin \mathrm{CK}, \quad \sin a = \sin \mathrm{CK}, \quad \sin a < \sin \mathrm{CK};$$

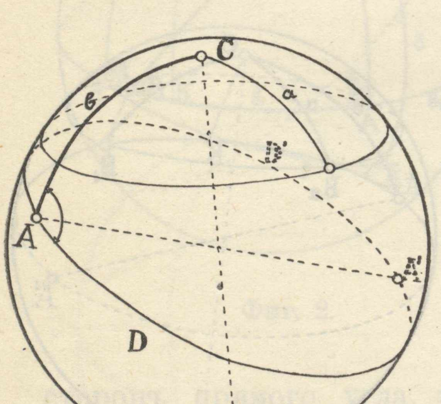
но, какъ извѣстно,

$$(4) \qquad \sin \mathrm{CK} = \sin \mathrm{A} \sin b;$$

изъ (3) и (4) вытекаютъ соотвѣтственныя условія

$$(5) \qquad \sin a > \sin \mathrm{A} \sin b, \quad \sin a = \sin \mathrm{A} \sin b, \quad \sin a < \sin \mathrm{A} \sin b,$$

совпадающія съ (2). Такимъ образомъ выясняется геометрическій смыслъ этихъ послѣднихъ условій.



Фиг. 4.

2) Если уголъ A—тупой, окружность малаго круга не пересѣчетъ его стороны ADA′, и *построеніе треугольника* по элементамъ $(a < b,\ \mathrm{A} > \frac{\pi}{2})$ *дѣлается невозможнымъ*.

Окружность малаго круга можетъ пересѣчь сторону смежнаго съ даннымъ остраго угла $\mathrm{CAD'} = \pi - \mathrm{A}$; но получающіеся при этомъ треугольники, опредѣляемые элементами $(a,\ b,\ \pi - \mathrm{A} < \frac{\pi}{2})$, не будутъ отвѣчать заданію: при этомъ знакъ неравенствъ (2) указывалъ бы здѣсь на ту или иную случайность рѣшенія именно этихъ послѣднихъ, но не искомыхъ треугольниковъ.

II. Пусть далѣе $a > b$.

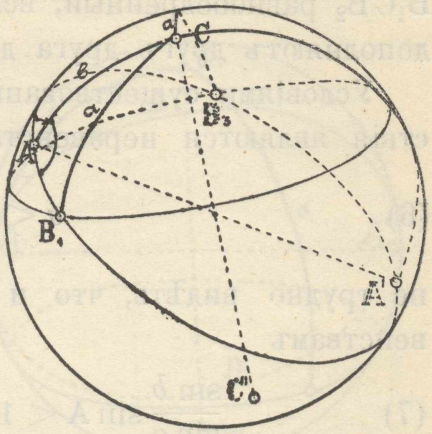
Окружность малаго круга пересѣчетъ здѣсь вторую сторону угла A по разныя стороны діаметра AA′; поэтому

1) Если данный намъ уголъ А тупой, мы получимъ по элементамъ $(a,\ b,\ A > \frac{\pi}{2})$ *единственный треугольникъ* AB_1C, для котораго

$$c = AB_1,\quad B_1 = AB_1C,\quad C = ACB_1.$$

2) Если уголъ А — острый, равный CAB_3 и смежный съ предыдущимъ угломъ, то элементы $(a,\ b,\ A < \frac{\pi}{2})$ даютъ также единственный треугольникъ AB_3C, при чемъ

$$c = AB_3,\quad B_3 = AB_3C,\quad C = ACB_3.$$



Фиг. 5.

Углы B_1 и B_3, какъ углы равнобедреннаго треугольника B_1CB_3, равны; оба они—острые, такъ какъ—въ силу условія $b < a$—должно быть

$$B_3 < B_3AC < \frac{\pi}{2}.$$

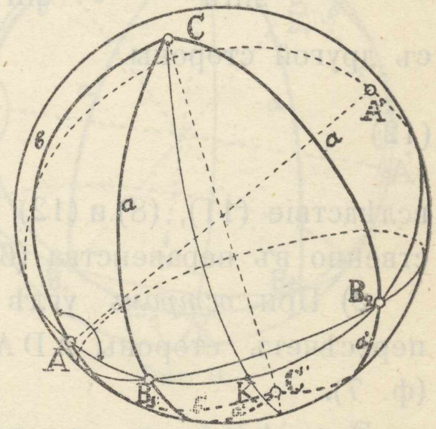
III. Наконецъ въ случаѣ $a = b$ мы, при $A < \frac{\pi}{2}$, должны обратиться къ ф. 3: при увеличеніи a точка B_2 будетъ перемѣщаться въ направленіи А, и B_1—въ обратномъ направленіи; поэтому, при $a = b$, точка B_2 совпадетъ съ А, и мы получимъ единственный равнобедренный треугольникъ AB_1C.

При тупомъ углѣ А, какъ это видно изъ ф. 5, не возможно построеніе равнобедреннаго треугольника, у котораго было бы $B = A > \frac{\pi}{2}$, и, слѣдовательно, $A + B > \pi$, тогда какъ, по условію, $a + b < \pi$.

B. Пусть далѣе $a > \frac{\pi}{2}$, $b > \frac{\pi}{2}$.

I. Если $a > b$, и

1) уголъ А—*тупой*, перпендикуляръ СК больше $\frac{\pi}{2}$; поэтому онъ будетъ длиннѣе всѣхъ наклонныхъ. Если $a < CK$, окружность малаго круга пересѣчетъ сторону угла А въ двухъ точкахъ B_1, B_2, и мы получимъ тогда два треугольника AB_1C и AB_2C, отвѣчающихъ требованіямъ задачи; если $a = CK$, искомымъ будетъ единственный прямоугольный треугольникъ АКС; при $a > CK$ окружность малаго круга не пересѣчетъ стороны АК угла А, и тре-



Фиг. 6.

угольникъ дѣлается невозможнымъ. Въ первомъ случаѣ треугольникъ B_1CB_2 равнобедренный, вслѣдствіе чего углы $B_1 = AB_1C$ и $B_2 = AB_2C$ дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ угловъ.

Условіями существованія двухъ и одного рѣшеній или ихъ отсутствія являются неравенства

(6) $$a < CK, \quad a = CK, \quad a > CK;$$

не трудно видѣть, что и здѣсь эти неравенства равносильны неравенствамъ

(7) $$\frac{\sin b}{\sin a}\sin A < 1, \quad \frac{\sin b}{\sin a}\sin A = 1, \quad \frac{\sin b}{\sin a}\sin A > 1,$$

встрѣчающимся выше.

