



ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Колесников Олег Валерьевич

**РЕШЕНИЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ПЯТИ ТЕЛ ДЛЯ СИСТЕМЫ η -4N**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.04.16 – Физика атомного ядра и элементарных частиц

Томск – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

Научный руководитель:

Фикс Александр Иванович

доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования Томский политехнический
университет, профессор Исследовательской
школы физики высокоэнергетических процессов

Официальные оппоненты:

Левчук Михаил Иванович

доктор физико-математических наук,
Государственное научное учреждение
Институт физики имени Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
главный научный сотрудник

Казинский Петр Олегович

доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования Томский государственный
университет, профессор кафедры квантовой
теории поля

Защита состоится 8.09.2022 в _____ часов на заседании диссертационного совета ДС.ТПУ.05 Национального исследовательского Томского политехнического университета по адресу: 634050, г. Томск, проспект Ленина, 2, стр. 11 ауд. 326.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Томского политехнического университета и на сайте dis.tpu.ru.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2022

Ученый секретарь
диссертационного совета ДС.ТПУ.05
к.ф.-м.н.



М.В. Шевелев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Интенсивный экспериментальный поиск связанных состояний η -мезонов и ядер (η -ядер) пока не дал однозначного ответа на вопрос о существовании этих объектов. Основным результатом подавляющего большинства проведенных экспериментов является отсутствие полезного сигнала, что в некоторых случаях позволило установить лишь верхнюю границу сечения образования η -ядер. Общий качественный вывод, который может быть сделан на основе накопленного сегодня экспериментального материала: несмотря на кажущуюся простоту самой физической картины, связанной с динамикой η -ядер, а также многочисленные указания различных моделей на возможность образования этих объектов, имеющиеся прецизионные данные пока не подтверждают гипотезу их существования.

В области теории построено довольно большое число моделей для описания η -ядерного взаимодействия в пределах 10-20 МэВ выше порога образования η -мезонов. Значительная часть этих моделей использует концепцию оптического потенциала, основанного на применении так называемого локального и импульсного приближений к описанию взаимодействия налетающей частицы (мезона) с системой рассеивателей (нуклонов). В рамках этих приближений мезон-ядерное взаимодействие рассматривается в терминах взаимодействия мезона с ядерной материей, выступающей в качестве преломляющей среды для мезонной волны. При рассмотрении пион-ядерного рассеяния физическим обоснованием такого приближения является сравнительно большая величина межнауклонного расстояния в ядрах, значительно превышающая характерный радиус взаимодействия между пионом и нуклоном.

В то же время, существенно резонансный характер ηN взаимодействия приводит к тому, что, как импульсное, так и локальное приближение в случае с η -мезоном становятся неприменимыми. Вследствие того, что резонансное взаимодействие связано с временной задержкой (то есть, промежуток времени, в течение которого η -мезон взаимодействует с нуклоном, не является пренебрежимо малым, как в случае с пионом, а определяется временем жизни резонанса), амплитуда ηN рассеяния может претерпевать значительные изменения в ядерном многотельном окружении. Это ставит под сомнение корректность оптического подхода в применении к η -ядерным процессам.

Необходимо отметить так называемое приближение конечного ранга (finite-rank approximation), которое также использовалось в некоторых работах. Его суть заключается в пренебрежении вкладом виртуальных возбуждений ядерной подсистемы, возникающих между двумя последовательными актами столкновения мезона с нуклонами ядра. Наряду с оптической моделью такой подход позволяет существенно упростить исходную многотельную задачу и фактически сводит ее к задаче двух тел. Вместе с тем, исключение из спектра возбужденных состояний с неизбежностью приводит к нарушению условия уни-

тарности S -матрицы. При этом сама модель не позволяет оценить эффект, связанный с этим нарушением.

Принципиально иной метод описания связанных η -ядерных систем основан на вариационной формулировке проблемы. Основной недостаток вариационного метода в применении к η -ядерному взаимодействию связан с необходимостью выбора эффективной энергии, при которой η -мезон взаимодействует с отдельным ядерным нуклоном или, другими словами, выбора значения аргумента E амплитуды ηN взаимодействия $f_{\eta N}(E)$, которая явно входит в выражение для потенциала. Модель, вообще говоря, не дает определенного правила для нахождения значения энергии E . Существуют различные способы выбора E , основанные на разумных, как правило, чисто умозрительных соображениях, но все они являются эвристическими, так что использование того или иного рецепта в качестве наиболее предпочтительного не имеет строгого обоснования.

Вторым важным аспектом, связанным с динамикой η -мезонов и ядер, является возможность извлечения из экспериментальных данных информации о взаимодействии η -мезона с нуклоном. Ввиду невозможности создания пучков η -мезонов, непосредственное экспериментальное наблюдение ηN -рассеяния оказывается невозможным. По этой причине, информация об этом процессе извлекается косвенным образом из реакций образования η на ядрах. Основным объектом исследования здесь является эффект увеличения интенсивности реакции в области малых энергий вследствие притягивающего характера ηN взаимодействия. Степень роста сечения и форма пика является основным критерием, по которому можно определить особенности η -ядерного и, как следствие, элементарного ηN рассеяния. Последний этап предполагает, что используемая в анализе теория включает элементарное ηN взаимодействие с минимальной степенью модельной неопределенности. В идеальном случае это должно быть точное решение соответствующего многочастичного уравнения Липпмана-Швингера без использования каких-либо плохо контролируемых приближений. Представленные выше подходы, основанные на тех или иных приближениях, влияние которых сложно оценить не только на количественном, но даже и на качественном уровне, оказываются непригодными для этой цели.

Необходимость создания модели для описания взаимодействия η -мезона с малонуклонными ядрами, свободной от недостатков, присущих упомянутым выше подходам, определяет **актуальность** темы диссертации.

Представленный в работе систематический подход к решению задачи о взаимодействии η -мезона с малонуклонными системами, основан на формализме Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС). Он лишен принципиальных недостатков, характерных для описанных выше приближенных методов, и позволяет найти точное решение как для связанных основных и возбужденных состояний, так и для задачи рассеяния. Одним из существенных достоинств метода является его наглядность и удобство практического использования. Вместе с тем, до сих пор этот метод применялся лишь для систем с числом частиц $N \leq 4$.

