ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института Императора Николая II.
т. XXIV. 1911. № 4.

Къ вопросу о шатунномъ полюсѣ.

А. В. Угарова.

Опредѣленіе точнаго геометрическаго мѣста точекъ пересѣченія сопряженныхъ хордъ въ прямолинейно-производномъ шатунно-кривошипномъ механизмѣ.

Въ моей работѣ „Шатунный полюсъ" *) при отысканіи точнаго геометрическаго мѣста точекъ пересѣченія сопряженныхъ хордъ для прямолинейно-производнаго шатунно-кривошипнаго механизма былъ намѣченъ слѣдующій путь: искомое геометрическое мѣсто найдется какъ результатъ исключенія перемѣннаго параметра k изъ уравненій [59] и [69] **).

Такъ какъ въ уравненіи [69] имѣются члены подъ знакомъ радикала, заключающіе въ себѣ параметръ, то я привожу это уравненіе къ раціональному виду путемъ возвышенія въ квадратъ и получаю уравненіе [80] очень сложнаго вида.

Очевидно, что „уничтоженіе ирраціональности обращаетъ уравненіе [69] въ произведеніе двухъ уравненій, изъ которыхъ одно представляетъ собою изслѣдуемую нами линію, а другое новую линію, параллельную первой и отстоящую отъ нея на перемѣнномъ разстояніи, такъ какъ только при $k = \sigma$, когда $R_1 = R_2 = O$, оба уравненія представляютъ собою одну и ту же линію".

„Такимъ образомъ, мы видимъ, что, за исключеніемъ одного частнаго случая, эта новая линія не проходитъ черезъ точку пересѣченія сопряженныхъ хордъ и слѣдовательно, для отысканія интересующаго насъ геометрическаго мѣста является совершенно излишней". ***)

Изъ приведенной выдержки ясно, что послѣ исключенія параметра k, мы должны полученное уравненіе разложить на произведеніе

*) «Извѣстія Томскаго Технологическаго Института» 1909 г. № 1.

**) См. стр. 58.

***) Ш. п. стр. 59.

уравненій и опредѣлить, которое изъ нихъ является для насъ нужнымъ.

Уравненіе [80], не смотря на рядъ принятыхъ сокращенныхъ обозначеній, получилось очень сложное, а потому, для упрощенія рѣшенія вопроса, я ввелъ нѣкоторое произвольное допущеніе, при посредствѣ котораго и получилъ геометрическое мѣсто, какъ гиперболу.*)

Очевидно, что подобное приближенное рѣшеніе вопроса не даетъ точныхъ указаній на характеръ и свойства геометрическаго мѣста и если нѣкоторые выводы и получились согласными съ истиной, то другіе могутъ быть ошибочными.

Для отысканія возможности существованія шатуннаго полюса намъ надо получить точное выраженіе геометрическаго мѣста и изслѣдовать его.

Намѣченный нами путь, являясь по существу правильнымъ, привелъ насъ, какъ уже было сказано, къ уравненію [80]. Послѣ подстановки въ это уравненіе параметра k^2, опредѣленнаго изъ уравненія [59] и выражаемаго формулою [82] мы получимъ „уравненіе 6-ой степени относительно x и y; кромѣ того уравненіе это будетъ заключать въ себѣ и всѣ убывающія степени неизвѣстныхъ“.

„Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что отысканіе точнаго геометрическаго мѣста точекъ пересѣченій сопряженныхъ хордъ для прямолинейно-производнаго шатунно-кривошипнаго механизма приводитъ насъ къ изслѣдованію уравненія шестой степени съ очень большимъ числомъ членовъ“. **)

Настоящая статья и является продолженіемъ и дальнѣйшей разработкой намѣченнаго пути.

Для того чтобы разложить уравненіе 6-ой степени, имѣющее быть полученнымъ, на произведеніе уравненій нисшихъ степеней, мы постараемся упростить уравненія линій, выражаемыхъ формулами [59] и [69].

Какъ намъ извѣстно,***) уравненіе [59] представляетъ собою поляру радикальнаго центра трехъ круговъ—кривошипнаго и двухъ шатунныхъ;—съ другой стороны мы знаемъ, что поляра радикальнаго центра всегда проходитъ черезъ полюсъ шатунной радикальной оси.

Слѣдовательно, если мы перейдемъ къ новой прямоугольной системѣ координатъ, оси которой параллельны осямъ прежней системы, а начало совпадаетъ съ полюсомъ шатунной радикальной оси, то уравненіе [59], изъ котораго въ дальнѣйшемъ мы должны опредѣлить вы-

*) Стр. 67 уравненіе [87].

**) См. стр 64.

***) Шатунный полюсъ—стр. 45.

раженіе для параметра k, будетъ имѣть болѣе простую форму, какъ уравненіе линіи, проходящей черезъ начало координатъ.

Координаты полюса шатунной радикальной оси въ прежней системѣ выражаются формулами [61]:

$$x_p = \frac{r^2}{n}, \quad y_p = -tg\,\vartheta\,\frac{r^2}{n}.$$

Такимъ образомъ, для перехода къ новой системѣ координатъ, мы имѣемъ формулы:

$$x' = x + \frac{r^2}{n} \text{ и } y' = y - tg\,\vartheta\,\frac{r^2}{n},$$

гдѣ x' и y' относятся къ прежней системѣ, а x и y къ новой.

Беремъ уравненіе поляры въ формѣ, выражаемой уравненіемъ [81]:

$$(m^2+k^2)x' + (m^2+k^2-2n^2)y'\operatorname{ctg}\vartheta - 2nr^2 = 0.$$

Преобразуемъ его, опираясь на формулы перехода къ новой системѣ.

Тогда получимъ:

$$(m^2+k^2)x + (m^2+k^2-2n^2)y\operatorname{ctg}\vartheta + (m^2+k^2)\frac{r^2}{n} -$$
$$-(m^2+k^2-2n^2)\frac{r^2}{n} - 2nr^2 = 0,$$

что по сокращеніи даетъ:

$$(m^2+k^2)x + (m^2+k^2-2n^2)y\operatorname{ctg}\vartheta = 0. \tag{1}$$

Переходимъ затѣмъ къ уравненію [69].

$$\left\{(m^2+k^2)(n^2+k^2) - 4n^2k^2\cos^2\vartheta)\right\}x' + \left\{(m^2+k^2)(k^2-n^2) +\right.$$
$$\left.+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)\right\}y'\operatorname{ctg}\vartheta + 2nR_1R_2 +$$
$$+\frac{n}{2}\left\{4n^2k^2\cos^2\vartheta - (m^2+k^2)^2\right\} = 0. \tag{69}$$

Преобразуя координаты, имѣемъ слѣдующее измѣненіе постояннаго члена:

$$\frac{r^2}{n}\left\{(m^2+k^2)(n^2+k^2) - 4n^2k^2\cos^2\vartheta\right\} - \frac{r^2}{n}\left\{(m^2+k^2)(k^2-n^2) +\right.$$
$$\left.+2n^2(n^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta)\right\} + \frac{n}{2}\left\{4n^2k^2\cos^2\vartheta - (m^2+k^2)^2\right\} +$$
$$+2nR_1R_2.$$

Дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ получаемъ:

$$2\,n\,r^2\,(m^2-n^2)+\frac{n}{2}\Big\{4\,n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2\Big\}+2\,n\,R_1\,R_2\,.$$