Дѣйствительно: для треугольника ABC', задаваемаго элементами

8 $$a' = \pi - a < \frac{\pi}{2}, \; b' = \pi - b < \frac{\pi}{2}, \; A' = \pi - A < \frac{\pi}{2},$$

мы имѣемъ два ряда соотвѣтственно равносильныхъ соотношеній

(9) $$\frac{\sin b'}{\sin a'}\sin A' < 1, \quad \frac{\sin b'}{\sin a'}\sin A' = 1, \quad \frac{\sin b'}{\sin a'}\sin A' > 1;$$

(10) $$a' > C'K, \; a' = C'K, \; a' < C'K;$$

но — въ силу (8) —

(11) $$\frac{\sin b'}{\sin a'}\sin A' = \frac{\sin(\pi - b)}{\sin(\pi - a)}\sin(\pi - A) = \frac{\sin b}{\sin a}\sin A;$$

съ другой стороны

(12) $$C'K = \pi - CK;$$

вслѣдствіе (11), (8) и (12) неравенства (9) и (10) переходятъ соотвѣтственно въ неравенства (6) и (7).

2) При *остромъ* углѣ A окружность сферическаго радіуса a не пересѣчетъ стороны ADA', и построеніе треугольника не возможно (ф. 7).

Эта окружность можетъ пересѣчь сторону $AD'A'$ *тупого* угла CAD', но это не отвѣчаетъ заданію.

II. Если $a < b$, окружность малаго круга пересѣчетъ окружность большого круга AA' въ двухъ точкахъ B_2 и B_4, лежащихъ по разныя стороны діаметра AA'; такимъ образомъ мы получимъ (ф. 8)

1) при *тупомъ* углѣ A треугольникъ AB_2C,

2) при *остромъ* углѣ A треугольникъ AB_4C,

удовлетворяющіе требованіямъ задачи.

Оба угла B_2 и B_4 равны, какъ углы равнобедреннаго треугольника B_2CB_4; въ треугольникѣ AB_2C уголъ B_2 будетъ больше тупого угла A; слѣдовательно, оба угла B_2 и B_4 — тупые. Смежные имъ острые углы входятъ въ треугольники $A'B_2C$ и $A'B_4C$, задаваемые элементами $(a, \pi - b, A' = A)$.

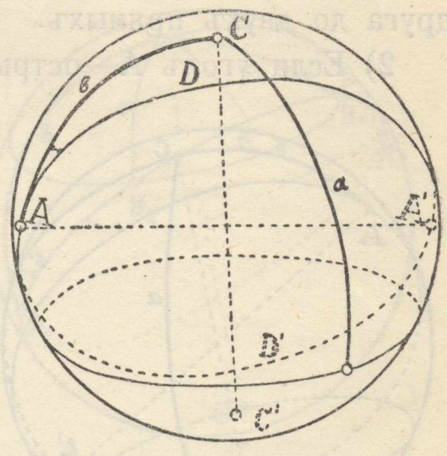
III. Если наконецъ сдѣлать $a = b$, при $A > \frac{\pi}{2}$ точка B_1 на ф. 6 совпадетъ съ A, и мы получимъ единственный равнобедренный треугольникъ ACB_2; при $A < \frac{\pi}{2}$ *равнобедренный* треугольникъ со сторонами $a = b > \frac{\pi}{2}$ и съ углами $A = B < \frac{\pi}{2}$ дѣлается невозможнымъ (ф. 7).

С. Пусть далѣе $a > \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$.

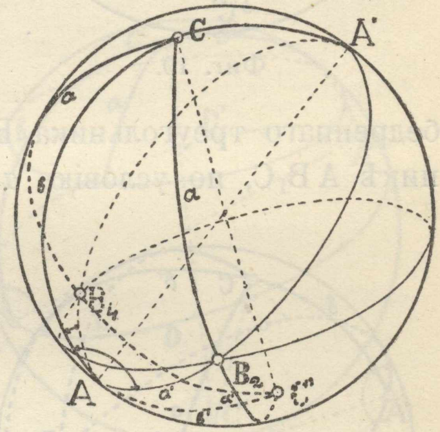
I. Пусть $a > b' = \pi - b$, и, слѣдовательно, $a + b > \pi$.

1) Если сверхъ того (ф. 9) данный уголъ A — тупой, перпендикуляръ CK будетъ больше $\frac{\pi}{2}$ и, слѣдовательно, онъ длиннѣе всѣхъ наклонныхъ. Если $a < CK$, окружность малаго круга пересѣчетъ сторону угла A въ двухъ точкахъ B_1 и B_2, и при этомъ получатся два треугольника AB_1C и AB_2C, имѣющихъ заданные элементы (a, b, A); при $a = CK$ треугольникъ будетъ одинъ AKC; наконецъ при $a > CK$ пересѣченія окружностей малаго круга и AKA' не послѣдуетъ, и по даннымъ (a, b, A) опредѣлить треугольникъ нельзя.

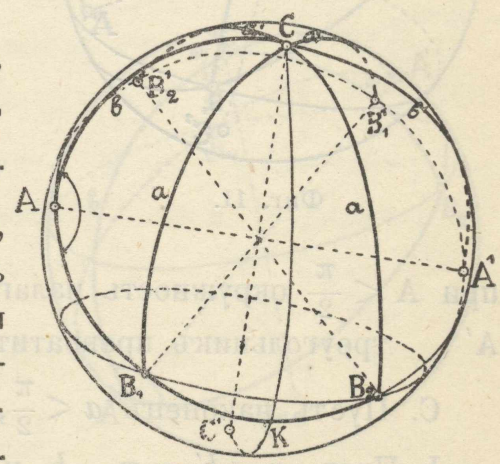
Условія появленія одного изъ этихъ случаевъ — очевидно — и здѣсь равносильны съ (7).



Фиг. 7.



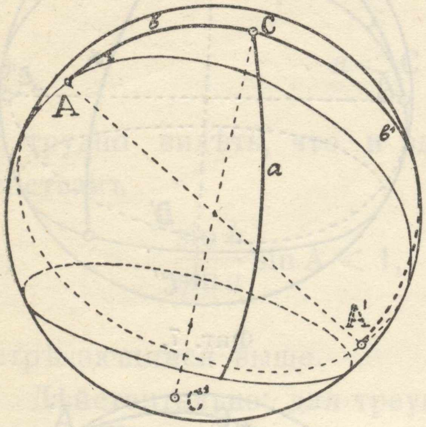
Фиг. 8.