Целью работы является решение квантовомеханической задачи пяти тел на основе формализма АГС и применение полученного решения к исследованию системы, содержащей псевдоскалярный мезон (η -мезон) и четыре нуклона.

Основными **задачами** диссертации являлись следующие:

- Вывести уравнения для системы пяти частиц с использованием формализма АГС;
- Решить задачу пяти тел для взаимодействия псевдоскалярного мезона с системой четырех нуклонов;
- Исследовать динамические особенности взаимодействия η -мезонов с малонуклонными ядрами d , ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$.
- На основе фитирования параметров модели к имеющимся экспериментальным данным для образования η мезонов на ядрах получить зависимость амплитуды ηN рассеяния от энергии в подпороговой области.

Научная новизна

1. Впервые развит математический аппарат для решения задачи пяти тел в рамках метода Альта-Грассбергера-Сандхаса. Получены выражения для эффективных потенциалов, описывающих взаимодействия в подсистемах, возникающих при разбиении исходной системы пяти частиц по схемам $(1 + 4)$ и $(2 + 3)$. Проведена необходимая процедура симметризации и выписаны уравнения для симметризованных амплитуд.
2. Впервые решена задача взаимодействия в системе пяти тождественных бозонов и вычислены энергии связи такой системы. Исследована сходимость результатов при изменении количества членов, учитываемых в сепарабельном разложении.
3. Впервые дано точное решение задачи о взаимодействии η -мезонов с системой четырех нуклонов. Вычислена длина рассеяния η -мезона на ядре ${}^4\text{He}$. Получены количественные результаты, объясняющие отсутствие связанных состояний в этой системе.
4. Впервые на основе точного решения задачи взаимодействия η -мезонов с ядрами d , ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ получена зависимость амплитуды ηN рассеяния $f_{\eta N}$ от энергии в подпороговой области.

Научная и практическая значимость

Полученные в работе пятичастичные уравнения могут использоваться для исследования взаимодействия других псевдоскалярных мезонов с ядром ${}^4\text{He}$. Кроме этого, развитый подход открывает широкие возможности для решения аналогичных задач взаимодействия в других системах адронов. К ним следует отнести пятинуклонные системы (в первую очередь ${}^5\text{He}$ и ${}^5\text{Li}$), гиперядра и другие объекты.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Вывод уравнений АГС для задачи пяти тел показывает, что наряду с потенциалами, имеющими структурные аналоги в четырехчастичной задаче, в случае пяти частиц появляются потенциалы, имеющие принципиально иную структуру. В связи с этим, уравнения АГС для системы пяти тел не могут быть получены путем простой экстраполяции эффективных потенциалов задачи четырех тел на систему с $N = 5$.
2. Анализ зависимости результатов от числа сепарабельных членов в разложении ядер интегральных уравнений, как и в случае пяти бозонов, демонстрирует сходимость, вполне достаточную для практических целей. В целом, удержание в разложении первых 4-6 членов обеспечивает точность лучше 1%.
3. Расчеты рассеяния η -мезона на ядрах d , ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ показывают, что в каждом из трех случаев имеется сравнительно широкая, но тем не менее ограниченная область энергий, при которых значения элементарной амплитуды рассеяния $f_{\eta N}$ оказывают существенное влияние на величину амплитуды η -ядерного рассеяния $f_{\eta A}$.
4. Притяжение в системе $\eta{}^4\text{He}$ является более слабым по сравнению с системой $\eta{}^3\text{He}$ вследствие сильной зависимости амплитуды $f_{\eta N}$ от энергии в подпороговой области. Этот результат объясняет, почему эффект взаимодействия в конечном состоянии в реакции $dd \rightarrow \eta{}^4\text{He}$ оказывается слабее, чем в процессах, в которых образуется система $\eta{}^3\text{He}$, например $dp \rightarrow \eta{}^3\text{He}$.
5. Вещественные части длин рассеяния η -мезона на ядрах d , ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ положительны. Таким образом, η -мезон не образует связанного состояния с ядрами с массовым числом $A \leq 4$.

Личный вклад автора

Постановка задач и методов реализации полученных результатов осуществлялась совместно с научным руководителем. Все оригинальные результаты, представленные в диссертации, получены либо самим автором, либо при его непосредственном участии.

Апробация работы

По теме диссертации опубликованы 4 статьи в зарубежных журналах. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах исследовательской школы физики высокоэнергетических процессов, кафедры теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, трех приложений и списка цитируемой литературы, содержащего 76 библиографических наименований. Общий объем диссертации составляет 96 страниц. Работа содержит 5 таблиц и 26 рисунков.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется научная новизна и практическая значимость представленной работы.

В **главе 1** представлен вывод уравнений Альта-Грассбергера-Сандхаса для задачи пяти тел. В качестве конкретного примера с целью иллюстрации формул рассматривается система, включающая четыре фермиона со спином $1/2$ (нуклоны) и псевдоскалярный мезон (η -мезон). По аналогии с трехчастичной задачей вводятся разбиения системы пяти частиц и соответствующие этим разбиениям каналы гамильтонианы. Все возможные разбиения с учетом тождественности нуклонов приведены в таблице 1. Следуя стандартной схеме, во всех подсистемах учитывается лишь s -волновая часть взаимодействия. Это объясняется как доминированием s -волн в затравочных двухчастичных NN и ηN взаимодействиях, так и тем, что в рассматриваемой в работе области низких энергий вклад высших орбитальных моментов подавлен.

Таблица 1: Используемая в работе нумерация разбиений системы $\eta - 4N$.