Вставляя полученное выраженіе въ уравненіе (69) и освобождаясь отъ знаменателя, имѣемъ:

$$\begin{gathered}2\Big\{(m^2+k^2)(n^2+k^2)-4\,n^2k^2\cos^2\vartheta\Big\}x+2\Big\{(m^2+k^2)(k^2-n^2)+\\+2\,n^2(n^2+k^2-2\,k^2\cos^2\vartheta)\Big\}y\operatorname{ctg}\vartheta+4\,n\,R_1\,R_2+4\,n\,r^2(m^2-n^2)+\\n\Big\{4\,n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2\Big\}=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Для того чтобы упростить уравненіе (2), помножаемъ уравненіе (1) на $-2\,(n^2+k^2)$ и складываемъ его съ уравненіемъ (2). Продѣлавъ это, получимъ новое уравненіе:

$$\begin{gathered}-8\,n^2k^2\,x\cos\vartheta-4\,n^2(m^2-2\,n^2-k^2+2\,k^2\cos^2\vartheta)\,y\operatorname{ctg}\vartheta+4\,n\,R_1\,R_2+\\+4\,n\,r^2\,(m^2-n^2)+n\Big\{4\,n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2\Big\}=0\end{gathered}\tag{3}$$

Помножимъ теперь уравненіе поляры (1) на $4\,n^2$ и сложимъ съ уравненіемъ (3). Въ результатѣ получимъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$\begin{gathered}4\,n\,(m^2-k^2\cos 2\,\vartheta)\,x+8\,n\,k^2y\cos\vartheta\sin\vartheta+4\,R_1\,R_2+4\,r^2(m^2-n^2)+\\+4\,n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Такимъ образомъ, вмѣсто уравненія (2) мы получили уравненіе (4), представляющее собою нѣкоторую прямую изъ пучка прямыхъ, проходящихъ черезъ ту же точку, черезъ которую проходятъ и прямыя линіи, выражаемыя уравненіями (1) и (2).

Слѣдовательно, для нахожденія геометрическаго мѣста мы можемъ манипулировать съ уравненіями (1) и (4).

Для еще большаго упрощенія дальнѣйшихъ дѣйствій мы найдемъ точку пересѣченія линій (1) и (4).

Обозначимъ сокращенно уравненія (1) и (4) такъ:

$$Ax+By+C=0,\tag{5}$$

$$A_1x+B_1y=0.\tag{6}$$

Тогда координаты точки пересѣченія этихъ линій будутъ:

$$x=-\frac{CB_1}{AB_1-BA_1}\ \text{ и }\ y=\frac{CA_1}{AB_1-BA_1}.\tag{6'}$$

Каждое изъ полученныхъ такимъ образомъ выраженій, взятое въ отдѣльности, представляетъ собою прямую линію, параллельную какой либо изъ осей и принадлежащую нашему пучку линій, при чемъ уравненія этихъ линій содержатъ только по одной величинѣ неизвѣстной.

Беремъ выраженіе для y. Будемъ имѣть уравненіе прямой параллельной оси x:

$$(AB_1 - BA_1)\,y = CA_1.$$

Подставляя вмѣсто величинъ A, B, C и т. д. ихъ значенія, получимъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій уравненіе слѣдующаго вида:

$$\begin{gathered}4n\left\{(m^2-k^2\cos 2\vartheta)(m^2+k^2-2n^2)-2k^2(m^2+k^2)\sin^2\vartheta\right\}y\operatorname{ctg}\vartheta-\\-(m^2+k^2)\left\{4r^2(m^2-n^2)+4n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2\right\}-\\-4(m^2+k^2)R_1R_2=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Упростимъ коэффиціентъ при y, раскрывая малыя скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ.

$$\begin{gathered}(m^2-k^2\cos 2\vartheta)(m^2+k^2-2n^2)-2k^2(m^2+k^2)\sin^2\vartheta=\\=(m^2+k^2)(m^2-k^2\cos 2\vartheta-2k^2\sin^2\vartheta)-2n^2(m^2-k^2\cos 2\vartheta),\end{gathered}$$

что даетъ далѣе:

$$\begin{gathered}(m^2+k^2)(m^2-k^2)-2n^2(m^2-k^2\cos 2\vartheta)=(m^2+k^2)(m^2-k^2)-\\-2n^2(m^2+k^2-2k^2\cos^2\vartheta),\end{gathered}$$

или, окончательно:

$$(m^2+k^2)(m^2-k^2-2n^2)+4n^2k^2\cos^2\vartheta.\tag{8}$$

Такимъ образомъ уравненіе (7) принимаетъ видъ:

$$\begin{gathered}4n\left\{(m^2+k^2)(m^2-k^2-2n^2)+4n^2k^2\cos^2\vartheta\right\}y\operatorname{ctg}\vartheta-\\-(m^2+k^2)\left\{4r^2(m^2-n^2)+4n^2k^2\cos^2\vartheta-(m^2+k^2)^2\right\}-\\-4(m^2+k^2)R_1R_2=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Прежде чѣмъ освободить уравненіе (9) отъ ирраціональности, преобразуемъ его, опираясь на значеніе множителя (m^2+k^2), опредѣляемое изъ уравненія (1).

Мы имѣемъ:

$$(m^2+k^2)\,x+(m^2+k^2-2n^2)\,y\operatorname{ctg}\vartheta=0.\tag{1}$$

Откуда:

$$m^2+k^2=\frac{2n^2y\operatorname{ctg}\vartheta}{x+y\operatorname{ctg}\vartheta}\tag{10}$$

и $$k^2 = -\frac{m^2 x - (2n^2 - m^2) y \operatorname{ctg} \vartheta}{x + y \operatorname{ctg} \vartheta}. \tag{11}$$

Подставляя въ уравненіе (9) выраженія (10) и (11), мы исключаемъ параметръ k изъ всѣхъ раціональныхъ членовъ уравненія, что даетъ намъ возможность, сдѣлавъ приведеніе подобныхъ, получить въ дальнѣйшемъ сравнительно менѣе сложныя выраженія.

Выполнивъ указанныя дѣйствія, послѣ освобожденія отъ знаменателя и нѣкоторыхъ сокращеній, мы получаемъ новое уравненіе, которому удобства ради придаемъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & -2nm^2\cos^2\vartheta + \\ + x^2 y \operatorname{ctg}\vartheta & 2n[m^2 - n^2 - (3m^2 - 2n^2)\cos^2\vartheta] + \\ + xy^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & 2n[2m^2 - 3n^2 - (3m^2 - 4n^2)\cos^2\vartheta] + \\ + y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & -2n(2n^2 - m^2)(1 - \cos^2\vartheta) + \\ + x^2 & m^2 n^2 \cos^2\vartheta - r^2(m^2 - n^2) + \\ + xy \operatorname{ctg}\vartheta & -2(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta) + \\ + y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & n^4 - r^2(m^2 - n^2) - (2n^2 - m^2)n^2\cos^2\vartheta \end{array}\right| = R_1 R_2 (x + y \operatorname{ctg}\vartheta)^2. \tag{12}$$

Теперь мы уничтожаемъ ирраціональность, возвышая въ квадратъ обѣ части уравненія (12).

Выпишемъ сюда значенія ирраціональныхъ величинъ R_1 и R_2 *)

$$R_1 = \sqrt{(n^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)\, r^2 - \frac{(m^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)^2}{4}},$$

$$R_2 = \sqrt{(n^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)\, r^2 - \frac{(m^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)^2}{4}}.$$

Произведеніе $R_1^2 R_2^2$, очевидно представляетъ собою произведеніе подкоренныхъ величинъ и будетъ имѣть видъ: **)

$$R_1^2 R_2^2 = [(n^2 + k^2)^2 - 4n^2k^2\cos^2\vartheta]\, r^4 -$$
$$- [(n^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)(m^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)^2 +$$
$$+ (n^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)(m^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)^2]\frac{r^2}{4} +$$
$$+ \frac{(m^2 + k^2 - 2nk\cos\vartheta)^2 (m^2 + k^2 + 2nk\cos\vartheta)^2}{16}.$$

---

*) Стр. 61.