Фиг. 9.

Такъ какъ въ первомъ случаѣ, по построенію, треугольникъ B_1CB_2 —равнобедренный, углы $B_1 = AB_1C$ и $B_2 = AB_2C$ дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ.

2) Если уголъ A—острый, окружность малаго круга не пересѣчетъ стороны *остраго* угла A, и построеніе треугольника выполнить нельзя (ф. 10).



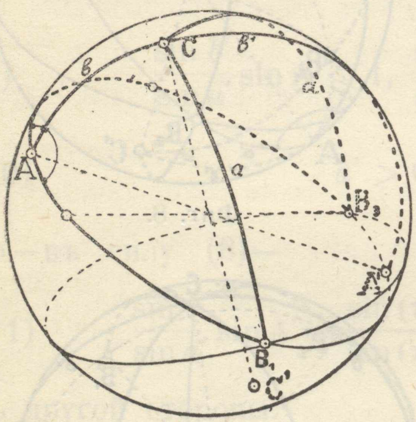
Фиг. 10.

II. Если $a < b'$, и, слѣдовательно, $a + b < \pi$, окружность малаго круга пересѣчетъ окружность большого круга AA′ въ двухъ точкахъ B_1 и B_3 по разныя стороны діаметра AA′; благодаря этому по элементамъ (a, b, A) построятся треугольники (ф. 11)

1) AB_1C, если уголъ A—тупой,

2) AB_3C, если онъ—острый.

Углы B_1 и B_3 равны, какъ углы равнобедреннаго треугольника B_1CB_3; такъ какъ при этомъ въ треугольникѣ AB_1C, по условію, $a + b < \pi$, и уголъ A тупой, то уголъ B_1 долженъ быть острымъ; также $B_3 = B_1 < \frac{\pi}{2}$.



Фиг. 11.

Смежные угламъ B_1 и B_3 тупые углы входятъ въ составъ треугольниковъ $A'B_1C$ и $A'B_3C$, опредѣляемыхъ элементами (a, $\pi - b$, $A' = A$).

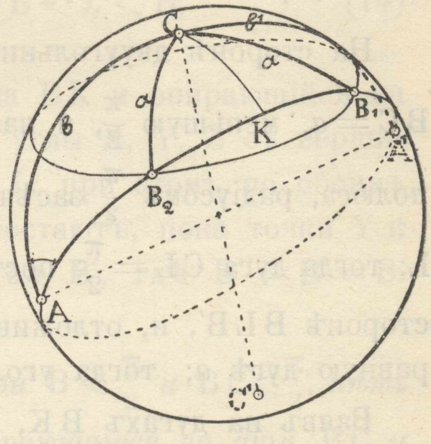
III. При $a = b'$ и, слѣдовательно, $a + b = \pi$, и при $A > \frac{\pi}{2}$ точка B_2 (ф. 9) совпадетъ съ A′, и искомымъ будетъ единственный треугольникъ AB_1C съ острымъ угломъ B_1, равнымъ $\pi - A$; при $A < \frac{\pi}{2}$ окружность малаго круга (ф 10) пройдетъ черезъ точку A′ треугольникъ превратится въ двуугольникъ ACA′.

C. Пусть наконецъ $a < \frac{\pi}{2}$, $b > \frac{\pi}{2}$.

I. Пусть $a < b' = \pi - b$, и, слѣдовательно, $a + b < \pi$.

1) Если уголъ A—острый, перпендикуляръ CK будетъ меньше $\frac{\pi}{2}$ и, слѣдовательно, онъ короче всѣхъ наклонныхъ. Если $a > CK$, окружность малаго круга пересѣчетъ вторую сторону угла въ двухъ точкахъ B_1 и B_2, вслѣдствіе чего получатся два треугольника AB_1C и

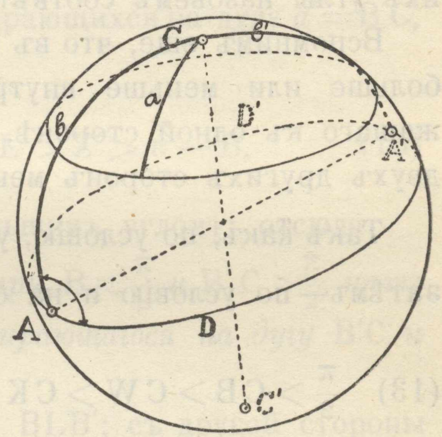
AB_2C, обладающихъ заданными элементами (a, b, A); если $a = KC$, получится одинъ прямоугольный треугольникъ АКС; если наконецъ $a < CK$, окружность малаго круга не пересѣчетъ второй стороны угла А, и треугольника не будетъ.



Фиг. 12.

Такъ какъ треугольникъ B_1CB_2 — равнобедренный, углы $B_1 = AB_1C$ и $B_2 = AB_2C$ дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ.

2) Если уголъ А — тупой, пересѣченія двухъ окружностей не будетъ, и треугольника по элементамъ (a, b, $A > \frac{\pi}{2}$) построить нельзя (ф. 13)



Фиг. 13.

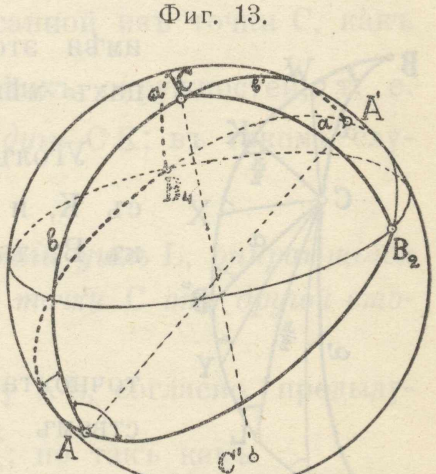
II. Пусть $a > b'$, и, слѣдовательно, $a + b > \pi$.

Окружность малаго круга пересѣкаетъ окружность большого круга по обѣ стороны діаметра AA', благодаря чему

1) при $A > \frac{\pi}{2}$ получается одинъ треугольникъ AB_2C,

2) при $A < \frac{\pi}{2}$ также одинъ треугольникъ AB_4C,

отвѣчающіе соотвѣтственному заданію, при чемъ углы $B_2 = AB_2C$ и $B_4 = AB_4C$ равны, и оба они, какъ это легко видѣть, тупые.



Фиг. 14.