α_n	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
1	$(NN) + N + N + \eta$	$(N NN) + N + \eta$	$\eta + (NNNN)$
2	$(\eta N) + N + N + N$	$(\eta NN) + N + N$	$(\eta N) + (NNN)$
3		$(\eta N) + (NN) + N$	$(\eta NN) + (NN)$
4		$(NN) + (NN) + \eta$	$(\eta NNN) + N$

Использование сепарабельного разложения для ядер интегральных уравнений позволяет свести исходную задачу пяти тел к эффективной четырехчастичной задаче, которая в свою очередь последовательно сводится к трех- и затем к двухчастичной задаче. Получающиеся таким образом динамические уравнения в операторном виде могут быть представлены как

$$X_{\alpha_2 m, \beta_2 n} = Z_{\alpha_2 m, \beta_2 n} + \sum_{\gamma_2, kl} Z_{\alpha_2 m, \gamma_2 k} \Delta_{kl}^{\gamma_2} X_{\gamma_2 l, \beta_2 n}, \quad (1)$$

где

$$Z_{\alpha_2 m, \beta_2 n} = (1 - \delta_{\alpha_2 \beta_2}) \sum_{\alpha_3, kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_2 m \\ \alpha_3 k \end{array} \left| \Delta_{kl}^{\alpha_3} \right| \begin{array}{c} \beta_2 n \\ \alpha_3 l \end{array} \right\rangle. \quad (2)$$

Здесь $X_{\alpha_2 m, \beta_2 n}$ – искомые амплитуды. Их значения (вычисленные на энергетической поверхности) определяет вероятность рассеяния из состояния $|\alpha_2 m\rangle$ в состояние $|\beta_2 n\rangle$. Форм-факторы $|\alpha_2 m\rangle$ и $|\beta_2 n\rangle$ соответствуют связанным состояниям в подсистемах α_2 и β_2 . В качестве неоднородных членов выступают эффективные потенциалы $Z_{\alpha_2 m, \beta_2 n}$, определяемые выражением (2), которые описывают обмен частицей или группой частиц между двумя кластерами, либо два независимых кластера, между которыми возможен обмен энергией. Суммирование в выражении (2) проводится по всем возможным разбиениям α_3 системы двух частиц α_2 (для случая $\eta - 4N$ эти разбиения даны в таблице 1). $\Delta_{kl}^{\alpha_3}$ имеет смысл пропагатора, описывающего свободное движение трех частиц (групп частиц), входящих в разбиение α_3 .

Уравнения (1), имеющие связанные ядра, являются одним из важнейших результатов диссертационной работы. Они имеют форму уравнений Липпмана-Швингера для системы связанных каналов, где каждый канал соответствует возможному разбиению исходной системы на две подсистемы типа $(1 + 4)$ и $(2 + 3)$. Их детальный вывод приведен в диссертации.

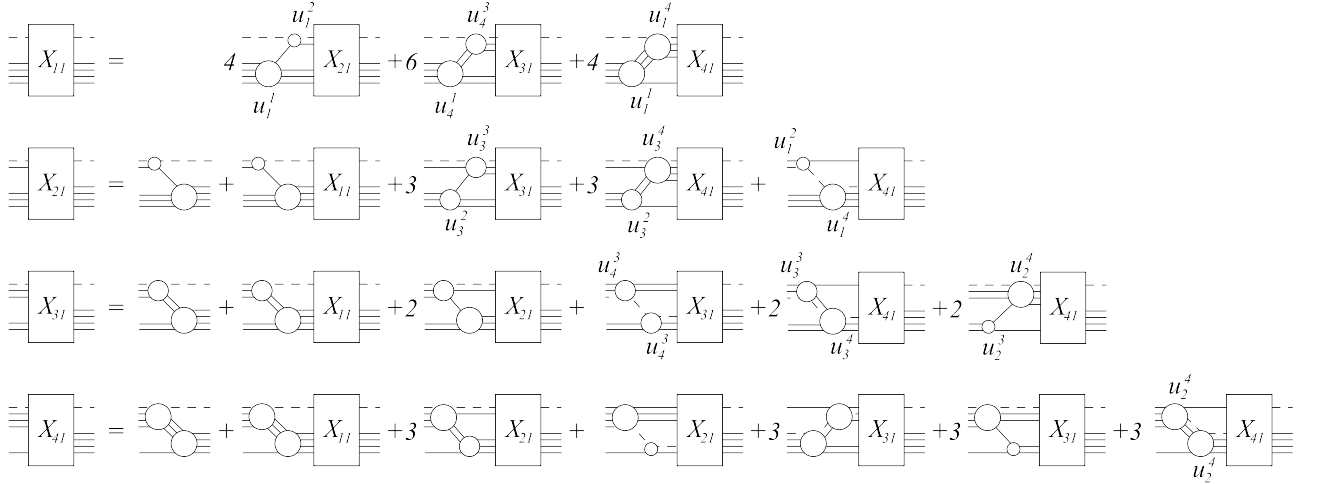


Рисунок 1: Графическое представление эффективных двухчастичных уравнений для рассеяния в системе пяти тел $\eta - 4N$. Штриховыми и сплошными кривыми показаны, соответственно, η -мезон и нуклоны.

Для системы $\eta - 4N$, содержащей один мезон и четыре нуклона, соответствующие уравнения, в которых корректно учтена тождественность нуклонов, показаны в виде диаграмм на рис. 1. На рис. 2 приведено графическое представление неоднородных членов (эффективных потенциалов) $Z_{\alpha_2 m, \beta_2 n}$.

В импульсном представлении потенциалы (2) могут быть вычислены в соответствии с

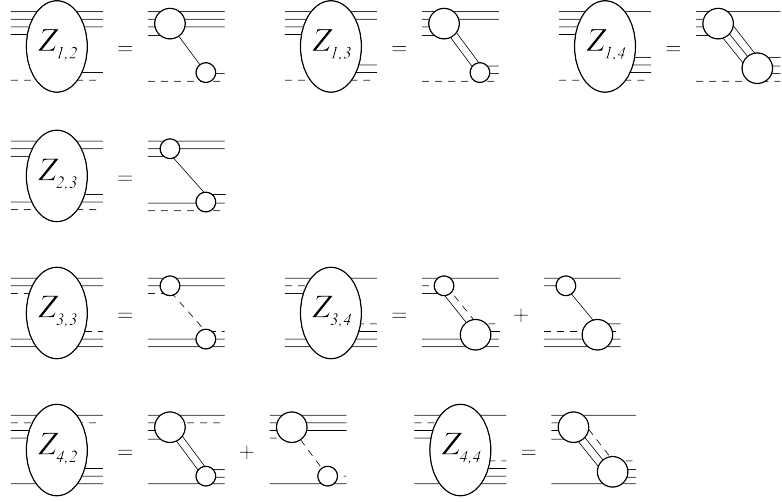


Рисунок 2: Диаграммное представление потенциалов Z_{α_2, β_2} возникающих в системе уравнений (1) для случая $\eta = 4N$.