**) Стр. 62.

Подставивъ въ полученное выраженіе значеніе k^2, опредѣляемое формулой (11) и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, мы получаемъ слѣдующее:

$$
R_1^2\,R_2^2 = \frac{1}{(x+y\operatorname{ctg}\vartheta)^4}
\left|\begin{array}{l|l}
x^4 & r^4(n^2-m^2)^2 + 4\,n^2m^2r^4\cos^2\vartheta - \\
 & \quad - 2\,r^2n^2m^2(m^2-n^2)\cos^2\vartheta + \\
 & \quad + n^4m^4\cos^4\vartheta \\
x^3y\operatorname{ctg}\vartheta & 4\,r^4(n^2-m^2)(2\,n^2-m^2) + \\
 & \quad + 8\,r^4n^2(2\,m^2-n^2)\cos^2\vartheta - \\
 & \quad - 4\,r^2n^2(n^4+2\,m^4-4\,m^2n^2)\cos^2\vartheta - \\
 & \quad - 8\,r^2m^2n^4\cos^2\vartheta + \\
 & \quad + 4\,n^4m^2(m^2-n^2)\cos^4\vartheta \\
x^2y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & r^4(3\,n^2-m^2)(7\,n^2-5\,m^2) + \\
 & + r^4(n^2-m^2)(n^2-m^2-24\,n^2\cos^2\vartheta) - \\
 & \quad - 2\,r^2n^4(n^2-m^2) - \\
 & - 4\,r^2n^2(5\,n^4+3\,m^4-9\,n^2m^2)\cos^2\vartheta + \\
 & \quad + 8\,r^2n^4(2\,n^2-3\,m^2)\cos^2\vartheta + \\
 & \quad + 4\,n^4(m^2-n^2)^2\cos^4\vartheta + \\
 & + 2\,m^2n^4[n^2-(2\,n^2-m^2)\cos^2\vartheta]\cos^2\vartheta \\
xy^3\operatorname{ctg}^3\vartheta & 4\,r^4(3\,n^2-m^2)(2\,n^2-m^2) - \\
 & \quad - 8\,r^4n^2(3\,n^2-2\,m^2)\cos^2\vartheta - \\
 & \quad - 4\,r^2n^4(2\,n^2-m^2) - \\
 & - 4\,r^2n^2(7\,n^4+2\,m^4-8\,n^2m^2)\cos^2\vartheta + \\
 & \quad + 8\,r^2n^4(4\,n^2-3\,m^2)\cos^2\vartheta + \\
 & + 4\,n^4(m^2-n^2)[n^2 - \\
 & \quad - (2\,n^2-m^2)\cos^2\vartheta]\cos^2\vartheta \\
y^4\operatorname{ctg}^4\vartheta & r^4(3\,n^2-m^2)^2-4\,r^4n^2(2\,n^2-m^2)\cos^2\vartheta - \\
 & - 2\,r^2n^2(3\,n^2-m^2)[n^2 + \\
 & \quad + (2\,n^2-m^2)\cos^2\vartheta] + \\
 & \quad + 8\,r^2n^4(2\,n^2-m^2)\cos^2\vartheta + \\
 & \quad + n^4[n^2-(2\,n^2-m^2)\cos^2\vartheta]^2
\end{array}\right.
\tag{13}
$$

Вернемся къ уравненію (12).

Назовемъ для сокращенія лѣвую часть уравненія буквою L. Послѣ возвышенія въ квадратъ обѣихъ частей уравненія мы будемъ имѣть:

$$L^2 = R_1^2\,R_2^2\,(x+y\operatorname{ctg}\vartheta)^4 \tag{14}$$

при чемъ L^2 представляетъ собою выраженіе слѣдующаго вида:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 & 4\,n^2 m^4 \cos^4\vartheta \\
x^5 y \operatorname{ctg}\vartheta & -\,8\,n^2 m^2\,[m^2 - n^2 - (3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]\cos^2\vartheta \\
x^4 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & 4\,n^2\,[m^2 - n^2 - (3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]^2 - \\
 & \qquad -\,8\,n^2 m^2\,[2\,m^2 - 3\,n^2 - (3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta]\cos^2\vartheta \\
x^3 y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & 8\,n^2 m^2 (2\,n^2 - m^2)(1 - \cos^2\vartheta)\cos^2\vartheta + 8\,n^2\,[m^2 - n^2 - \\
 & -(3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]\,[2\,m^2 - 3\,n^2 - (3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta] \\
x^2 y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & -\,8\,n^2(2\,n^2 - m^2)\,[m^2 - n^2 - (3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]\,(1 - \cos^2\vartheta) + \\
 & \qquad +\,4\,n^2\,[2\,m^2 - 3\,n^2 - (3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta]^2 \\
x y^5 \operatorname{ctg}^5\vartheta & -\,8\,n^2(2\,n^2 - m^2)(1 - \cos^2\vartheta)\,[2\,m^2 - 3\,n^2 - \\
 & \qquad\qquad -(3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta] \\
y^6 \operatorname{ctg}^6\vartheta & 4\,n^2(2\,n^2 - m^2)^2(1 - \cos^2\vartheta)^2 \\
x^5 & -\,4n\,m^2\,[m^2 n^2\cos^2\vartheta - r^2(m^2 - n^2)]\cos^2\vartheta \\
x^4 y \operatorname{ctg}\vartheta & 8\,n\,m^2(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta)\cos^2\vartheta + 4\,n\,[m^2 - n^2 - \\
 & \qquad -(3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]\,[m^2 n^2\cos^2\vartheta - r^2(m^2 - n^2)] \\
x^3 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & -\,4\,n\,m^2\cos^2\vartheta\,[n^4 - r^2(m^2 - n^2) - (2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta] - \\
 & -\,8\,n\,[m^2 - n^2 - (3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]\,(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta) + \\
 & +\,4\,n\,[m^2 n^2\cos^2\vartheta - r^2(m^2 - n^2)]\,[2\,m^2 - 3\,n^2 - \\
 & \qquad\qquad -(3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta] \\
x^2 y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & 4\,n\,[m^2 - n^2 - (3\,m^2 - 2\,n^2)\cos^2\vartheta]\,[n^4 - r^2(m^2 - n^2) - \\
 & \quad -(2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta] - 4\,n\,(2\,n^2 - m^2)\,[m^2 n^2\cos^2\vartheta - \\
 & -\,r^2(m^2 - n^2)]\,(1 - \cos^2\vartheta) - 8\,n\,(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta)\,[2\,m^2 - \\
 & \qquad -\,3\,n^2 - (3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta] \\
x y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & 8\,n\,(2\,n^2 - m^2)(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta)(1 - \cos^2\vartheta) + \\
 & \quad +\,4\,n\,[n^4 - r^2(m^2 - n^2) - (2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta]\,[2\,m^2 - \\
 & \qquad -\,3\,n^2 - (3\,m^2 - 4\,n^2)\cos^2\vartheta] \\
y^5 \operatorname{ctg}^5\vartheta & -\,4\,n\,(2\,n^2 - m^2)\,[n^4 - r^2(m^2 - n^2) - \\
 & \qquad\qquad -(2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta]\,(1 - \cos^2\vartheta) \\
x^4 & [m^2 n^2\cos^2\vartheta - r^2(m^2 - n^2)]^2 \\
x^3 y \operatorname{ctg}\vartheta & -\,4\,(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta)\,[m^2 n^2\cos^2\vartheta - r^2(m^2 - n^2)] \\
x^2 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & 4\,(m^2 - n^2)^2(r^2 - n^2\cos^2\vartheta)^2 + 2\,[m^2 n^2\cos^2\vartheta - \\
 & \quad -\,r^2(m^2 - n^2)]\,[n^4 - r^2(m^2 - n^2) - (2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta] \\
x y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & -\,4\,(m^2 - n^2)(r^2 - n^2\cos^2\vartheta)\,[n^4 - r^2(m^2 - n^2) - \\
 & \qquad\qquad -\,2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta] \\
y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & [n^4 - r^2(m^2 - n^2) - (2\,n^2 - m^2)\,n^2\cos^2\vartheta]^2
\end{array}
\tag{15}
$$