III. Если $a = b'$, и, слѣдовательно, $a + b = \pi$, при остромъ углѣ А, какъ видно изъ ф. 12, точка B_1 совпадетъ съ A', и получится одинъ треугольникъ AB_2C съ тупымъ угломъ B_2, равнымъ $\pi - A$; при тупомъ углѣ А окружность малаго круга (ф. 14) пройдетъ черезъ точку A', и треугольникъ съ элементами ($a = \pi - b$, b, А) превратится въ двуугольникъ ACA'.

Такимъ образомъ здѣсь мы получаемъ полное геометрическое рѣшеніе изслѣдуемой задачи.

5. Прежде чѣмъ переходить къ геометрическому рѣшенію послѣдней задачи, мы должны установить нѣкоторыя необходимыя намъ свойства сферическаго двуугольника.

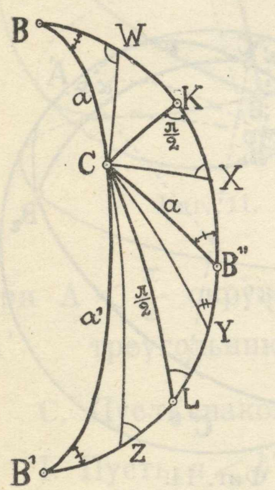
На сторонѣ двуугольника съ угломъ B, меньшимъ $\frac{\pi}{2}$, отложимъ дугу $BC=a$, меньшую $\frac{\pi}{2}$, и назовемъ $a'=B'C$; затѣмъ изъ точки C, какъ полюса, радіусомъ $\frac{\pi}{2}$ засѣчемъ вторую сторону двуугольника въ точкѣ L; тогда дуга $CL=\frac{\pi}{2}$; построимъ далѣе дугу CK, перпендикулярную сторонѣ BLB', и, отложивъ $KB''=KB$, проведемъ наклонную CB'', равную дугѣ a; тогда уголъ $B''=B$.

Взявъ на дугахъ BK, KB'', $B''L$, LB' точки W, X, Y, Z, обозначимъ тѣми же буквами углы BWC, BXC, BYC, BZC, смежные же ихъ углы назовемъ соотвѣтственно W', X', Y', Z'.

Вспомнимъ еще, что въ сферическомъ треугольникѣ внѣшній уголъ больше или меньше внутренняго съ нимъ несмежнаго, но прилежащаго къ одной сторонѣ, въ зависимости отъ того, будетъ ли сумма двухъ другихъ сторонъ меньше или больше π.

Такъ какъ, по условію, уголъ B — острый, CK должно быть меньше $\frac{\pi}{2}$; затѣмъ — по условію и на основаніи извѣстныхъ теоремъ —

$$\frac{\pi}{2} > CB > CW > CK < CX < CB'' < CY < CL = \frac{\pi}{2} < CZ < CB'; \tag{13}$$



Фиг 15.

имѣя это въ виду, изслѣдуемъ, въ какихъ границахъ мѣняются углы W, X, Y, Z.

Уголъ W равенъ $\frac{\pi}{2}$, когда точка W совпадаетъ съ K, и близокъ къ $\pi - B$, когда W приближается къ B; такимъ образомъ

$$\pi - B > W > \frac{\pi}{2},$$

точно также углы X и Y удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{\pi}{2} > X > B,\quad B > Y > L;$$

въ силу (13), $CL + CZ > \pi$; поэтому, мы будемъ имѣть

$$L < Z < B.$$

Если сопоставить всѣ эти неравенства, получится

$$\pi - B > W > \frac{\pi}{2} > X > B > Y > L < Z < B; \qquad (14)$$

отсюда видно, что уголъ W, съ вершиной на BK и опирающiйся на дугу a, будетъ тупой; также расположенные углы X, Y, Z съ вершинами на KLB' будутъ острые и *всѣ больше* L; при этомъ по обоимъ направленiямъ отъ точки L углы Y и Z возростаютъ, пока точки Y и Z не придутъ въ положенiе—одна B'' и другая B', гдѣ $B''=B'=B$. Мы находимъ такимъ образомъ, что

I. *На сторонѣ* BLB' *двуугольника* BB', *при* $B<\frac{\pi}{2}$ *и* $BC<\frac{\pi}{2}$, *нѣтъ точки, которая была бы вершиной угла, опирающагося на дугу* BC *и меньшаго* L.

Для смежныхъ угловъ W', X', Y', L', Z', опирающихся на дугу $a'=B'C$, въ силу (14), получится

$$B < W' < \frac{\pi}{2} < X' < \pi - B < Y' < L' > Z' > \pi - B, \qquad (15)$$

т. е. L' окажется наибольшимъ, а B наименьшимъ угломъ; отсюда

II. *На сторонѣ* BLB' *двуугольника* BB', *при* $B<\frac{\pi}{2}$ *и* $B'C>\frac{\pi}{2}$, *нѣтъ точки, которая была бы вершиной угла, опирающагося на дугу* $B'C$ *и меньшаго* B.

Полюсъ дуги CK лежитъ на окружности BLB'; съ другой стороны тотъ же полюсъ лежитъ на окружности, описанной изъ точки C, какъ полюса, радiусомъ $\frac{\pi}{2}$; точка пересѣченiя обѣихъ окружностей, т. е. *точка* L *будетъ* такимъ образомъ *полюсомъ дуги* CK; въ такомъ случаѣ $KL=\frac{\pi}{2}$ и $L=CK$; итакъ

III. *Въ сферическомъ двуугольникѣ наименьшiй уголъ* L, *опирающiйся на дугу* BC, *равенъ сферическому разстоянiю точки* C *отъ другой стороны двуугольника.*

Вычитая изъ полуокружности BLB' дугу KL, согласно предыдущему—равную $\frac{\pi}{2}$, мы получимъ $BK+LB'=\frac{\pi}{2}$; но такъ какъ

$$KL = KB'' + B''L = \frac{\pi}{2},$$

и по построенiю $BK=KB''$, то оказывается $B''L=LB'$, т. е.

IV. *Точка* L *дѣлитъ пополамъ дугу* $B'B''$.

Мы можемъ такимъ образомъ сказать, что

V. *Въ двуугольникѣ* BB′ *при* B *и* BC, *меньшихъ* $\frac{\pi}{2}$, *наименьшій уголъ, опирающійся на дугу* BC, *имѣетъ вершину въ серединѣ дуги* B′B″.