формулой

$$Z_{\alpha_2 m, \beta_2 n}(E; p, p') = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_3, kl} \int_{-1}^{+1} g_{\alpha_3 k}^{\alpha_2 m}(\omega, \vec{q}) \times \Delta_{kl}^{\alpha_3} \left(E - \frac{p^2}{2\mu_{\alpha_2}} - \frac{q^2}{2\mu_{\alpha_2 \alpha_3}} \right) g_{\alpha_3 l}^{\beta_2 n}(\omega', \vec{q}') d(\hat{p} \cdot \hat{p}'), \quad (3)$$

которая также схематически проиллюстрирована с помощью диаграмм на рис.3 на примере потенциала $Z_{4,2}$. Здесь E есть энергия всей системы пяти тел $\eta = 4N$.

$$Z_{4,2}(E; p, p') = \begin{array}{c} g_3^4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ g_3^2 \end{array} + \begin{array}{c} g_l^4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ g_l^2 \end{array}$$

Рисунок 3: Структура потенциала $Z_{4,2}$ согласно общей формуле (3).

Таким образом, используемый в работе сепарабельный метод позволяет свести пяти-частичные (в общем случае N -частичные) расчеты к довольно прозрачной рекуррентной схеме, в которой амплитуды подсистем в разбиении α_{n-2} определяются амплитудами, относящимися только к разбиениям $\alpha_{n-1} \subset \alpha_{n-2}$ и $\alpha_n \subset \alpha_{n-1}$. В рамках этой схемы формфакторы и пропагаторы, возникающие в сепарабельном представлении матриц X в разбиениях α_n и α_{n-1}

$$X_{\alpha_{n+1} a, \beta_{n+1} b}^{\alpha_n} = \sum_{kl} \left| \begin{array}{c} \alpha_n k \\ \alpha_{n+1} a \end{array} \right\rangle \Delta_{kl}^{\alpha_n} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_n l \\ \beta_{n+1} b \end{array} \right|, \quad (4)$$

$$X_{\alpha_n a, \beta_n b}^{\alpha_{n-1}} = \sum_{kl} \left| \begin{array}{c} \alpha_{n-1} k \\ \alpha_n a \end{array} \right\rangle \Delta_{kl}^{\alpha_{n-1}} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_{n-1} l \\ \beta_n b \end{array} \right|,$$

используются для построения эффективных потенциалов $Z_{\alpha_{n-1} a, \beta_{n-1} b}^{\alpha_{n-2}}$ согласно общему выражению

$$Z_{\alpha_{n-1} a, \beta_{n-1} b}^{\alpha_{n-2}} = (1 - \delta_{\alpha_{n-1} \beta_{n-1}}) \sum_{\gamma_n, kl} \left\langle \begin{array}{c} \alpha_{n-1} a \\ \gamma_n k \end{array} \left| \Delta_{kl}^{\gamma_n} \right| \begin{array}{c} \beta_{n-1} b \\ \gamma_n l \end{array} \right\rangle, \quad (5)$$

$$\gamma_n \subset \alpha_{n-1}, \quad \gamma_n \subset \beta_{n-1}, \quad \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \subset \alpha_{n-2}.$$

Потенциалы (5) порождают матрицы X в разбиении α_{n-2} :

$$X_{\alpha_{n-1} a, \beta_{n-1} b}^{\alpha_{n-2}} = Z_{\alpha_{n-1} a, \beta_{n-1} b}^{\alpha_{n-2}} + \sum_{\gamma_{n-1}, kl} Z_{\alpha_{n-1} a, \gamma_{n-1} k}^{\alpha_{n-2}} \Delta_{kl}^{\gamma_{n-1}} X_{\gamma_{n-1} l, \beta_{n-1} b}^{\alpha_{n-2}},$$

$$\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1} \subset \alpha_{n-2}. \quad (6)$$

На практике уравнения (6) в таком виде решаются лишь для нахождения амплитуд $X_{\alpha_{2m}, \beta_{2n}}$. В других разбиениях α_n с $n > 2$ используются фактически только их ядра для получения сепарабельного представления амплитуды $X_{\alpha_{n-1} a, \beta_{n-1} b}^{\alpha_{n-2}}$. Начав с $n = 4$, в результате последовательного трехкратного применения описанной выше рекуррентной схемы мы приводим исходные уравнения для пяти частиц к эффективным двухчастичным уравнениям, имеющим структуру уравнений Липпмана-Швингера для связанных каналов.

Важно отметить, что метод не ограничивается использованием только нелокальных сепарабельных потенциалов, так как в принципе любой, в том числе чисто локальный, потенциал может быть представлен с определенной точностью суммой сепарабельных членов. Таким образом, метод может применяться для произвольного локального взаимодействия.

В **главе 2** полученный формализм применяется к задаче о взаимодействии в системе пяти тождественных бозонов. В случае пяти одинаковых бозонов для описания затравочного двухчастичного взаимодействия в s -волне был использован простейший сепарабельный потенциал

$$v(q, q') = -\lambda f(q) f(q') \quad (7)$$

с формфактором типа Ямагучи

$$f(q) = (1 + q^2/\beta^2)^{-1}. \quad (8)$$

Массы бозонов брались равными массе нуклона $M = 939$ МэВ. Для параметра λ , определяющего интенсивность взаимодействия, использовалось усредненное значение

$$\lambda = (\lambda_0 + \lambda_1)/2, \quad (9)$$

где λ_S ($S = 0, 1$) – значение параметра, вычисленное, соответственно, для спин-синглетного и спин-триплетного NN -взаимодействий. При таком выборе параметров двухбозонная (bb) система имеет слабо связанное состояние с энергией связи $E_{bb} = 0,43$ МэВ.