Вставляя въ уравненіе (14) полученныя нами выраженія (13) и (15), перенося всѣ члены въ одну часть, дѣлая соединеніе подобныхъ и располагая коэффиціенты при неизвѣстныхъ по степенямъ *cosinus*'а, мы получаемъ уравненіе, содержащее въ себѣ искомое нами геометрическое мѣсто, въ слѣдующемъ окончательномъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{r|r}
x^6 & n^2 m^4 \cos^4\vartheta \\
x^5 y \operatorname{ctg}\vartheta & -2n^2m^2(m^2-n^2)\cos^2\vartheta + 2n^2m^2(m^2-n^2)\cos^4\vartheta \\
x^4y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & n^2(m^2-n^2)^2 - 2n^2(5m^4-8n^2m^2+2n^4)\cos^2\vartheta + \\
 & + n^2(15m^4+4n^4-20m^2n^2)\cos^4\vartheta \\
x^3y^3\operatorname{ctg}^3\vartheta & 2n^2(m^2-n^2)(2m^2-3n^2) - 4n^2(5m^4-11m^2n^2+ \\
 & +5n^4)\cos^2\vartheta + 4n^2(5m^4-10m^2n^2+4n^4)\cos^4\vartheta \\
x^2y^4\operatorname{ctg}^4\vartheta & n^2(6m^4+13n^4-18m^2n^2) + 4n^2(14m^2n^2-5m^4- \\
 & -9n^4)\cos^2\vartheta + n^2(15m^4+24n^4-40m^2n^2)\cos^4\vartheta \\
xy^5\operatorname{ctg}^5\vartheta & -2n^2(2n^2-m^2)(2m^2-3n^2) + 2n^2(2n^2-m^2)(5m^2- \\
 & -7n^2)\cos^2\vartheta - 2n^2(2n^2-m^2)(3m^2-4n^2)\cos^4\vartheta \\
y^6\operatorname{ctg}^6\vartheta & n^2(2n^2-m^2)^2 - 2n^2(2n^2-m^2)^2\cos^2\vartheta + n^2(2n^2-m^2)^2\cos^4\vartheta \\
x^5 & n m^2 r^2(m^2-n^2)\cos^2\vartheta\, n^2 - n^3m^4\cos^4\vartheta \\
x^4y\operatorname{ctg}\vartheta & -nr^2(m^2-n^2)^2 + n(m^2-n^2)(5m^2r^2+m^2n^2-2r^2n^2)\cos^2\vartheta - \\
 & -m^2n^3(5m^2-4n^2)\cos^4\vartheta \\
x^3y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & -nr^2(m^2-n^2)(4m^2-5n^2) + 2n[2n^2m^2(m^2-2n^2) + \\
 & + n^4(n^2+4r^2) + r^2m^2(5m^2-9n^2)]\cos^2\vartheta - \\
 & -2n^3(5m^4-8m^2n^2+2n^4)\cos^4\vartheta \\
x^2y^3\operatorname{ctg}^3\vartheta & n(m^2-n^2)(n^4-6m^2r^2+9r^2n^2) + 2n[3n^2m^2(m^2-3n^2)+ \\
 & + n^4(5n^2+6r^2) + r^2m^2(5m^2-11n^2)]\cos^2\vartheta + \\
 & +2n^3(12m^2n^2-5m^4-6n^4)\cos^4\vartheta \\
xy^4\operatorname{ctg}^4\vartheta & n[r^2(m^2-n^2)(7n^2-4m^2)+2n^4(m^2-3n^2)] - \\
 & -n[2n^4(8m^2-7n^2) - m^2n^2(4m^2-13r^2) - \\
 & -r^2(5m^4+8n^4)]\cos^2\vartheta + n^3(2n^2-m^2)(5m^2-6n^2)\cos^4\vartheta \\
y^5\operatorname{ctg}^5\vartheta & -n(2n^2-m^2)(n^2-r^2)(n^2+r^2-2n^2\cos^2\vartheta)(1-\cos^2\vartheta) \\
x^4 & -r^4n^2m^2\cos^2\vartheta \\
x^3y\operatorname{ctg}\vartheta & r^4n^2(m^2-n^2) - r^2n^2(4r^2m^2-m^2n^2-2r^2n^2)\cos^2\vartheta \\
x^2y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & r^2n^2[n^2(n^2-4r^2)-m^2(n^2-3r^2)] + \\
 & + r^2n^2[3m^2(n^2-2r^2)-2n^2(n^2-3r^2)]\cos^2\vartheta \\
xy^3\operatorname{ctg}^3\vartheta & r^2n^2[n^2(3n^2-2m^2)+r^2(3m^2-5n^2)] + \\
 & + r^2n^2[n^2(3m^2-4n^2)+2r^2(3n^2-2m^2)]\cos^2\vartheta \\
y^4\operatorname{ctg}^4\vartheta & r^2n^2(n^2-r^2)(2n^2-m^2)(1-\cos^2\vartheta)
\end{array}\right| = 0 \qquad (16)$$

Вотъ это то уравненіе 6-ой степени намъ надо разложить на произведеніе уравненій нисшихъ степеней и затѣмъ опредѣлить, которое изъ нихъ представляетъ собою интересующее насъ геометрическое мѣсто.

Послѣ нѣкоторыхъ попытокъ я нашелъ, что удобнѣе всего представить уравненіе (16) въ видѣ произведенія двухъ уравненій: одного уравненія четвертой степени и одного—второй.

Разложеніе я веду слѣдующимъ путемъ. Возьмемъ въ общемъ видѣ два уравненія съ двумя неизвѣстными, указанныхъ выше порядковъ.

Мы будемъ имѣть:

$$A_1 x^4 + B_1 x^3 y + C_1 x^2 y^2 + D_1 x y^3 + E_1 y^4 + F_1 x^3 + G_1 x^2 y + H_1 x y^2 +$$
$$+ I_1 y^3 + K_1 x^2 + L_1 xy + M_1 y^2 + N_1 x + P_1 y + Q_1 = 0, \qquad (17)$$

$$A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0.\ ^{*)} \qquad (18)$$

Если мы, перемноживъ эти два уравненія, сдѣлаемъ соединеніе подобныхъ членовъ и составимъ при нихъ коэффиціенты, то у насъ получится уравненіе, заключающее въ себѣ неизвѣстные члены всѣхъ порядковъ начиная отъ 6-го и кончая нулевымъ.

Разсматривая же уравненіе (16) мы видимъ, что оно не заключаетъ въ себѣ неизвѣстныхъ членовъ порядка ниже четвертаго. Отсюда мы заключаемъ, что въ уравненіи четвертой степени общаго вида рядъ коэффиціентовъ равенъ нулю. Анализируя подобнымъ образомъ схемы коэффиціентовъ, полученнаго нами въ общемъ видѣ уравненія 6-ой степени, мы приходимъ къ заключенію, что коэффиціенты уравненія (17) при неизвѣстныхъ членахъ порядка ниже четвертаго должны быть равны нулю.