6. Переходя къ рѣшенію послѣдней задачи:

Построить треугольникъ по двумъ угламъ и сторонѣ противъ одного изъ нихъ,

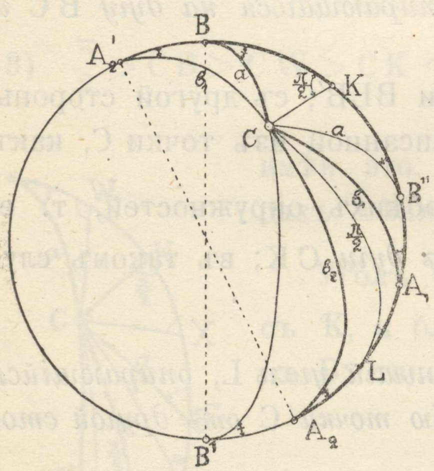
возьмемъ на сферѣ двуугольникъ съ угломъ B и на одной изъ его сторонъ отложимъ дугу BC, равную a; проведемъ далѣе дугу CK, перпендикулярную второй сторонѣ двуугольника, и дугу $CL = \frac{\pi}{2}$; отложимъ наконецъ $B''K = BK$ и соединимъ B'' съ C дугой большого круга; тогда окажется

$$CB'' = CB = a, \quad KB''C = KBC = B.$$

При данныхъ a и B вполнѣ опредѣленными являются дуга CK и равный ей уголъ L.

По извѣстному катету CK и данному углу A — согласно § 3 — мы строимъ прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго будетъ второй стороной искомаго треугольника.

Таковъ въ общихъ чертахъ ходъ построенія; этотъ процессъ въ различныхъ условіяхъ принимаетъ нѣсколько различный характеръ, какъ это мы увидимъ ниже.



Фиг. 16.

A. Мы разсмотримъ прежде всего тотъ случай, когда *оба данные угла — острые*.

Если B — острый уголъ, дуга CK и равный ей уголъ L меньше $\frac{\pi}{2}$; въ такомъ случаѣ, основываясь на неравенствахъ (14), можно утверждать, что при $A > B$ искомая вершина прямоугольнаго треугольника должна располагаться между K и E″, и при $A < B$ эта вершина можетъ лежать, во первыхъ — между B″ и L, и во вторыхъ — между L и B′.

I. Пусть уголъ $A < B$, и сверхъ того

1) сторона a меньше четверти окружности большого круга.

Въ такомъ случаѣ, если данный уголъ A больше L, можно — согласно § 3 — по CK и A построить два прямоугольныхъ треугольника A_2KC и $A_2'KC$, при чемъ вершина A_2 лежитъ между B′ и L; косоугольный треугольникъ A_2BC имѣетъ элементами ($A_2 = A$, B, a) и будетъ однимъ изъ искомыхъ. Отложивъ $AK_1 = KA_2'$ и проведя черезъ A_1 и C дугу большого круга, мы получимъ въ равнобедренномъ треугольникѣ CA_1A_2' равенства $A_1 = A_2' = A$ и $CA_1 = CA_2'$; вершина A_1, согласно сказанному выше, будетъ лежать на дугѣ $B''L$. Треугольникъ A_1BC будетъ вторымъ треугольникомъ, опредѣляемымъ элементами ($A_1 = A$, B, a); если назвать $A_1C = b_1$, $A_2C = b_2$, то, какъ это видно изъ чертежа, b_1 и b_2 дополнятъ другъ друга до полуокружности. Итакъ, при $A > L$, мы получаемъ *два треугольника* A_1BC и A_2BC, удовлетворяющихъ требованіямъ задачи; при $A = L$ получится *единственный прямосторонній треугольникъ* LBC, имѣющій данные элементы ($A = L$, B, a), и наконецъ, при $A < L$, въ силу I § 5—построеніе треугольника *не возможно*.

Появленіе одного изъ трехъ случаевъ вызывается существованіемъ соотношеній

$$A > L, \quad A = L, \quad A < L; \tag{16}$$

такъ какъ здѣсь углы A и L—острые, мы имѣемъ соотвѣтственно

$$\sin A > \sin L, \quad \sin A = \sin L, \quad \sin A < \sin L; \tag{17}$$

но, въ силу III § 5, $\sin L = \sin CK = \sin B \sin a$; поэтому (17) непосредственно перейдутъ въ извѣстныя неравенства

$$\frac{\sin B}{\sin A}\sin a < 1, \quad \frac{\sin B}{\sin A}\sin a = 1, \quad \frac{\sin B}{\sin A}\sin a > 1. \tag{18}$$

Построеніе ф. 16 даетъ намъ возможность сдѣлать нѣсколько важныхъ замѣчаній.

По построенію $A_1B'' = A_2'B$; какъ дуги вертикальныхъ угловъ, $A_2B' = A_2'B$; поэтому $A_2B' = A_1B''$. Если отъ равныхъ—согласно IV § 5—дугъ $B'L$ и $B''L$ мы отнимемъ равныя дуги A_2B' и A_1B'', мы получимъ $A_2L = LA_1$; отсюда слѣдуетъ, что

VI. *Вершины равныхъ угловъ* A_1 *и* A_2, *меньшихъ* B, *равно удалены отъ точки* L.

Обратно: если $A_2L = LA_1$, въ силу IV § 5 — окажется, что $A_1B'' = A_2B'$; такъ какъ $A_2B' = A_2'B$, то $A_1B'' = A_2'B$ и, слѣдовательно, $A_2'K = KA_1$; отсюда вытекаетъ, что $A_2'C = CA_1$, и уголъ $A_2' = A_1$; но $A_2' = A_2$, значитъ, $A_2 = A_1$; такимъ образомъ

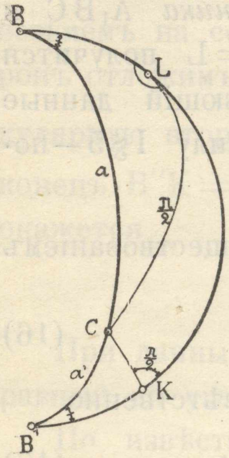
VII. *Если вершины угловъ, меньшихъ* B, *равно удалены отъ точки* L, *то эти углы равны между собой.*

Эта теорема даетъ намъ возможность, найдя одну изъ вершинъ, скажемъ—A_1, непосредственно находить другую A_2, не выходя изъ предѣловъ двуугольника.

Далѣе изъ построенія ясно, что

VIII. *Стороны* CA_1 *и* CA_2 *равныхъ угловъ* A_1 *и* A_2 *дополняютъ другъ друга до полуокружности.*

2) Если a больше четверти окружности, въ силу II § 5—нельзя построить треугольника съ угломъ A, меньшимъ B (ф. 17).