Возможные разбиения α_n системы пяти тождественных бозонов приведены в Таблице 2. Число уравнений типа Липпмана-Швингера, к которым приводится исходная задача, равно числу соответствующих разбиений.

Таблица 2: Нумерация разбиений для системы пяти одинаковых бозонов.

α_n	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
1	$(bb)+b+b+b$	$(bbb)+b+b$	$b+(bbbb)$
2		$(bb)+(bb)+b$	$(bb)+(bbb)$

Операторные уравнения (6) для матриц $X_{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}^{\alpha_n}$ с $n = 2, 3$ схематично представлены на рис. 4 и 5. Целочисленные факторы в правой части появляются из-за тождественности бозонов. Для $\alpha_3 = \alpha_2 = 1$ эффективные потенциалы $Z_{1,1}^{\alpha_3}$, $Z_{1,1}^{\alpha_2}$ и $Z_{1,2}^{\alpha_2}$ интерпретируются в терминах обмена частицами (квазичастицами). В случае $\alpha_3 = \alpha_2 = 2$ мы имеем, как обычно, две группы частиц, взаимодействующих только внутри кластеров.

$$\begin{aligned}
 X_{l,l}^1 &= 2 \left[\text{diagram with } Z_{l,l}^1 \text{ and a diagonal line} \right] + 2 \left[\text{diagram with } Z_{l,l}^1 \text{ and a box } X_{l,l}^1 \right] \\
 X_{l,l}^2 &= \left[\text{diagram with } Z_{l,l}^2 \text{ and two parallel lines} \right] + \left[\text{diagram with } Z_{l,l}^2 \text{ and a box } X_{l,l}^2 \right]
 \end{aligned}$$

Рисунок 4: Графическое представление уравнений (6) для разбиений α_3 (нумерация разбиений приведена в таблице 2). Верхнее и нижнее уравнения соответствуют $\alpha_3 = 1$ и 2 соответственно. Численные множители возникают вследствие учета тождественности частиц.

Важно, что в случае $\alpha_2 = 2$ (см. рис. 5), кроме потенциала $Z_{1,2}^2$, соответствующего фрагментации $(2+3)$, который по своей структуре эквивалентен потенциалам типа $(2+2)$ в разбиении $\alpha_3 = 2$ ($Z_{1,1}^2$ на рис. 4), также возникает потенциал $Z_{2,2}^2$, который имеет иную структуру. Здесь, как и ранее, имеются две не взаимодействующие друг с другом составные частицы, но потенциал больше не имеет того простого смысла, какой был при разбиении $(2+2)$ в системы четырех частиц. Как видно из рисунка, теперь начальное и конечное состояния включают эффективные вершины $(bb) + (bb)$, а взаимодействие реализуется путем обмена бозоном между двумя кластерами (bb) , тогда как второй кластер выступает в роли зрителя. Потенциалы такого типа не имеют аналогов в теории четырех тел и впервые появляются именно в задаче пяти тел.

$$\begin{aligned}
X_{1,1}^1 &= 3 \begin{array}{c} Z_{1,1}^1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + 3 \begin{array}{c} Z_{1,1}^1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{1,1}^1 \end{array} + 4 \begin{array}{c} Z_{1,2}^1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{2,1}^1 \end{array} \\
X_{2,1}^1 &= 3 \begin{array}{c} Z_{2,1}^1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + 3 \begin{array}{c} Z_{2,1}^1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{1,1}^1 \end{array} \\
X_{1,1}^2 &= 3 \begin{array}{c} Z_{1,2}^2 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{2,1}^2 \end{array} \\
X_{2,1}^2 &= \begin{array}{c} Z_{2,1}^2 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} Z_{2,1}^2 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{1,1}^2 \end{array} + 2 \begin{array}{c} Z_{2,2}^2 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{2,1}^2 \end{array}
\end{aligned}$$

Рисунок 5: То же, что на рис. 4, но для двухчастичных разбиений $\alpha_2 = 1$ (два верхних уравнения) и $\alpha_2 = 2$ (два нижних уравнения).

Полученные уравнения для пяти частиц в форме уравнений Липпмана-Швингера проиллюстрированы на рис. 6. В импульсном представлении после перехода к парциально-волновому разложению они преобразуются к одномерным интегральным уравнениям для отдельных волн. В связи с тем, что мы ограничиваем наше рассмотрение энергиями ниже первого неупругого порога, ядра уравнений являются непрерывными функциями, так что сами уравнения могут быть решены непосредственно путем матричной инверсии.

$$\begin{aligned}
X_{1,1} &= 4 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + 4 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{1,1} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{2,1} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{2,1} \end{array} \\
X_{2,1} &= 4 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + 6 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + 4 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{1,1} \end{array} + 6 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{1,1} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ X_{2,1} \end{array}
\end{aligned}$$

Рисунок 6: Графическое представление эффективных двухчастичных уравнений (1) для системы пяти тождественных бозонов. Обозначения те же, что на рис. 4. Верхний индекс α_1 здесь является излишним и поэтому опущен.

Так как в практических расчетах сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений заменяется конечной суммой, проверка качества модели предполагает исследование сходимости результатов к правильному значению в зависимости от числа n сепарабельных членов, учитываемых в разложении. Под правильным понимается значение, получаемое в пределе $n \rightarrow \infty$.

В случае пяти бозонов непосредственные расчеты показывают, что при вычислении энергии связи E_{5b} уже первый член в сепарабельном разложении амплитуд $X_{\alpha_3 m \beta_3 n}^{\alpha_2}$ для $\alpha_2 = 1, 2$ обеспечивают точность в пределах 2% от правильного значения. Чтобы проиллюстрировать причину такой быстрой сходимости, мы привели на рис. 7 энергетическую зависимость первых четырех собственных значений $\lambda_n^{\alpha_2}$. Как видим, абсолютные величины $|\lambda_n^{\alpha_2}|$ довольно быстро уменьшаются, так что с ростом n имеем $|\lambda_n^{\alpha_2}| \ll 1$. Кроме того, как видно из рис. 7, вклад членов с номерами $n > 1$ подавлен, поскольку два соседних слагаемых входят в сумму с разными знаками. В результате притягивающая часть потенциала, соответствующая $\lambda_n > 0$, в значительной степени компенсируется отталкивающими членами, соответствующими $\lambda_n < 0$.