Такимъ образомъ мы получаемъ, что уравненіе (16) можетъ быть представлено какъ результатъ произведенія двухъ уравненій слѣдующаго вида:

$$A_1 x^4 + B_1 x^3 y + C_1 x^2 y^2 + D_1 x y^3 + E_1 y^4 = 0, \qquad (19)$$

$$A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \qquad (20)$$

Перемноженіе между собою этихъ двухъ уравненій даетъ намъ уравненіе 6-ой степени слѣдующаго вида:

$$\left|\begin{array}{c|l} x^6 & A_1 A_2 \\ x^5 y \operatorname{ctg}\vartheta & A_1 B_2 + B_1 A_2 \\ x^4 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & A_1 C_2 + B_1 B_2 + C_1 A_2 \\ x^3 y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & B_1 C_2 + C_1 B_2 + D_1 A_2 \\ x^2 y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & E_1 A_2 + D_1 B_2 + C_1 C_2 \\ x y^5 \operatorname{ctg}^5\vartheta & E_1 B_2 + D_1 C_2 \\ y^6 \operatorname{ctg}^6\vartheta & E_1 C_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|l} x^5 & A_1 D_2 \\ x^4 y \operatorname{ctg}\vartheta & A_1 E_2 + B_1 D_2 \\ x^3 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & B_1 E_2 + C_1 D_2 \\ x^2 y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & C_1 E_2 + D_1 D_2 \\ x y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & D_1 E_2 + E_1 D_2 \\ y^5 \operatorname{ctg}^5\vartheta & E_1 E_2 \end{array}\right| +$$

$$+ \left|\begin{array}{c|l} x^4 & A_1 F_2 \\ x^3 y \operatorname{ctg}\vartheta & B_1 F_2 \\ x^2 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & C_1 F_2 \\ x y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & D_1 F_2 \\ y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & E_1 F_2 \end{array}\right| = 0. \qquad (21)$$

---

*) При каждомъ y имѣется множитель $\operatorname{ctg}\vartheta$ въ соотвѣтственной степени, который для краткости здѣсь упущенъ, т. е. включенъ въ коэффиціенты B, C, D и т. д.

Разсматривая схемы коэффиціентовъ уравненія (21), мы видимъ прежде всего, что коэффиціентъ F_2 уравненія (20) является общимъ множителемъ пяти послѣднихъ членовъ уравненія (21), а такъ какъ это уравненіе должно представлять собою уравненіе (16), то мы и находимъ $F_2 = -n^2 r^2$. Знакъ минусъ беремъ, разсматривая коэффиціентъ при x^4 въ уравненіи (16), для того чтобы получить коэффиціентъ A_1 уравненія (19) съ знакомъ плюсъ.

Опредѣливъ F_2, мы тѣмъ самымъ можемъ опредѣлить изъ пяти послѣднихъ членовъ уравненія (16) всѣ коэффиціенты уравненія (19).

Согласно сказанному мы получимъ, что уравненіе (19) имѣетъ видъ:

$$\begin{array}{r|r|l|}
A_1 x^4 & x^4 & r^2 m^2 \cos^2 \vartheta \\
B_1 x^3 y \operatorname{ctg} \vartheta & x^3 y \operatorname{ctg} \vartheta & r^2(n^2 - m^2) + (4 r^2 m^2 - m^2 n^2 - 2 r^2 n^2) \cos^2 \vartheta \\
C_1 x^2 y^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta & x^2 y^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta & [m^2(n^2 - 3 r^2) - n^2(n^2 - 4 r^2)] - \\
 & = \qquad & -[3 m^2(n^2 - 2 r^2) - 2 n^2(n^2 - 3 r^2)] \cos^2 \vartheta \\
D_1 x y^3 \operatorname{ctg}^3 \vartheta & x y^3 \operatorname{ctg}^3 \vartheta & [n^2(2 m^2 - 3 n^2) - r^2(3 m^2 - 5 n^2)] - \\
 & & -[n^2(3 m^2 - 4 n^2) + 2 r^2(3 n^2 - 2 m^2)] \cos^2 \vartheta \\
E_1 y^4 \operatorname{ctg}^4 \vartheta & y^4 \operatorname{ctg}^4 \vartheta & (r^2 - n^2)(2 n^2 - m^2)(1 - \cos^2 \vartheta)
\end{array} = 0. \qquad (22)$$

Зная коэффиціенты уравненія (19) и (22) теперь нетрудно опредѣлить и коэффиціенты уравненія (20), опираясь на уравненія (21) и (16).

Въ уравненіи (21) мы видимъ, что коэффиціенты при x^6, y^6, x^5 и y^5 имѣютъ сравнительно простую форму, а потому мы и обратимся къ таковымъ же коэффиціентамъ уравненія (16).

Обратимся къ x^6.

$$A_1 A_2 x^6 = n^2 m^4 \cos^4 \vartheta.$$

Мы знаемъ уже, что $A_1 = r^2 m^2 \cos^2 \vartheta$, откуда

$$A_2 = \frac{n^2 m^2 \cos^2 \vartheta}{r^2}.$$

Для того чтобы въ дальнѣйшемъ не имѣть дѣла съ коэффиціентами въ видѣ алгебраическихъ дробей, преобразуемъ здѣсь же найденное нами значеніе коэффиціента A_2.

Мы знаемъ, что $m^2 = n^2 + r^2 - l^2$ *)

Съ другой стороны, мы имѣли ранѣе **) слѣдующую зависимость между всѣми элементами шатуннокривошипнаго механизма:

$$l r = n \sigma \cos \vartheta \qquad \text{и}$$

$$l^2 + r^2 = n^2 + \sigma^2.$$

*) См. Шатунный полюсъ стр. 55.

**) Шатун. полюсъ стр. 49.

На основаніи этого мы можемъ написать:

$$m^2 = r^2 + n^2 - l^2 = 2\,r^2 - \sigma^2.$$

Такимъ образомъ коэффиціентъ A_2 будетъ имѣть видъ:

$$A_2 = \frac{(2\,r^2 - \sigma^2)\,n^2 \cos^2 \vartheta}{r^2}$$ или

$$A_2 = \frac{2\,r^2 n^2 \cos^2 \vartheta - n^2 \sigma^2 \cos^2 \vartheta}{r^2},$$

что даетъ окончательно:

$$A_2 = 2\,n^2 \cos^2 \vartheta - l^2. \qquad (23)$$

Переходя къ y^6 имѣемъ:

$$E_1 C_2 y^6 = y^6 \operatorname{ctg}^6 \vartheta \,\Big|\, n^2 (2\,n^2 - m^2)^2 - 2\,n^2 (2\,n^2 - m^2)^2 \cos^2 \vartheta + \\ + n^2 (2\,n^2 - m^2)^2 \cos^4 \vartheta.$$

Коэффиціентъ при $y^6 \operatorname{ctg}^6 \vartheta$ можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$E_1 C_2 y^6 = y^6 \operatorname{ctg}^6 \vartheta \,|\, n^2 (2\,n^2 - m^2)^2 (1 - \cos^2 \vartheta)^2.$$

Отсюда мы получимъ значеніе коэффиціента C_2:

$$C_2 = \frac{n^2 (2\,n^2 - m^2)^2 (1 - \cos^2 \vartheta)^2}{E_1}$$

или, такъ какъ $E_1 = (r^2 - n^2)(2\,n^2 - m^2)(1 - \cos^2 \vartheta)$,

$$C_2 = \frac{n^2 (2\,n^2 - m^2)}{r^2 - n^2} (1 - \cos^2 \vartheta).$$

Преобразуемъ это выраженіе, дабы не имѣть алгебраическихъ дробей.

Опираясь на различныя обозначенія величины m^2, мы можемъ написать:

$$C_2 = \frac{n^2 (2\,n^2 - m^2)}{r^2 - n^2} - \frac{n^2 (2\,n^2 - m^2)}{r^2 - n^2} \cos^2 \vartheta$$ или

$$C_2 = \frac{n^2 (2\,n^2 - n^2 - r^2 + l^2)}{r^2 - n^2} - \frac{n^2 (2\,n^2 - 2\,r^2 + \sigma^2) \cos^2 \vartheta}{r^2 - n^2};$$

что даетъ намъ:

$$C_2 = \frac{n^2 (n^2 - r^2) + n^2 l^2 - 2\,n^2 (n^2 - r^2) \cos^2 \vartheta - n^2 \sigma^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 - n^2}.$$

Такъ какъ $n^2\sigma^2\cos^2\vartheta = r^2 l^2$, мы имѣемъ:

$$C_2 = \frac{n^2(n^2 - r^2) + l^2(n^2 - r^2) - 2n^2(n^2 - r^2)\cos^2\vartheta}{r^2 - n^2}$$

или, окончательно:

$$C_2 = 2n^2\cos^2\vartheta - (n^2 + l^2). \tag{24}$$

Переходимъ къ коэффиціенту x^5 уравненія (16):

$$x^5[n m^2 r^2 (m^2 - n^2)\cos^2\vartheta - n^3 m^4 \cos^4\vartheta] = A_1 D_2 x^5.$$

Такъ какъ $A_1 = r^2 m^2 \cos^2\vartheta$, то мы приводимъ наше выраженіе къ виду, дѣлящемуся на эту величину, опираясь на ранѣе выведенное значеніе $m^2 = 2r^2 - \sigma^2$.