Фиг. 17.

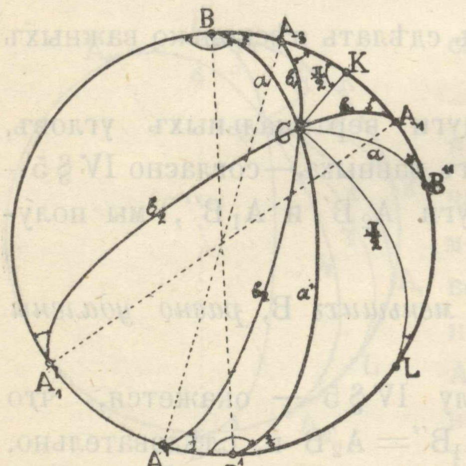
II. Пусть затѣмъ $A > B$, и (ф. 18)

1) Сторона a меньше четверти окружности; въ такомъ случаѣ, при построенiи прямоугольнаго треугольника по катету CK и углу A, вершина A должна расположиться на дугѣ $B''K$; мы получимъ тогда прямоугольный треугольникъ A_1KC и вмѣстѣ съ тѣмъ искомый треугольникъ A_1BC съ данными элементами ($A_1 = A, B, a$) и съ подлежащими опредѣленiю

$$b = b_1 = A_1C < \frac{\pi}{2}, \quad c = A_1B, \quad C = A_1CB.$$

2) Откладывая $A_3K = A_1K$ и проводя черезъ A_3 и C дугу большого круга, мы получимъ равнобедренный треугольникъ A_1CA_3, при чемъ

$$A_3C = A_1C = b_1, \quad A_3 = A_1 = A;$$



Фиг. 18.

вмѣстѣ съ тѣмъ мы будемъ имѣть, при $a' > \frac{\pi}{2}$, треугольникъ $A_3B'C$, опредѣляемый элементами ($A_3 = A$, $B' = B$, $a' > \frac{\pi}{2}$) и имѣющiй остальные — искомые элементы

$$b = b_1 = A_3C, \quad c = A_3B', \quad C = A_3CB'.$$

дополняющ

до полуокружности, входятъ въ составъ треугольниковъ $A_1'BC$ и $A_3B'C$, задаваемыхъ соотвѣтственно элементами (A, $\pi - B$, $a < \frac{\pi}{2}$) и (A, $\pi - B$, $a' > \frac{\pi}{2}$).

III. Наконецъ, при $A = B$ мы получимъ (ф. 18) единственный равнобедренный треугольникъ BCB'', если $a < \frac{\pi}{2}$; если же $a > \frac{\pi}{2}$, построенiе дѣлается невозможнымъ, такъ какъ стороны и углы треугольника мы предполагаемъ меньшими π.

Мы только что дали геометрическое рѣшеніе задачи въ предположеніи, что оба данные угла—острые. Теперь намъ придется разсмотрѣть вопросъ въ тѣхъ случаяхъ, когда одинъ или оба угла будутъ тупыми.

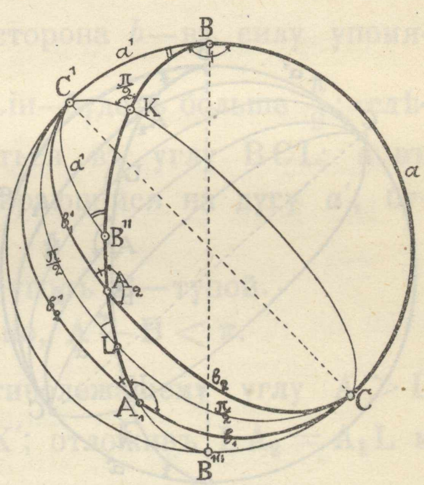
Прежде всего условимся два двуугольника, дополняющіе другъ друга до полусферы, называть *смежными*; у смежныхъ двуугольниковъ углы дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ.

B. Пусть оба данные угла A и B—тупые.

Для двуугольника съ угломъ B беремъ смежный двуугольникъ, уголъ котораго $B' = \pi - B$ будетъ острымъ.

I. Пусть сначала $A > B$ и, слѣдовательно, $\pi - A = A' < B'$.

1) Пусть затѣмъ $a > \frac{\pi}{2}$ и, значитъ, $a' < \frac{\pi}{2}$; проводя CKC' перпендикулярно дугѣ BB''', мы по $C'K$ и извѣстному углу $A' = \pi - A$, большему $L' = \pi - L$, строимъ—согласно § 3—прямоугольный треугольникъ $A_2C'K$; откладывая $A_1L = LA_2$ и проводя дугу $C'A_1C$, мы получимъ второй прямоугольный треугольникъ съ угломъ A_1', въ силу VII § 6—равнымъ $A_2' = A'$. Тогда, какъ легко видѣть, треугольники A_1BC и A_2BC съ элементами $(A_1 = A_2 = A, B, a)$ будутъ искомыми, при чемъ здѣсь $A < L$. Если $A = L$, получится единственный прямосторонній треугольникъ LBC, и при $A > L$ построеніе не возможно.

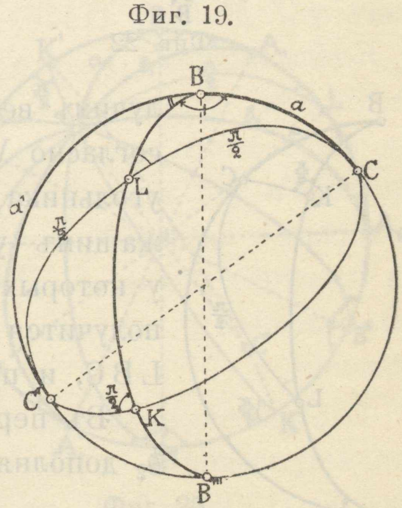


Фиг. 19.

При $A < L$, какъ это слѣдуетъ изъ VIII § 6, $b_1 + b_2 = \pi$.

Не трудно видѣть, что и здѣсь условія $A < L$, $A = L$, $A > L$ равносильны съ условіями (18).

2) Если $a < \frac{\pi}{2}$ и, слѣдовательно, $a' > \frac{\pi}{2}$, построеніе треугольника съ тупымъ угломъ A, большимъ B, не возможно, какъ это видно изъ чертежа (ф. 20) и изъ II § 5.