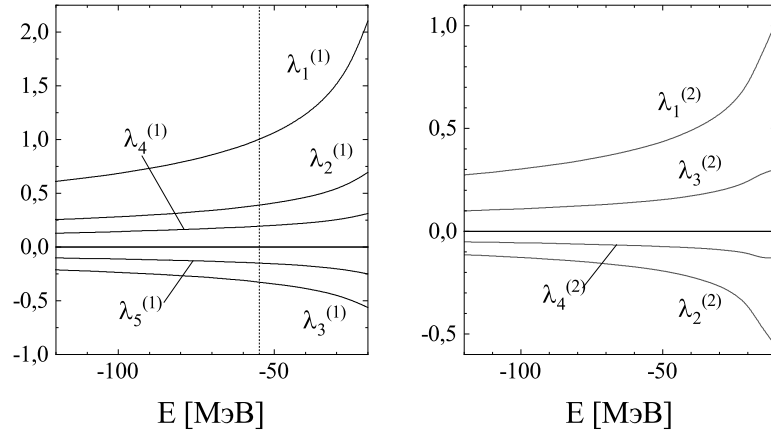


Рисунок 7: Зависимость нескольких первых собственных значений $\lambda_n^{(\alpha_2)}$ ядер интегральных уравнений (1) (см. рис. 6) для системы пяти тождественных бозонов, вычисленных для $\alpha_2 = 1$ (левая часть) и $\alpha_2 = 2$ (правая часть рисунка). Вертикальная пунктирная линия проведена при энергии, соответствующей энергии связи основного состояния четырех бозонов $E = -E_{4b}$.

Для энергий связи были получены следующие значения

$$E_{3b} = 12,6 \text{ МэВ}, \quad E_{4b} = 54,8 \text{ МэВ}, \quad E_{5b} = 144,3 \text{ МэВ}. \quad (10)$$

Ввиду того, что мы используем простейший потенциал Ямагучи, значения E_{3b} и E_{4b} заметно переоценивают энергии связи ядер ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$:

$$E_{{}^3\text{He}}^{exp} = 7,2 \text{ МэВ}, \quad E_{{}^4\text{He}}^{exp} = 28,3 \text{ МэВ}. \quad (11)$$

Для систем (3b) и (4b) наши расчеты предсказывают, помимо основных, также возбужденные уровни с энергиями

$$E_{4b}^* = 13,2 \text{ MeV}, \quad E_{5b}^* = 61,0 \text{ MeV}. \quad (12)$$

В целом, как видно из (10), энергия связи очень быстро увеличивается с ростом числа частиц. Этот результат является вполне ожидаемым, так как потенциал Ямагучи характеризуется сильным притяжением на малых расстояниях ($r < 0,2$ Фм)

В главе отдельно рассмотрены математические вопросы, касающиеся сходимости сепарабельного разложения. Общая эффективность применения сепарабельного разложения ядер интегральных уравнений связана с тем, что если затравочные двухчастичные взаимодействия обусловлены полюсами соответствующих t -матриц, лежащими в непосредственной близости от исследуемой области, то и амплитуды соответствующих трех-, четырех-, и пятичастичных систем также содержат полюса, лежащие в каждом случае вблизи нулевой энергии. Как следствие, сепарабельное разложение, которое хорошо отражает полюсную природу взаимодействия и поэтому правильно воспроизводит поведение амплитуды вблизи полюсов, обеспечивает адекватное описание динамических свойств системы.

Глава 3 посвящена исследованию взаимодействия η -мезона с ядром ${}^4\text{He}$ на основе решения уравнений Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС). Основная задача формулируется следующим образом: необходимо подобрать амплитуду $f_{\eta N}$ элементарного ηN взаимодействия таким образом, чтобы вычисленная с ее помощью амплитуда $f_{\eta A}$ взаимодействия η -мезона с ядром воспроизводила рост сечения для реакций образования η -мезонов на разных ядрах. При этом количественное согласие должно быть достигнуто с одним и тем же набором параметров одновременно для всех ядер. С этой целью, используя формализм, изложенный в предыдущих разделах, была решена задача трех, четырех и пяти частиц соответственно для ηd , $\eta {}^3\text{He}$ и $\eta {}^4\text{He}$ систем. В каждом из рассмотренных случаев полная энергия \mathcal{E} была равна $-E_b^A$, что соответствует упругому порогу рассеяния η -мезона на ядре.

В качестве промежуточного результата, для каждого из трех случаев, ηd , $\eta {}^3\text{He}$ и $\eta {}^4\text{He}$, был найден интервал энергий в системе ηN в котором значения $f_{\eta N}(E)$ оказывают наибольшее влияние на значения длин η -ядерного рассеяния $a_{\eta A}$ для $A = d, {}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$. Было установлено, что для всех трех систем имеется сравнительно широкая, но тем не менее ограниченная область энергий, в пределах которой это влияние является существенным. С увеличением энергии связи ядра эта область систематически сдвигается в сторону более низких энергий E . Ввиду того, что с уменьшением E амплитуда $f_{\eta N}(E)$ убывает, полученный результат означает, что с ростом массового числа ядра в игру вступают все меньшие значения $f_{\eta N}$. Это, в частности, приводит к тому, что результирующее притяжение в системе $\eta {}^4\text{He}$ является более слабым по сравнению с системой $\eta {}^3\text{He}$, и объясняет почему эффект взаимодействия в конечном состоянии в реакции $dd \rightarrow \eta {}^4\text{He}$ оказывается слабее, чем в процессах, в которых образуется система $\eta {}^3\text{He}$, например $dp \rightarrow \eta {}^3\text{He}$.