Откуда: $n^2 m^2\cos^2\vartheta = n^2(2r^2 - \sigma^2)\cos^2\vartheta$, что по раскрытіи скобокъ и подстановкѣ вмѣсто $n^2\sigma^2\cos^2\vartheta$ равной ей величины $r^2 l^2$ даетъ намъ: $n^2 m^2\cos^2\vartheta = r^2(2n^2\cos^2\vartheta - l^2)$.

Такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$A_1 D_2 = n m^2 r^2 (m^2 - n^2)\cos^2\vartheta - n r^2 (2n^2\cos^2\vartheta - l^2) m^2 \cos^2\vartheta.$$

Откуда:

$$D_2 = \frac{m^2 r^2 n \cos^2\vartheta[m^2 - n^2 + l^2 - 2n^2\cos^2\vartheta]}{A_1},$$

или, такъ какъ $m^2 = n^2 + r^2 - l^2$:

$$D_2 = \frac{n m^2 r^2 \cos^2\vartheta (r^2 - 2n^2\cos^2\vartheta)}{m^2 r^2 \cos^2\vartheta} = n(r^2 - 2n^2\cos^2\vartheta). \tag{25}$$

Обращаясь къ $y^5\operatorname{ctg}^5\vartheta$, мы имѣемъ:

$$y^5\operatorname{ctg}^5\vartheta[-n(2n^2 - m^2)(n^2 - r^2)(n^2 + r^2 - 2n^2\cos^2\vartheta)(1 - \cos^2\vartheta)] =$$
$$= E_1 E_2 y^5 \operatorname{ctg}^5\vartheta.$$

Такъ какъ

$E_1 = (r^2 - n^2)(2n^2 - m^2)(1 - \cos^2\vartheta)$ то, очевидно, что

$$E_2 = n(n^2 + r^2 - 2n^2\cos^2\vartheta). \tag{26}$$

Для опредѣленія коэффиціента B_2 мы обратимся въ уравненіи (16) къ члену съ $x^5 y \operatorname{ctg}\vartheta$.

По уравненію (21) мы знаемъ, что схема коэффиціента этого члена такова:

$$x^5 y \operatorname{ctg}\vartheta[A_1 B_2 + B_1 A_2].$$

Такъ какъ A_1, A_2 и B_1 нами уже опредѣлены, то отысканіе значенія B_2 не представляетъ уже трудности.

Составимъ произведеніе извѣстныхъ намъ величинъ A_2 и B_1.

$$A_2 B_1 = (2 n^2 \cos^2 \vartheta - l^2) [r^2 (n^2 - m^2) + (4 r^2 m^2 - m^2 n^2 - 2 r^2 n^2) \cos^2 \vartheta].$$

Для упрощенія дальнѣйшихъ дѣйствій преобразуемъ коэффиціентъ B_1 такъ:

$B_1 = r^2 (n^2 - m^2) + [4 r^2 m^2 - n^2 (m^2 + 2 r^2)] \cos^2 \vartheta$, что даетъ намъ далѣе:

$$B_1 = r^2 (n^2 - m^2) + [4 r^2 m^2 - n^2 (4 r^2 - \sigma^2)] \cos^2 \vartheta, \qquad \text{или,}$$

$$B_1 = r^2 (n^2 - m^2) + n^2 \sigma^2 \cos^2 \vartheta + 4 r^2 (m^2 - n^2) \cos^2 \vartheta,$$

откуда:

$B_1 = r^2 (n^2 - m^2 + l^2) + 4 r^2 (m^2 - n^2)$ или окончательно:

$$B_1 = r^2 (2 l^2 - r^2) + 4 r^2 (m^2 - n^2) \cos^2 \vartheta.$$

Такимъ образомъ $A_2 B_1$ принимаетъ видъ:

$$A_2 B_1 = (2 n^2 \cos^2 \vartheta - l^2) [r^2 (2 l^2 - r^2) + 4 r^2 (m^2 - n^2) \cos^2 \vartheta].$$

Перемножая почленно получаемъ:

$$A_2 B_1 = r^2 (2 n^2 \cos^2 \vartheta - l^2) (2 l^2 - r^2) + 4 r^2 (2 n^2 \cos^2 \vartheta - l^2) (m^2 - n^2) \cos^2 \vartheta.$$

Мы нашли ранѣе при выводѣ коэффиціента D_2, что $n^2 m^2 \cos^2 \vartheta = = r^2 (2 n^2 \cos^2 \vartheta - l^2)$; слѣдовательно, произведенію $A_2 B_1$ можетъ быть придана слѣдующая форма:

$$A_2 B_1 = (2 l^2 - r^2) n^2 m^2 \cos^2 \vartheta + 4 (m^2 - n^2) m^2 n^2 \cos^4 \vartheta.$$

Вычитая это выраженіе изъ коэффиціента при $x^5 y \operatorname{ctg} \vartheta$ уравненія (16) мы получаемъ:

$$A_1 B_2 = - 2 n^2 m^2 (m^2 - n^2) \cos^2 \vartheta + 2 n^2 m^2 (3 m^2 - 2 n^2) \cos^4 \vartheta - \\ - (2 l^2 - r^2) n^2 m^2 \cos^2 \vartheta - 4 (m^2 - n^2) m^2 n^2 \cos^4 \vartheta,$$

что послѣ приведенія подобныхъ членовъ принимаетъ видъ:

$$A_1 B_2 = - r^2 n^2 m^2 \cos^2 \vartheta + 2 n^2 m^4 \cos^4 \vartheta.$$

Подставивъ во второй членъ вмѣсто m^2 равную величину $2 r^2 - \sigma^2$, мы преобразуемъ наше выраженіе такъ:

$$A_1 B_2 = - r^2 n^2 m^2 \cos^2 \vartheta + 2 n^2 m^2 (2 r^2 - \sigma^2) \cos^4 \vartheta \qquad \text{или,}$$

$$A_1 B_2 = - r^2 n^2 m^2 \cos^2 \vartheta + 4 r^2 n^2 m^2 \cos^4 \vartheta - 2 m^2 n^2 \sigma^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta,$$

откуда, окончательно получаемъ:

$$A_1 B_2 = 4\, r^2 n^2 m^2 \cos^4 \vartheta - r^2 m^2 (n^2 + 2\, l^2) \cos^2 \vartheta.$$

Теперь легко опредѣлить величину коэффиціента B_2.

$$B_2 = \frac{4\, r^2 n^2 m^2 \cos^4 \vartheta - r^2 m^2 (n^2 + 2\, l^2) \cos^2 \vartheta}{A_1}.$$

Подставляя сюда вмѣсто A_1, равную ему величину $A_1 = r^2 m^2 \cos^2 \vartheta$, имѣемъ значеніе коэффиціента B_2:

$$B_2 = 4\, n^2 \cos^2 \vartheta - (2\, l^2 + n^2). \tag{27}$$

Такимъ образомъ у насъ опредѣлены всѣ коэффиціенты уравненія (20).

Составляя, далѣе, по схемѣ уравненія (21) коэффиціенты для остальныхъ степеней x и y и приравнивая ихъ къ коэффиціентамъ уравненія (16), мы во всѣхъ случаяхъ получаемъ тождества, что и является доказательствомъ правильности нашихъ дѣйствій.