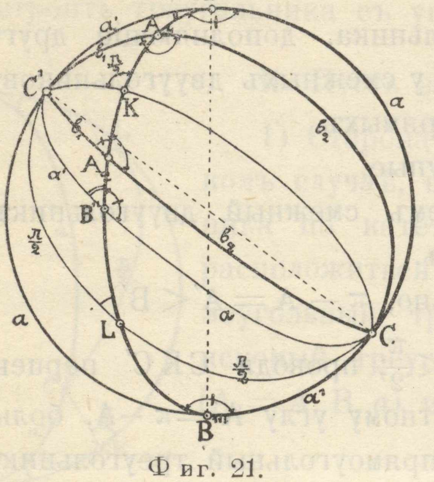


Фиг 20

II. Пусть далѣе $A < B$.

Такъ какъ здѣсь въ смежномъ двуугольникѣ $A' > B'$, мы получимъ при данномъ $a' < \frac{\pi}{2}$ одинъ треугольникъ A_2BC' и при $a = B'''C' > \frac{\pi}{2}$ одинъ треугольчикъ $A_4B'''C'$; отсюда имѣемъ

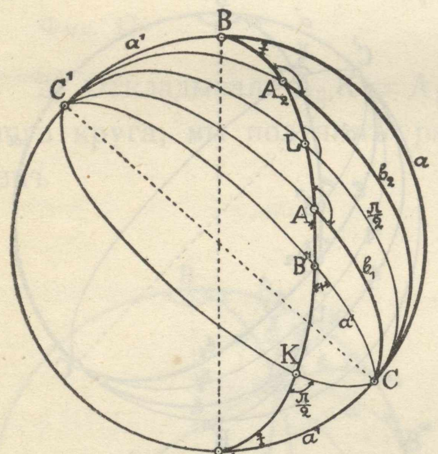
1) при $a > \frac{\pi}{2}$ одинъ искомый треугольникъ A_2BC, обладающій элементами ($A_2 = A$, B, a), и


Фиг. 21.

2) при $a' < \frac{\pi}{2}$ также одинъ треугольникъ $A_4B'''C$ съ данными элементами ($A_4 = A$, $B''' = B$, a').

Ясно, что въ этихъ треугольникахъ стороны, противолежащія угламъ B, равны другъ другу и больше $\frac{\pi}{2}$.

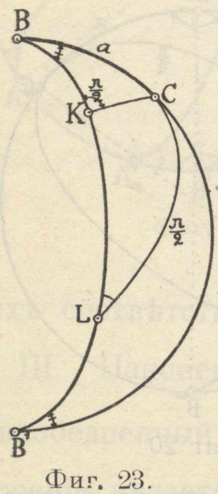
III. При $A = B$ мы получимъ (ф. 21) одинъ равнобедренный треугольникъ $BB''C$, если $a > \frac{\pi}{2}$; если же a', а слѣдовательно, и b меньше $\frac{\pi}{2}$, треугольникъ не возможенъ, такъ какъ онъ нарушалъ бы извѣстную теорему о томъ, что сумма двухъ сторонъ и сумма противолежащихъ имъ угловъ однозначны въ отношеніи къ π.


Фиг. 22.

C. Пусть далѣе углы A—тупой и B—острый.

I. Пусть $A' = \pi - A < B$ и, слѣдовательно, $A + B > \pi$.

1) Если $a > \frac{\pi}{2}$, дѣлая построеніе прямоугольнаго треугольника по катету CK и извѣстному углу A', большему $\pi - L$, получимъ вершину A_1; откладывая $A_2L = LA_1$, получимъ—согласно VII § 6—вершину второго прямоугольнаго треугольника съ тѣмъ же катетомъ и тѣмъ же противолежащимъ угломъ; тогда треугольники A_1BC и A_2BC, у которыхъ $A_1 = A_2 < L$, будутъ искомыми. Если $A = L$, получится единственный прямосторонній треугольникъ LBC, и при $A > L$ построеніе не возможно.

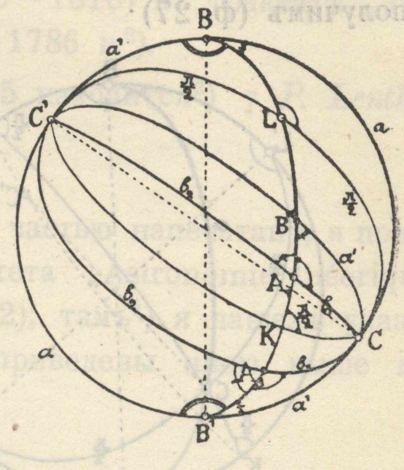

Фиг. 23.

Въ первомъ случаѣ—согласно VIII § 6—стороны b_1 и b_2 дополняютъ другъ друга до полуокружности.

2) Если $a < \frac{\pi}{2}$, нельзя построить уголъ A, опирающійся на дугу a и, по условію, большій $\pi - B$: его вершина не можетъ лежать ни на дугѣ KB', такъ какъ онъ тупой, и на BK, такъ какъ тогда онъ былъ бы меньше $\pi - B$.

II. Пусть затѣмъ $A' = \pi - A > B$ и, значитъ, $A + B < \pi$.

По катету CK и противолежащему углу A' строимъ два прямоугольныхъ треугольника A_1KC и A_3KC, при чемъ ихъ вершины должны лежать, одна—на дугѣ KB'' и другая—на KB'; тогда получатся искомые треугольники



Фиг. 24.

1) A_1BC, если дана сторона $a > \frac{\pi}{2}$;

2) $A_3B'C$, если дано $a' < \frac{\pi}{2}$;

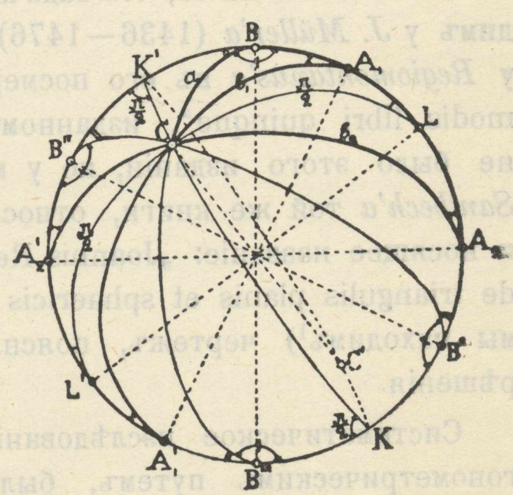
у обоихъ треугольниковъ стороны b_1 равны между собой и обѣ меньше $\frac{\pi}{2}$.