На основе полученных решений уравнений АГС были вычислены длины рассеяния $a_{\eta A}$ для всех трех указанных выше систем. Для амплитуд упругого рассеяния $f_{\eta A}$ использовалась формула низкоэнергетического разложения

$$f_{\eta A}(q) \approx \frac{a_{\eta A}}{1 - iq a_{\eta A}}. \quad (13)$$

Соответствующие значения $|f_{\eta A}(q)|^2$ были подогнаны под имеющиеся экспериментальные

значения путем варьирования модельных параметров, определяющих амплитуду $f_{\eta N}$.

Для анализа использовались экспериментальные данные, относящиеся к области энергий, ограниченной условием $|a_{\eta A}|q \leq 1$, то есть там, где разложение (13) остается корректным. В ходе подгонки значение мнимой части $a_{\eta N}$ удерживалось вблизи 0,25 фм. Это достигалось путем искусственного включения этого значения в набор фитируемых данных с «экспериментальной» ошибкой 0,05 фм. Требование этого дополнительного условия связано с тем фактом, что мнимая часть $\mathcal{I}m a_{\eta N}$ в значительной степени определяется оптической теоремой для рассеяния πN , так что ее значение известно с гораздо меньшей неопределенностью по сравнению с реальной частью $\mathcal{R}e a_{\eta N}$.

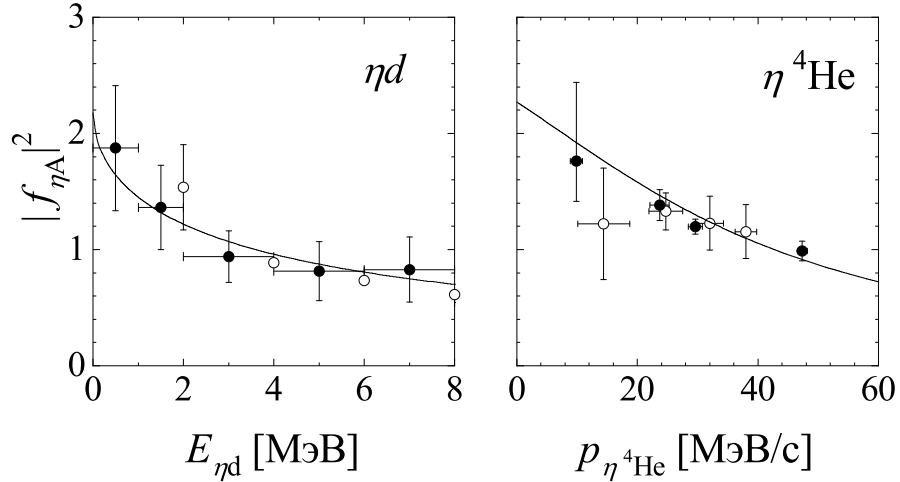


Рисунок 8: Квадрат ηA амплитуды $|f_{\eta A}|^2$ для $A = d$ и ${}^4\text{He}$. Кривыми представлены результаты нашей подгонки. Экспериментальные данные приведены для значений $|f_{\eta A}|^2$, извлеченных из данных для $pn \rightarrow \eta d$ и $pd \rightarrow \eta pd$ (левая часть рисунка) и $dd \rightarrow \eta {}^4\text{He}$ (правая часть). Нормировка всех результатов является произвольной.

Результаты подгонки представлены на рисунках 8 и 9. Значение χ^2/N_{df} , где N_{df} – число степеней свободы (число экспериментальных точек за вычетом числа подгоночных параметров), составило 1,17. Поскольку численное решение проблемы пяти тел требует большого компьютерного времени, ошибки определения параметров не находились.

Полученная таким образом амплитуда $f_{\eta N}$ приведена на рис.10. Ее действительная часть оказывается несколько ниже значений, найденных в рамках K -матричного анализа, хотя полученная нами длина рассеяния

$$a_{\eta N} = 0,70 + i 0,29 \text{ Фм} \quad (14)$$

лишь незначительно отличается от K -матричного результата $a_{\eta N} = 0,75 + i 0,27 \text{ Фм}$.

Для длин рассеяния η -мезонов на ядрах получены следующие результаты:

$$a_{\eta d} = 2,16 + i 1,25 \text{ Фм},$$

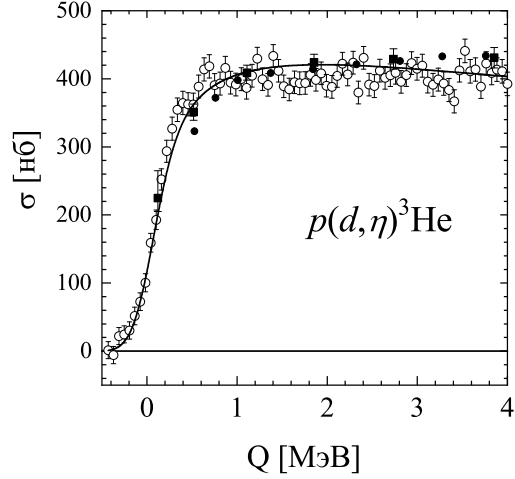


Рисунок 9: Полное сечение $dp \rightarrow \eta^3\text{He}$ как функция избыточной энергии Q . Кривая показывает результат нашего фита.

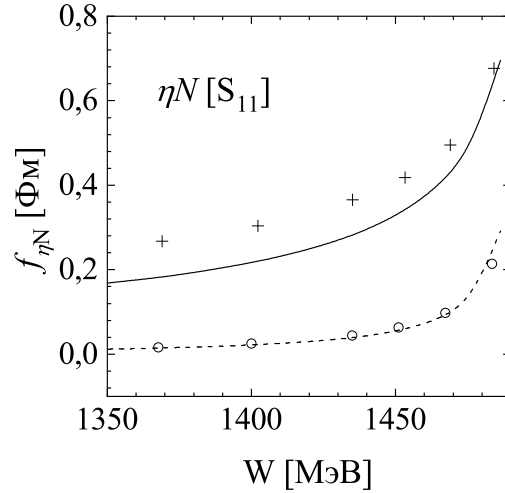


Рисунок 10: Амплитуда ηN рассеяния вне массовой поверхности. Обозначения: сплошная кривая: действительная часть, пунктирная кривая: мнимая часть. Данные представляют результаты K -матричного анализа.