Итакъ уравненіе (16) шестого порядка относительно x и y разлагается на произведеніе двухъ уравненій второй и четвертой степени.

Выпишемъ сюда оба найденныя уравненія:

$$\left.\begin{array}{r|l|}
x^4 & r^2 m^2 \cos^2 \vartheta \\
x^3 y \operatorname{ctg}\vartheta & r^2 (n^2 - m^2) + (4\, r^2 m^2 - m^2 n^2 - 2 r^2 n^2) \cos^2 \vartheta \\
x^3 y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & [m^2 (n^2 - 3\, r^2) - n^2 (n^2 - 4\, r^2)] - \\
 & \quad - [3\, m^2 (n^2 - 2\, r^2) - 2\, n^2 (n^2 - 3\, r^2)] \cos^2 \vartheta \\
x y^3 \operatorname{ctg}^3\vartheta & [n^2 (2 m^2 - 3\, n^2) - r^2 (3\, m^2 - 5\, n^2)] - \\
 & \quad - [n^2 (3\, m^2 - 4\, n^2) + 2\, r^2 (3\, n^2 - 2\, m^2)] \cos^2 \vartheta \\
y^4 \operatorname{ctg}^4\vartheta & (r^2 - n^2)(2\, n^2 - m^2)(1 - \cos^2 \vartheta)
\end{array}\right. = 0, \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{r|l|}
x^2 & 2\, n^2 \cos^2 \vartheta - l^2 \\
x y \operatorname{ctg}\vartheta & 4\, n^2 \cos^2 \vartheta - (2\, l^2 + n^2) \\
y^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta & 2\, n^2 \cos^2 \vartheta - (l^2 + n^2) \\
x & n (r^2 - 2\, n^2 \cos^2 \vartheta) \\
y \operatorname{ctg}\vartheta & n (r^2 + n^2 - 2\, n^2 \cos^2 \vartheta) \\
x^0 & - n^2 r^2
\end{array}\right. = 0. \tag{28}$$

Теперь намъ надо опредѣлить, которое изъ этихъ двухъ уравненій является искомымъ геометрическимъ мѣстомъ.

Для этого мы вспомнимъ, что у насъ имѣется одна, найденная ранѣе, точка, принадлежащая геометрическому мѣсту; точка эта опредѣляется формулами (65) *) имѣющими видъ:

$$x = \frac{r^2 + n^2 - l^2}{2n} \text{ и } y = \frac{(l^2 - r^2 - n^2)^2 - 4n^2r^2}{2n(l^2 - r^2 + n^2)\operatorname{ctg}\vartheta}.$$

Такъ какъ $r^2 + n^2 - l^2 = m^2$, то этимъ формуламъ мы придаемъ слѣдующій видъ:

$$x = \frac{m^2}{2n}, \quad y = \frac{m^4 - 4n^2r^2}{2n(2n^2 - m^2)\operatorname{ctg}\vartheta}.$$

Выраженія эти найдены въ прежней системѣ координатъ; намъ надо ихъ преобразовать для новой системы.

Формулы перехода, указанныя въ началѣ настоящей статьи, таковы:

$$x' = x + \frac{r^2}{n} \quad \text{и} \quad y' = y - \operatorname{tg}\vartheta\,\frac{r^2}{n}.$$

Слѣдовательно координаты контрольной точки въ новой системѣ будутъ:

$$x = \frac{m^2}{2n} - \frac{r^2}{n} = \frac{m^2 - 2r^2}{2n},$$

$$y = \frac{m^4 - 4n^2r^2}{2n(2n^2 - m^2)\operatorname{ctg}\vartheta} + \frac{r^2}{n\operatorname{ctg}\vartheta} = \frac{m^4 - 4n^2r^2 + 2r^2(2n^2 - m^2)}{2n(2n^2 - m^2)\operatorname{ctg}\vartheta}.$$

Такъ какъ $m^2 = 2r^2 - \sigma^2$, то мы получаемъ:

$$x = -\frac{\sigma^2}{2n} \text{ и } y = -\frac{m^2\sigma^2}{2n(2n^2 - m^2)\operatorname{ctg}\vartheta}. \tag{29}$$

Подставляя въ уравненіе (28) значенія величинъ x и y, опредѣляемыя формулами (29), мы имѣемъ:

$$\frac{\sigma^4}{4n^2}(2n^2\cos^2\vartheta - l^2) + \frac{\sigma^4 m^2}{4n^2(2n^2 - m^2)}(4n^2\cos^2\vartheta - 2l^2 - n^2) +$$

$$+ \frac{\sigma^4 m^4}{4n^2(2n^2 - m^2)^2}(2n^2\cos^2\vartheta - l^2 - n^2) - \frac{\sigma^2}{2}(r^2 - 2n^2\cos^2\vartheta) -$$

$$- \frac{\sigma^2 m^2}{2(2n^2 - m^2)}(r^2 + n^2 - 2n^2\cos^2\vartheta) - n^2r^2 = 0,$$

что по освобожденіи отъ знаменателя, приведенія подобныхъ чле-

---

*) См. Шатунный полюсъ, стр. 57.

новъ и подстановка вмѣсто m^2 величины ей равной $(2\,r^2 - \sigma^2)$, принимаетъ видъ:

$$\sigma^2 l^2 - 2\,n^2 \sigma^2 + 2\,r^2 \sigma^2 - \sigma^4 + n^2 l^2 - r^2 l^2 - n^4 + 2\,n^2 r^2 - r^4 = 0.$$

Разлагая на множители, мы получаемъ:

$$-(n^2 + \sigma^2)^2 + l^2 (n^2 + \sigma^2) + 2\,r^2 (n^2 + \sigma^2) - r^2 (l^2 + r^2) = 0.$$

Такъ какъ $l^2 + r^2 = n^2 + \sigma^2$, то мы производимъ сокращеніе, послѣ котораго получаемъ:

$$-(n^2 + \sigma^2) + l^2 + 2\,r^2 - r^2 = 0, \qquad \text{или}$$

$l^2 + r^2 = n^2 + \sigma^2$, откуда видимъ, что уравненіе (28) вполнѣ удовлетворяется координатами контрольной точки.

Переходимъ къ уравненію (22).

Подстановка величинъ x и y по формуламъ (29) даетъ:

$$\frac{\sigma^8}{(2\,n)^4} \cdot r^2 m^2 \cos^2\vartheta + \frac{\sigma^8}{(2\,n)^4} \cdot \frac{m^2}{2n^2 - m^2} [r^2 (n^2 - m^2) + (4\,r^2 m^2 - m^2 n^2 -$$

$$-2\,r^2 n^2) \cos^2\vartheta] + \frac{\sigma^8}{2\,n^4} \cdot \frac{m^2}{(2\,n^2 - m^2)^2} \Big\{ m^2 (n^2 - 3\,r^2) - n^2 (n^2 - 4\,r^2) -$$

$$-[3\,m^2 (n^2 - 2\,r^2) - 2\,n^2 (n^2 - 3\,r^2)] \cos^2\vartheta \Big\} +$$

$$+ \frac{\sigma^8}{2\,n^4} \cdot \frac{m^6}{(2\,n^2 - m^2)^3} \Big\{ n^2 (2\,m^2 - 3\,n^2) - r^2 (3\,m^2 - 5\,n^2) -$$

$$-[n^2 (3\,m^2 - 4\,n^2) + 2\,r^2 (3\,n^2 - 2\,m^2)] \cos^2\vartheta \Big\} +$$

$$+ \frac{\sigma^8}{2\,n^4} \cdot \frac{m^8}{(2\,n^2 - m^2)^4} (r^2 - n^2)(2\,n^2 - m^2)(1 - \cos^2\vartheta) = 0.$$