III. Если $A' = B$ и, слѣдовательно, $A + B = \pi$, то, при $a > \frac{\pi}{2}$, получится (ф. 24) одинъ треугольникъ $B''BC$; если же $a' < \frac{\pi}{2}$, построеніе выполнить нельзя; дѣйствительно: если дано $a' < \frac{\pi}{2}$, сторона b—въ силу упомянутой въ III B теоремы сферической геометріи—будетъ больше $\frac{\pi}{2}$; слѣдовательно—она (ф. 24) должна располагаться въ углу BCL; а въ такомъ случаѣ образованный ею уголъ, опирающійся на дугу a', будетъ острымъ, что противно положенію.

D. Пусть наконецъ уголъ A—острый, а уголъ B—тупой.

I. Пусть $A < B' = \pi - B$ и, слѣдовательно, $A + B < \pi$.

1) При $a < \frac{\pi}{2}$ по катету CK' и противолежащему углу $A > L$ строимъ прямоугольный треугольникъ A_1CK'; отложивъ $LA_2 = A_1L$ и проведя дугу A_2C, получимъ второй такой же треугольникъ A_2CK'; тогда треугольники A_1BC и A_2BC съ элементами ($A_1 = A_2 = A$, B, a) будутъ искомыми; при этомъ, согласно VIII § 6, $b_1 + b_2 = \pi$. Для $A = L$ получается одинъ треугольникъ LBC, и для $A < L$ построеніе сдѣлать нельзя.

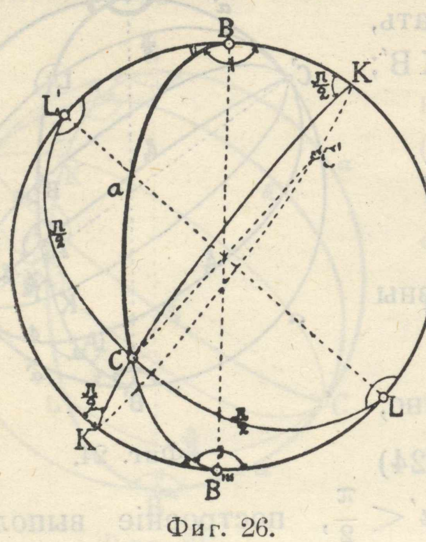


Фиг. 25.

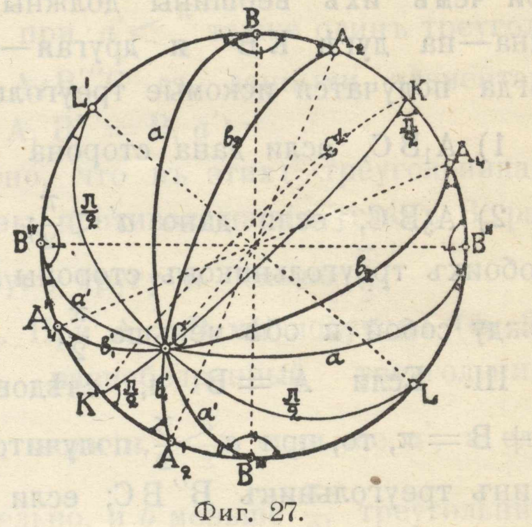
2) Также нельзя построить треугольникъ, если у него задано $a > \frac{\pi}{2}$; дѣйствительно (ф. 26): если бы вершина угла A, опирающагося на дугу a, лежала на BK, уголъ этотъ былъ бы острымъ, но большимъ $\pi - B$, а это противно положенію; если бы вершина A лежала на дугѣ $B'''K$, уголъ былъ бы тупымъ, что также не вѣрно.

II. Пусть $A > B' = \pi - B$ или, что все равно, $A + B > \pi$.

Строя по CK' и A въ смежномъ двуугольникѣ точки A_2 и A_4', мы получимъ (ф. 27).



Фиг. 26.



Фиг. 27.

1) при данномъ $a > \frac{\pi}{2}$ треугольникъ A_2BC и

2) при данномъ $a' < \frac{\pi}{2}$ треугольникъ $A_4B'''C$,

обладающіе данными углами $A_2 = A_4 = A$, $B = B'''$ и стороной a или a'.

III. Если $A = B' = \pi - B$ и, значитъ, $A + B = \pi$, мы получимъ (ф. 25), при $a < \frac{\pi}{2}$, треугольникъ $B''CB$; при $a > \frac{\pi}{2}$, какъ это мы видѣли на (ф. 26). на дугѣ BKB''' нельзя найти вершины угла, равнаго $\pi - B$; поэтому построеніе треугольника не осуществимо.

Такъ рѣшается послѣдняя задача во всѣхъ возможныхъ случайностяхъ.

7. Указаніе на то, что задача § 4 допускаетъ два рѣшенія, мы находимъ у *J. Müller'a* (1436—1476) или, какъ его обыкновенно называли, у *Regiomontanus'a* въ его посмертномъ сочиненіи „De triangulis omnimodis libri quinque", изданномъ въ 1533 г.; въ моемъ распоряженіи не было этого изданія, но у меня есть болѣе позднее изданіе *D. Santbech'a* той же книги, относящееся ко второй половинѣ XVI вѣка и носящее названіе: „Joannis Regiomontani mathematici praestantissimi de triangulis planis et sphaericis libri quinque etc." Въ этомъ изданіи мы находимъ[1]) чертежъ, поясняющій происхожденіе двойственности рѣшенія.

Систематическое изслѣдованіе случаевъ двойственности, но—тригонометрическимъ путемъ, было опубликовано въ 1756 г. *G. Heinsius'омъ* (1709—1769) въ „Acta Eruditorum"; но достать это изданіе мнѣ не удалось.

---

[1]) Стр. 111.

Первый чертежъ, поясняющій происхожденіе двойственности въ задачѣ § 6, мы находимъ у *A. Cagnoli* (1743—1816) въ трактатѣ „Trigonometria piana e sferica", изданномъ въ 1786 г.[2]).

Геометрическое изслѣдованіе задачи § 5 находится[3]) у *P. Lentheric'a* († 1849).

Когда предыдущее было уже набрано и частью напечатано, я получилъ изъ библіотеки Казанскаго Университета „Astronomie théorique et pratique" *J. B. J. Delambre'a* (1749—1822); тамъ[4]) я нашелъ указанія на свойства двуугольника, которыя приведены мною выше въ теоремахъ I и III § 5 и VI, VII и VIII § 6.

---

[2]) У меня—второе французское изданіе 1808 г.; см.—стр. 322-3, черт. 54.

[3]) „Nouvelles Annalles de Mathématiques", t. II, 1843, p. 32.

[4]) t. I, p. 198.