$$\begin{aligned}
 a_{\eta^3\text{He}} &= 3,73 + i 2,89 \text{ Фм}, \\
 a_{\eta^4\text{He}} &= 3,37 + i 1,46 \text{ Фм}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Тот факт, что вещественные части во всех трех случаях положительны, ($\text{Re } a_{\eta A} > 0$), означает что η -мезон не образует связанного состояния ни с одним из рассмотренных ядер. Если в качестве количественной характеристики интенсивности притяжения в системе ηA использовать модуль $|a_{\eta A}|$, то наиболее сильное взаимодействие достигается в случае $\eta^3\text{He}$. В дейтроне оно слабее, что, очевидно, объясняется меньшим числом нуклонов. Наиболее неожиданным является тот факт, что взаимодействие между η -мезоном и ядром ^4He так-

же характеризуется более слабым притяжением по сравнению с $\eta^3\text{He}$. Основной причиной этого является быстрое уменьшение амплитуды рассеяния ηN в области ниже однонуклонного порога, то есть в области $W < 1480$ МэВ. Как следствие, поскольку энергия E ограничена условием $E < -E_b^A$, для ^3He значение $\text{Re} f_{\eta N}$ в среднем больше, и эффективное притяжение ηN сильнее, чем в существенно более плотном ядре ^4He .

В **заклучении** резюмируются результаты диссертации:

1. Получены уравнения Альта-Грассбергера-Сандхаса для задачи пяти тел. Ключевым звеном используемого метода является сепарабельное разложение ядер интегральных уравнений, позволяющее свести исходные уравнения Шредингера в импульсном представлении к системе интегральных уравнений типа Липпмана-Швингера для связанных каналов.
2. Получены выражения для эффективных потенциалов, описывающих взаимодействия в подсистемах, возникающих при разбиении исходной системы пяти частиц по схемам $(1 + 4)$ и $(2 + 3)$.
3. Для случая, когда система содержит тождественные частицы, проведена необходимая процедура симметризации и получены уравнения для симметризованных амплитуд.
4. Полученные в формальной части работы уравнения применены к исследованию взаимодействия в системе пяти тождественных бозонов. В качестве примера вычислены энергии связи системы, в случае, когда в качестве бозонов выступают бесспиновые нуклоны. Предсказано наличие в такой системе двух связанных состояний 0^+ с энергиями

$$E = 144,3 \text{ МэВ} \quad \text{и} \quad E^* = 61,0 \text{ МэВ}.$$

5. Продемонстрирована быстрая сходимость результатов, полученных для энергий связи системы пяти бозонов, при изменении количества членов, учитываемых в сепарабельном разложении, что говорит о высокой практической применимости метода сепарабельного разложения для решения пятичастичных задач.
6. Решена задача о взаимодействии η -мезонов с системой четырех нуклонов. Исследовано взаимодействие η -мезона с ядром ^4He . Вычислена длина рассеяния η -мезона на ядре ^4He .
7. Исследована зависимость амплитуды η -ядерного взаимодействия от подпорогового поведения элементарной амплитуды $f_{\eta N}$. Расчеты выполнены для ядер d , ^3He и ^4He .
8. Проведена подгонка элементарной амплитуды $f_{\eta N}$ под имеющиеся экспериментальные данные для $|f_{\eta A}|^2$. Результаты получены на основе точных решений уравнений

АГС для систем ηd , $\eta^3\text{He}$ и $\eta^4\text{He}$. Найденная зависимость значений $f_{\eta N}$ от энергии согласуется с результатами, полученными в рамках K -матричного анализа каналов ηN , πN и $\pi\pi N$.

Приложения содержат формальный материал, который использовался при проведении вычислений.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы

Полученные в работе уравнения для системы $\eta-4N$ могут непосредственно использоваться для исследования взаимодействия других псевдоскалярных мезонов с ядром ^4He . Так, например, различные теории, как кварковые, так и чисто феноменологические, предсказывают притягивающий характер взаимодействия с нуклонами для некоторых тяжелых чармированных мезонов, например, η_c . Здесь взаимодействие имеет уже не резонансный характер, как в случае ηN , а обусловлено одноглюонным обменом между кварками, входящими в состав чармированного мезона η_c и нуклона. Следствием этой особенности является экзотический характер $\eta_c N$ взаимодействия. А именно, оно является очень интенсивным, но при этом характеризуется довольно малым радиусом действия сил. Вопрос о существовании связанных состояний этих мезонов с ядрами и возможности их экспериментального исследования, может быть решен на основе результатов, представленных в диссертации.

Кроме этого, полученные уравнения в силу своей универсальности и эффективности открывают широкие возможности для решения аналогичных задач взаимодействия в других системах адронов. Сюда следует отнести пятинуклонные системы (в первую очередь ^5He и ^5Li), гиперядра, а также системы, содержащие ядро ^4He и K -мезон, η' -мезон и другие мезоны.

Результаты главы 2 имеют в основном академический характер и призваны продемонстрировать особенности метода. Вместе с тем, они могут быть также использованы при решении конкретных физических задач, например, задачи о взаимодействии пяти атомов ^4He (гелиевый пентамер).

Публикации по теме диссертации

1. A. Fix and **O. Kolesnikov**. Solution of the five-body η^4 He problem with separable pole expansion method // Physics Letters B — 2017. — V.772. — p. 663
2. A. Fix and **O. Kolesnikov**. Systematic few-body analysis of ηd , $\eta^3\text{He}$ and $\eta^4\text{He}$ interaction at low energies // Physical Review C — 2018. — V.97. — p. 044001.
3. **O. Kolesnikov** and A. Fix. Five-body integral equations and solution of the $\eta - 4N$ problem // Few-Body Systems — 2020. — V.61. — p. 18.
4. **O. Kolesnikov** and A. Fix. Three-body calculation of coherent π^0 photoproduction on the deuteron in the Δ region // Journal of Physics G — 2021. — V.48. — p. 085101.