Производя сокращеніе и приведеніе къ одному знаменателю мы получаемъ:

$$r^2 (2\,n^2 - m^2)^3 \cos^2\vartheta + (2\,n^2 - m^2)^2 [r^2 (n^2 - m^2) + (4\,r^2 m^2 - m^2 n^2 - 2 r^2 n^2) \cos^2\vartheta] +$$

$$+ m^2 (2\,n^2 - m^2) \Big\{ m^2 (n^2 - 3\,r^2) - n^2 (n^2 - 4\,r^2) - [3\,m^2 (n^2 - 2\,r^2) -$$

$$-2\,n^2 (n^2 - 3\,r^2)] \cos^2\vartheta \Big\} + m^4 \Big\{ n^2 (2\,m^2 - 3\,n^2) - r^2 (3\,m^2 - 5\,n^2) -$$

$$-[n^2 (3\,m^2 - 4\,n^2) + 2\,r^2 (3\,n^2 - 2\,m^2)] \cos^2\vartheta \Big\} + m^6 (r^2 - n^2)(1 - \cos^2\vartheta) = 0.$$

Раскрывая скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ мы получаемъ въ результатѣ:

$$-2\,n^6 (m^2 - 2\,r^2) = 0, \qquad \text{или}$$

$2n^6\sigma^2 = 0$, что очевидно невозможно, такъ какъ n и σ представляютъ собою конечныя величины.

Итакъ уравненіе (22) не удовлетворяется значеніями координатъ контрольной точки и, слѣдовательно, не представляетъ собою искомаго геометрическаго мѣста, уравненіе же (28), какъ мы видѣли, обратилось въ тождество.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія сопряженныхъ хордъ для криволинейно производнаго шатунно-кривошипнаго механизма выражается уравненіемъ второй степени.

Изслѣдуемъ геометрическое значеніе этого уравненія. Напишемъ его въ общемъ видѣ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія имѣетъ видъ:

$$\triangle = 2(4ACF - AE^2 - CD^2 + BDE - B^2F).$$

Опредѣлимъ значеніе дискриминанта, опираясь на слѣдующую зависимость между коэффиціентами уравненія (28):

$$\begin{aligned}
A &= 2n^2\cos^2\vartheta - l^2,\\
B &= (4n^2\cos^2\vartheta - 2l^2 - n^2)\operatorname{ctg}\vartheta = (2A - n^2)\operatorname{ctg}\vartheta,\\
C &= (2n^2\cos^2\vartheta - l^2 - n^2)\operatorname{ctg}^2\vartheta = (A - n^2)\operatorname{ctg}^2\vartheta,\\
D &= n(r^2 - 2n^2\cos^2\vartheta),\\
E &= n(r^2 + n^2 - 2n^2\cos^2\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta = (D + n^3)\operatorname{ctg}\vartheta,\\
F &= -n^2r^2.
\end{aligned}$$

Такимъ образомъ имѣемъ, преобразуя сперва дискриминантъ:

$$\triangle = 2\left\{C(4AF - D^2) + E(BD - AE) - B^2F\right\}$$ или подставляя:

$$\triangle = 2\left\{\operatorname{ctg}^2\vartheta(A - n^2)(4AF - D^2) + \operatorname{ctg}\vartheta(D + n^3)[\operatorname{ctg}\vartheta(2A - n^2)D - \right.$$
$$\left. - \operatorname{ctg}\vartheta\, A(D + n^3)] - \operatorname{ctg}^2\vartheta(2A - n^2)^2F\right\}.$$

Производя дѣйствія получимъ:

$$\triangle = 2n^4\operatorname{ctg}^2\vartheta(-An^2 - Dn - F).$$

Подставимъ значенія коэффиціентовъ A, D и F.

$$-(An^2 + Dn + F) = -(2n^4\cos^2\vartheta - n^2l^2 + n^2r^2 - 2n^4\cos^2\vartheta - n^2r^2,$$

или окончательно:

$\triangle = 2n^6 l^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta$, что представляетъ собою величину большую чѣмъ нуль. Итакъ $\triangle > 0$.

Опредѣлимъ теперь значеніе выраженія:

$$H = B^2 - 4AC.$$
$$H = \operatorname{ctg}^2\vartheta\,[(2A - n^2)^2 - 4A(A - n^2)].$$

Раскрывая скобки имѣемъ:

$$H = \operatorname{ctg}^2\vartheta\,[4A^2 + n^4 - 4An^2 - 4A^2 + 4An^2],$$ или
$$H = n^4 \operatorname{ctg}^2\vartheta > 0.$$

Итакъ уравненіе (28) представляетъ собою гиперболу.

Вернемся теперь къ прежней системѣ координатъ, подставляя вмѣсто x и y соотвѣтственныя величины:

$$x = x' - \frac{r^2}{n} \text{ и } y = y' + \operatorname{tg}\vartheta\,\frac{r^2}{n} \text{ (смотри стр. 3).}$$

Послѣ выполненія всѣхъ дѣйствій мы получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left.\begin{array}{r|l} x'^2 & 2n^2\cos^2\vartheta - l^2 \\ x'y'\operatorname{ctg}\vartheta & 4n^2\cos^2\vartheta - 2l^2 - n^2 \\ y'^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & 2n^2\cos^2\vartheta - l^2 - n^2 \\ x' & -2n^3\cos^2\vartheta \\ y'\operatorname{ctg}\vartheta & -n^3\cos 2\vartheta. \end{array}\right. \qquad (30)$$

Откуда мы видимъ, что найденная нами гипербола проходитъ черезъ центръ кривошипной окружности—начало координатъ прежней системы.

Уравненію (30) мы можемъ придать слѣдующій болѣе компактный видъ (опуская какъ ненужные теперь штрихи при неизвѣстныхъ):

$$\begin{array}{r|l|} x^2 & 2n^2\cos^2\vartheta \\ xy\operatorname{ctg}\vartheta & n^2(4\cos^2\vartheta - 1) \\ y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & n^2(2\cos^2\vartheta - 1) \\ x & -2n^3\cos^2\vartheta \\ y\operatorname{ctg}\vartheta & -n^3\cos 2\vartheta \end{array} = \begin{array}{c|l} x^2 & l^2 \\ xy\operatorname{ctg}\vartheta & 2l^2 \\ y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & l^2 \end{array}$$

или иначе:

$$\begin{array}{r|l|} x^2 & 2\cos \\ xy\operatorname{ctg}\vartheta & 2\cos^2\vartheta + \cos 2\vartheta \\ y^2\operatorname{ctg}^2\vartheta & \cos 2\vartheta \\ x & -2n\cos^2\vartheta \\ y\operatorname{ctg}\vartheta & -n\cos 2\vartheta \end{array} = \frac{l^2}{n^2}(x + y\operatorname{ctg}\vartheta)^2,$$

что даетъ далѣе:

$$(x + y \operatorname{ctg} \vartheta - n)(x \,.\, 2\cos^2 \vartheta + y \operatorname{ctg} \vartheta \cos 2\vartheta) = \frac{l^2}{n^2}(x + y \operatorname{ctg} \vartheta)^2,$$

откуда имѣемъ окончательно:

$$(x + y \operatorname{ctg} \vartheta - n)(x \sin 2\vartheta + y \cos 2\vartheta) = \frac{l^2 (x + y \operatorname{ctg} \vartheta)^2}{n^2 \operatorname{ctg} \vartheta}. \qquad (31)$$

Въ заключеніе замѣтимъ что, подставляя въ найденное нами уравненіе геометрическаго мѣста координаты точки, опредѣляемой формулами (61) на страницѣ 54-ой „Шатуннаго полюса“, мы не получаемъ тождества.

Это показываетъ намъ, что хотя указанная точка и удовлетворяетъ условію полярности, но она не представляетъ собою точки пересѣченія сопряженныхъ хордъ для разсмотрѣннаго предѣльнаго случая и, слѣдовательно, всѣ выводы, основанные на значеніяхъ координатъ этой точки, являлись неправильными, какъ напр. числовой выводъ въ концѣ шестой главы.